Álgebra y estructuras finitas/discretas (Grupos A)

Curso 2007-2008

Soluciones a algunos de los ejercicios propuestos en el Tema 1

Antes de ver la solución de un ejercicio, repase la teoría correspondiente al mismo, analice ejercicios similares resueltos en clase, y lo más importante, intente resolverlo usted mismo. A veces la resolución no es inmediata, necesita su tiempo.

1. Relación de problemas del Tema 1

5a. Si $A \cup B \subseteq A \cup C$ y $A \cap B \subseteq A \cap C$, entonces $B \subseteq C$.
Solución:
$x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$. Como estamos suponiendo que $A \cup B \subseteq A \cup C$, deducimos que $x \in A \cup C$. Distinguimos dos casos:

- Si $x \in A$, entonces $x \in A \cap B$, y al suponer que $A \cap B \subseteq A \cap C$, en particular deducimos que $x \in C$.
- Si $x \notin A$, como $x \in A \cup C$, entonces obtenemos que $x \in C$.

7c. Dadas dos aplicaciones $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$, demuestre que si $g \circ f$ es inyectiva y f sobreyectiva, entonces g es inyectiva.
Solución:
Sean $y_1, y_2 \in Y$ tales que $g(y_1) = g(y_2)$. Probemos que $y_1 = y_2$. Al ser f sobreyectiva, existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = y_1 \ \wedge \ f(x_2) = y_2$. Por tanto $g(y_1) = g(y_2) \ \Rightarrow \ g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, es decir, $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Al suponer que $g \circ f$ es inyectiva, ésto implica que $x_1 = x_2$ y por consiguiente $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$.

8f. Estudie si f es inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva, y dé su aplicación inversa cuando ésta exista:
Solución:

$$\begin{gathered} f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ f(x, y) = (x + y, xy) \end{gathered}$$

La igualdad $f(1, 0) = (1, 0) = f(0, 1)$ nos dice que f no es inyectiva. Tampoco es f sobreyectiva, ya que no existe $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tal que $f(x, y) = (0, 1)$.

12. Para el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$, encuentre todas las aplicaciones $f : A \to A$ tales que $f \circ f = 1_A$.
Solución:
Claramente la aplicación 1_A verifica la condición $f \circ f = 1_A$. Si $x, y \in A$, $x \neq y$ y $f(x) = y$, la condición $f \circ f = 1_A$, implica que $f(y) = x$.
A partir de aquí es fácil deducir que exactamente existen $1+6+3 = 10$ aplicaciones f verificando las condiciones del ejercicio. (¡Encontrarlas!)

15. Defina una aplicación biyectiva de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$.
Solución:
Transfórmense ordenadamente los elementos pares en $\mathbb{N}$ en los enteros mayores o iguales que cero ($0 \mapsto 0, 2 \mapsto 1, 4 \mapsto 2, \ldots$). De manera similar, transfórmense ordenadamente los elementos impares en $\mathbb{N}$ en los enteros negativos ($1 \mapsto -1, 3 \mapsto -2, 5 \mapsto -3, \ldots$).

18. Si $f : X \to Y, g : Y \to Z$ son aplicaciones biyectivas, demuestre que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
Solución:

En primer lugar observamos que tanto $(g \circ f)^{-1}$ como $f^{-1} \circ g^{-1}$ son aplicaciones de Z en X. La igualdad $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ equivale a $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = 1_X$ y $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = 1_Z$, lo cual se comprueba fácilmente teniendo encuenta que $f^{-1} \circ f = 1_X$, $f \circ f^{-1} = 1_Y$, $g^{-1} \circ g = 1_Y$, $g \circ g^{-1} = 1_Z$.

22. Dados los conjuntos $A, B \subseteq U$, dé una justificación para la siguiente fórmula:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

A continuación, obtenga una fórmula similar para $|A \cup B \cup C|$, el cardinal de la unión de tres conjuntos A, B, C.

Solución:

La primera parte se puede deducir fácilmente usando el diagrama de Venn. Obsérvese que restamos $|A \cap B|$ ya que cada elemento de $A \cap B$ se está contando dos veces en la expresión $|A| + |B|$.

Ahora, para la segunda parte del ejercicio, la unión $A \cup B \cup C$ de tres conjuntos podemos expresarla como una unión de dos conjuntos, es decir, $A \cup (B \cup C)$. Por el primer apartado, $|A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)|$. Ya que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, resulta $|A \cup B \cup C| = |A| + (|B| + |C| - |B \cap C|) - |(A \cap B) \cup (A \cap C)|$. Aplicando una vez más el primer apartado, se llega a $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

27a. Para la relación binaria siguiente, estudie si es una relación de equivalencia, y en caso afirmativo obtenga una descripción del conjunto cociente: R definida sobre $\mathbb{R}$ como $a\ R\ b \Leftrightarrow a^2 - 5a = b^2 - 5b$.

