

Tema 10: Estadística de Fermi-Dirac

- Gas ideal de fermiones degenerado; energía de Fermi, potencial de Gibbs.
- Gas relativista muy degenerado.
- Enanas blancas: modelo de Chandrasekhar.
- Magnetismo y gas de Fermi (paramagnetismo de Pauli, diamagnetismo de Landau, efecto Hass-van Alphen).
- Propiedades del gas electrónico en metales; coeficientes de transporte.

Gas ideal de fermiones con fuerte degeneración; energía de Fermi, potencial de Gibbs.

Un caso interesante del gas ideal cuántico ocurre para bajas T 's y/o altas densidades n , o (como vimos en las lecciones anteriores), para

$$\delta = ng^{-1} \left(\frac{h^2}{2\pi mkT} \right)^{3/2} \gg 1.$$

Se dice que el gas está *fuertemente degenerado*, los efectos cuánticos se manifiestan con intensidad, y es necesario estudiar por separado los casos de fermiones y bosones; aquí nos interesa el gas de fermiones fuertemente degenerado.

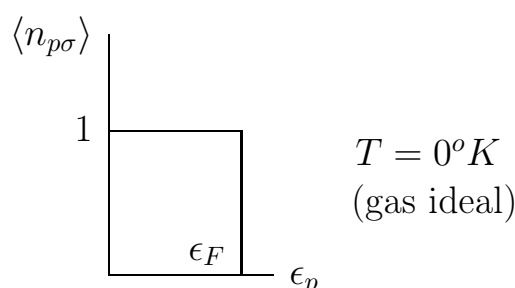
Si, con la densidad $n = \text{const}$, disminuimos T hacia $0^\circ K$, la distribución de fermiones tiende a minimizar la energía total, pero no pueden acumularse en los mismos estados por el principio de exclusión de Pauli, luego la distribución más favorable en $0^\circ K$ consistirá en la ocupación sucesiva de cada 'nivel' por g fermiones, empezando por el de mínima energía.

Energía de Fermi, ϵ_F : la del nivel más alto que se alcanza de este modo suponiendo que el gas es ideal. Todo los niveles por debajo de éste constituye el *mar de Fermi*.

En esta situación, el número medio de ocupación de los niveles es

$$\langle n_{p\sigma} \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} + 1} = \Theta(\epsilon_F - \epsilon_p) \quad \text{para} \quad \beta \rightarrow \infty \quad (T \rightarrow 0^\circ K), \quad (29)$$

con Θ la función paso de Heaviside:



Puesto que, para $\beta \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} + 1} = \begin{cases} 1 & \text{si } \epsilon_p < \epsilon_F \text{ y } \beta \rightarrow \infty \\ 0 & \text{si } \epsilon_p > \epsilon_F \text{ y } \beta \rightarrow \infty, \end{cases}$$

de modo que

$$\epsilon_p - \mu \quad \text{es} \quad \begin{cases} < 0 & \text{si } \epsilon_p < \epsilon_F \\ > 0 & \text{si } \epsilon_p > \epsilon_F, \end{cases}$$

se sigue necesariamente que la función $\mu(T)$ — es decir, la densidad de energía libre de Gibbs o potencial químico — tiene la propiedad:

$$\mu(T = 0^\circ K) = \epsilon_F$$

De la ecuación de estado para un gas ideal cuántico de fermiones:⁷⁰

⁷⁰Se sigue haciendo $x = \beta\epsilon$ en el resultado obtenido en una lección anterior:

$$n(T, \mu) = g\Lambda^{-3} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \frac{x^{1/2}}{\exp(x - \mu/kT) + 1}$$

$$\begin{aligned}
n &= \alpha \int_0^\infty d\epsilon \frac{\epsilon^{1/2}}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} = \alpha \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{1/2} \Theta(\epsilon_F - \epsilon_p) \\
&= \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \epsilon^{1/2} = \frac{2}{3} \epsilon_F^{3/2},
\end{aligned} \tag{30}$$

donde hemos usado el resultado (29) válido para $T \rightarrow 0^\circ K$ (es decir, suponemos n dada: N y V fijos). Se sigue que

$$n = 2^{5/2} \pi m^{3/2} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} g \frac{2}{3} \epsilon_F^{3/2} = \frac{g}{6\pi^2} \frac{(2m)^{3/2}}{\hbar^3} \epsilon_F^{3/2}$$

luego la energía de Fermi es

$$\epsilon_F = \left(\frac{6\pi^2}{g} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} n^{2/3} \tag{31}$$

y se tiene el **momento de Fermi**

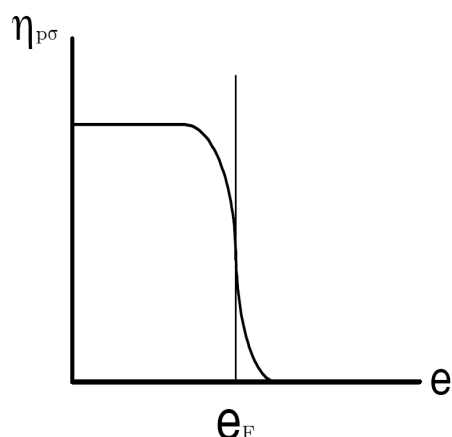
$$p_F \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_F}{2m}} = \left(\frac{6\pi^2}{g} \right)^{1/3} \hbar n^{1/3}$$

para el caso no relativista.⁷¹

Si T es pequeña, pero finita, algunos fermiones pueden absorber excitaciones térmicas para ‘abandonar el mar de Fermi’, es decir, tener energías por encima de ϵ_F .

⁷¹Es decir un gas de fermiones en el 0 absoluto es bastante energético; por el PP, el momento de cada fermión será grande, en general, lo que hace que el “gas de fermiones completamente degenerado” sea un buen modelo, al menos cualitativo, para algunas situaciones físicas, como vemos a continuación, es decir es un modelo con mucha física.

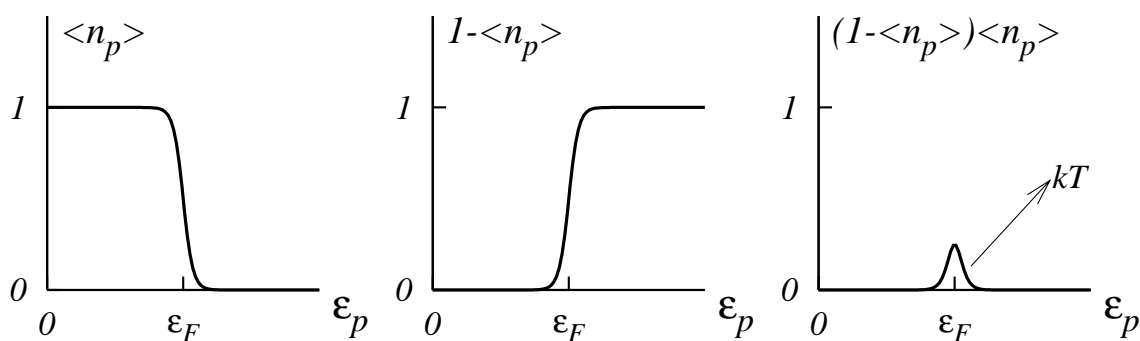
El número de ocupación $\langle n_{p\sigma} \rangle$ es entonces:⁷²



Notar que $1 - \langle n_{p\sigma} \rangle$ a T finita es como el reflejo de esta figura en ϵ_F , y que

$$\langle n_{p\sigma} \rangle (1 - \langle n_{p\sigma} \rangle) = \frac{\exp [\beta (\epsilon - \mu)]}{\{\exp [\beta (\epsilon - \mu)] + 1\}^2}$$

será una especie de gaussiana alrededor de ϵ_F con anchura de orden kT . Es decir, la función paso característica del $0^\circ K$ redondea las esquinas, y este producto sólo es distinto de cero en un estrecho dominio para T próxima a $0^\circ K$.