Solución:

Es inmediato comprobar que R es relación de equivalencia sobre el conjunto $\mathbb{R}$. Fijado $a \in \mathbb{R}$, $[a] = \{b \in \mathbb{R} \mid a^2 - 5a = b^2 - 5b\}$. Determinemos en función de a todos los valores posibles $b \in \mathbb{R}$ tales que $a^2 - 5a = b^2 - 5b$. Esta igualdad equivale a $a^2 - b^2 = 5a - 5b$, es decir, $(a + b)(a - b) = 5(a - b)$. Claramente una solución es $b = a$. Si $b \neq a$, podemos simplificar el factor común $a - b$, resultando $a + b = 5$, con lo cual en este caso $b = 5 - a$. Por consiguiente $[a] = \{a, 5 - a\}$. Nótese que este conjunto consta exactamente de un elemento cuando $a = 5 - a$, es decir, cuando $a = \frac{5}{2}$. Geométricamente, $[a]$ está formada por todos los números reales b tales que $f(a) = f(b)$ siendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la aplicación $f(x) = x^2 - 5x$, es decir, todos los elementos del eje X en los cuales la gráfica de f presenta la misma altura. Ahora se comprenderá mejor por qué $[\frac{5}{2}] = \{\frac{5}{2}\}$, ya que en dicho punto se encuentra el vértice de la parábola representada por f.

Por consiguiente $\frac{\mathbb{R}}{R} = \{\{a, 5 - a\} \mid a \in \mathbb{R}\}$.

28. Dado el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y su subconjunto $Y = \{1, 2, 3\}$, consideramos la relación de equivalencia siguiente definida sobre $\mathcal{P}(X)$: $A\ R\ B \Leftrightarrow A \cap Y = B \cap Y$. Describa el conjunto cociente.

Solución:

De nuevo es inmediato comprobar que R es relación de equivalencia. A partir de la definición de R, vemos que sólo se tienen en cuenta los elementos que A y B tienen en común con el conjunto Y. Por tanto hay tantas clases de equivalencia como subconjuntos tenga el conjunto Y, es decir, $2^{|Y|} = 2^3 = 8$. Además en cada clase de equivalencia hay exactamente $2^{|X\setminus Y|} = 2^2 = 4$. Nótese que $8 \cdot 4 = 32 = |\mathcal{P}(X)|$. Por ejemplo, $[\varnothing]$ tiene como elementos a todos aquellos subconjuntos A de X tales que $A \cap Y = \varnothing$, con lo cual $[\varnothing] = \mathcal{P}(\{4,5\})$.

30. Para cada una de las relaciones de equivalencia siguientes definidas sobre el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dé una interpretación ó representación geométrica del conjunto cociente:
    1. $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a+b = c+d$. Respuesta: La colección de todas las rectas del plano de pendiente -1.
    2. $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow a^2+b^2 = c^2+d^2$. Respuesta: La colección de todas las circunferencias del plano centradas en el origen de coordenadas.
    3. $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow |a|+|b| = |c|+|d|$. Respuesta: La colección de todos los cuadrados del plano centrados en el origen de coordenadas cuyos vértices se encuentran en los ejes de coordenadas.

2. Ejercicios aparecidos en exámenes anteriores

5. Indicar cual de las siguientes afirmaciones sobre conjuntos es verdadera:
    1. Si $A \subseteq B$ y $B \not\subseteq C$ entonces $A \not\subseteq C$
    2. Si $a \in A$ y $A \in B$ entonces $\{a\} \in B$
    3. Si $a \in A$ y $A \subseteq B$ entonces $\{\{a\}\} \subseteq \mathcal{P}(B)$
    4. Si $A \in B$ y $A \subseteq B$ entonces $A = \phi$

    Solución:
    (1) es falsa, por ejemplo para $A = \varnothing, B = \{1\}, C = \{2\}$.
    (2) es falsa por ejemplo para $A = \{a,b\}$ y $B = \{A\}$, pues $\{a\}$ no aparece en la lista de elementos de B.
    (3) es verdadera, pues $\{\{a\}\} \subseteq \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow \{a\} \subseteq B \Leftrightarrow a \in B$, lo cual es consecuencia de las hipótesis.
    (4) es falsa por ejemplo para $A = \{1\}$ y $B = \{\{1\}, 1\}$.

7. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos aplicaciones tales que $(g \circ f)(x) = 16x^2 - 1$ y $f(x) = 2x+3$. Entonces $g(x)$ es igual a

    a) $4x^2 - 24x + 35$ b) $8x^2 - 2$ c) $64x^2 + 192x + 143$ d) $32x^2 + 1$

    Solución: f es biyectiva y $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$. Por tanto $g(x) = ((g \circ f) \circ f^{-1})(x) = (g \circ f)(f^{-1}(x))) = (g \circ f)(\frac{x-3}{2}) = 16(\frac{x-3}{2})^2 - 1 = 4x^2 - 24x + 35$.

8. ¿Cuál de las siguientes definiciones de aplicación es incorrecta?
    1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = x^2 - 80x + 1500$,
    2. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = \frac{x(x+1)(x+2)}{3}$,
    3. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = (x+7)^2 - 13x$,
    4. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = \frac{x(x+5)}{2}$.

    Indicación: Obsérvese que el producto de tres números naturales consecutivos es siempre múltipo de 3, y por otra parte que $x(x+5)$ es siempre un número par.

11. Sea $f : \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$ la aplicación definida por $f(a,b) = (b, 2a)$. El conjunto $f^*(\{(2,4)\})$ es igual a

    a) $\emptyset$ b) $\{(2,2)\}$ c) $\{(1,4)\}$ d) $\{(2,2),(2,5)\}$

    Solución: Tenemos $f^*(\{(2,4)\}) = \{(a,b) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6 \mid f(a,b) = (2,4)\}$. Por tanto $a \in \mathbb{Z}_3, b \in \mathbb{Z}_6$ y además $(b, 2a) = (2,4)$ en $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_6$, es decir, $b = 2$ en $\mathbb{Z}_3$ y $2a = 4$ en $\mathbb{Z}_6$. Estas dos últimas condiciones son $b \equiv 2 \mod 3$ y $2a \equiv 4 \mod 6$. Por tanto $b \in \{2,5\} \subseteq \mathbb{Z}_6$ y $a = 2 \in \mathbb{Z}_3$.

14. En $\mathbb{Z}$ definimos la relación de equivalencia $xRy \iff 9 \mid x^2 - y^2$. El cardinal de $\mathbb{Z}/R$ es

    a) 1 b) 4 c) 6 d) 9

    Solución: Vemos que $xRy \iff x^2 \equiv y^2 \mod 9$, es decir, $[x^2] = [y^2]$ en $\mathbb{Z}_9$. Por tanto hay tantas clases de quivalencia distintas como elementos distintos resulten al elevar los elementos de $\mathbb{Z}_9$ al cuadrado. Como $[0^2] = [0], [1^2] = [1], [2^2] = [4], [3^2] = [0], [4^2] = [7], [5^2] = 7, [6^2] = [0], [7^2] = [4], [8^2] = [1]$, deducimos que el conjunto cociente consta de cuatro clases de equivalencia.

18. Dada la aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ definida por $f(n) = \frac{n}{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces:
    1. f es sobreyectiva y no es inyectiva.
    2. f es inyectiva y no es sobreyectiva.
    3. f es biyectiva.
    4. f no es inyectiva ni sobreyectiva.

    Solución: f no es sobreyectiva, pues entre muchas razones válidas podemos decir que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \geq 0$, con lo cual $-1 \in \mathbb{Q}$ carece de preimagen en $\mathbb{N}$. Por otra parte, f sí es inyectiva: $f(n) = f(m) \ \Rightarrow\ \frac{n}{2n+1} = \frac{m}{2m+1} \ \Rightarrow\ n = m$.

21. Sea R la relación binaria definida en $\mathbb{Z}_8$ como $a\ R\ b$ si y sólo si existe $x \in \mathbb{Z}_8$ tal que $a \cdot x = b$. Entonces
    1. R es una relación de equivalencia cuyo conjunto cociente consta de dos clases de equivalencia.
    2. R no es una relación de equivalencia ya que no se verifica la propiedad transitiva.
    3. R es una relación de equivalencia cuyo conjunto cociente consta de cuatro clases de equivalencia.
    4. R no es una relación de equivalencia ya que no se verifica la propiedad simétrica.

    Solución: Expresado en otros términos, nos están diciendo que a está relacionado con b cuando a divide a b en $\mathbb{Z}_8$. La relación de divisibilidad verifica las propiedades reflexiva y transitiva. Sin embargo no se cumple la propiedad simétrica pues se verifica que $1R0$ pero no se verifica que $0R1$. Por tanto la respuesta correcta es la del apartado (4).