Para obtener las expresiones relevantes a T baja y finita hemos de buscar un desarrollo apropiado para la integral

⁷²La parte curvada en esta figura no es simétrica respecto de ϵ_F , como puede verse en las expresiones que obtenemos luego.

$$I = \int_0^{\infty} d\epsilon f(\epsilon) \frac{1}{\exp[\beta(\epsilon - \mu)] + 1}$$

donde $f(\epsilon)$ es arbitraria con $f(0) = 0$. A T 's suficientemente bajas (gases suficientemente degenerados) puede escribirse, por ejemplo (Sommerfeld):

$$I = \int_0^{\mu} d\epsilon f(\epsilon) + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 f'(\mu) + \frac{7\pi^4}{360} (kT)^4 f'''(\mu) + \dots, \quad (32)$$

donde las primas indican derivación. Vamos a verlo:

Demostración:

Integrando por partes:

$$I = \beta \int_0^{\infty} d\epsilon G(\epsilon) \frac{\exp[\beta(\epsilon - \mu)]}{\{\exp[\beta(\epsilon - \mu)] + 1\}^2}; \quad G(\epsilon) = \int_0^{\infty} d\eta f(\eta).$$

Haciendo $\epsilon - \mu = x$, y luego $\beta x = y$:

$$I = \beta \int_{-\mu}^{\infty} dx G(x + \mu) \frac{e^{\beta x}}{(e^{\beta x} + 1)^2} = \int_{-\beta\mu}^{\infty} dy G\left(\frac{y}{\beta} + \mu\right) \frac{e^y}{(e^y + 1)^2}.$$

Suponiendo que $G(\epsilon)$ no varía apreciablemente en un rango de energía $\sim kT$, puede desarrollarse alrededor de $\epsilon = \mu$ (recordar la forma de $\langle n_{p\sigma} \rangle (1 - \langle n_{p\sigma} \rangle)$ a bajas T 's), y se tiene:

$$I = \int_{-\beta\mu}^{\infty} dy \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{y^n}{\beta^n} G^{(n)}(\mu) \frac{e^y}{(e^y + 1)^2}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{\beta^n} G^{(n)}(\mu) \int_{-\infty}^{\infty} dy y^n \frac{e^y}{(e^y + 1)^2}$$

donde hemos reemplazado $-\beta\mu$ por $-\infty$ puesto que estamos a bajas T 's ($\beta \rightarrow \infty$) y el error es exponencialmente pequeño. Notamos ahora que el cociente de exponenciales en el integrando es una función par,⁷³ luego sólo las potencias pares de y contribuyen,⁷⁴ y puede ponerse

$$I = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n)!} \frac{1}{\beta^{2n}} G^{(2n)}(\mu) 2 \int_0^{\infty} dy y^{2n} \frac{e^y}{(e^y + 1)^2}.$$

Para $n = 0$, es $\int_0^{\infty} dy \frac{e^y}{(e^y + 1)^2} = \frac{1}{2}$ y, para $n > 0$, se tiene integrando por partes:

$$\int_0^{\infty} dy y^{2n} \frac{e^y}{(e^y + 1)^2} = 2n \int_0^{\infty} dy y^{2n-1} (e^y + 1)^{-1}$$

$$= 2n (1 - 2^{1-2n}) (2n - 1)! \zeta(2n)$$

$$= (2^{2n-1} - 1) \pi^{2n} |B_{2n}|$$

donde B_n son los números de Bernoulli.⁷⁵

Finalmente,

$$I \simeq \int_0^{\mu} d\epsilon f(\epsilon) + \sum_{n \geq 1} \frac{2}{(2n)!} (2^{2n-1} - 1) \pi^{2n} |B_{2n}| (kT)^{2n} f^{(2n-1)}(\mu)$$

⁷³En efecto, cambiando $y \rightarrow -y$ en $e^y / (e^y + 1)^2$:

$$\frac{e^{-y}}{(e^{-y} + 1)^2} = \frac{e^{-y} e^{2y}}{(e^{-y} + 1)^2 e^{2y}} = \frac{e^y}{[(e^{-y} + 1) e^y]^2} = \frac{e^y}{(1 + e^y)^2}$$

⁷⁴La integral de una función impar en un intervalo simétrico es nula.

⁷⁵Aquí hemos utilizado la conocida relación $B_{2n} = \frac{(-1)^{n-1} (2n)!}{2^{2n-1} \pi^{2n}} \zeta(2n) \quad n \geq 1$.

cuyos primeros términos. producen (32) QED.

Haciendo $f(\epsilon) = \epsilon^{1/2}$, usando el resultado en la densidad $n = \alpha I_{1/2}$, y llevando esto a la expresión de ϵ_F , se tiene finalmente⁷⁶:

$$\epsilon_F = \mu \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 + \dots \right]^{2/3}$$

Pero $(1+x)^{-n} = 1 - nx + (2!)^{-1}n(n+1)x^2 - \dots$, luego, invirtiendo:

$$\mu = \epsilon_F \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 + \dots \right]^{-2/3} \simeq \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 + \dots \right]$$

de donde, haciendo $\mu \simeq \epsilon_F + \dots$, tenemos (indicando sólo hasta segundo orden en T):

$$\mu = \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right] \quad (33)$$

⁷⁶Haciendo $f(\epsilon) = \epsilon^{1/2}$:

$$\begin{aligned} I_{1/2} &= \int_0^\mu d\epsilon \epsilon^{1/2} + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \frac{1}{2} \mu^{-1/2} + \dots \\ &= \frac{2}{3} \mu^{3/2} + \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 \overbrace{\mu^2 \mu^{-1/2}}^{\mu^{3/2}} + \dots = \frac{2}{3} \mu^{3/2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

Usando esto en (31), $n = \alpha I_{1/2}$, y llevando el resultado a la expresión de ϵ_F , (31), es

$$\epsilon_F = \left(\frac{6\pi^2}{g} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} \overbrace{\left[\frac{2^{5/3} \pi^{2/3} m g^{2/3}}{h^2} \right]}^{\alpha^{2/3}} \left(\frac{2}{3} \right)^{2/3} \mu \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\mu} \right)^2 + \dots \right]^{2/3}$$

de donde se sigue lo indicado en el texto.

que es un desarrollo válido para bajas temperaturas.

Otra información termodinámica se sigue de aquí y de la ecuación $P = P(T, \mu)$ que habíamos derivado antes. Por ejemplo, Recordando que es $P = \frac{2}{3}\tilde{u}$ para todo gas ideal no-relativista⁷⁷, se obtiene⁷⁸ que, a T 's bajas, el calor específico por partícula es

$$C_V = \frac{1}{n} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial T} \right)_n = \frac{\pi^2 kT}{2 \epsilon_F} k,$$

es decir, $C_V \sim T$ para $T \rightarrow 0^\circ K$, que es comportamiento típico de fermiones.⁷⁹

⁷⁷ $\tilde{u} = U/V$ es la densidad de energía. En efecto

$$\tilde{u} = U/V = \frac{TS - PV + \mu N}{V} = T\tilde{s} - P + \mu n$$

pero $P = B(T)I_{3/2}$ (ecuación 26) luego derivando respecto a T sale $\tilde{s} = S/V = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial PV}{\partial T} \right)_{\mu, V} = \frac{P}{T} + \frac{3}{2} \frac{P}{T} - \mu \frac{n}{T}$ donde para el tercer término hemos usado la expresión de $n = \left(\frac{\partial P}{\partial \mu} \right)_T$ en función de μ y T . De ahí se sigue el resultado $\tilde{u} = \frac{3}{2}P$. Se tiene $P = \frac{1}{3}\tilde{u}$ si el gas ideal es relativista.

⁷⁸En efecto, se tiene:

$$\tilde{u} = \frac{3}{5}n\epsilon_F \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right]$$

de donde, a T 's bajas, se sigue el calor específico indicado

⁷⁹De hecho vimos que para fonones (que son bosones) a T bajas el C_V iba como T^3 .

Aplicación del gas de fermiones muy degenerado

- Gas relativista muy degenerado.
- Enanas blancas: modelo de Chandrasekhar.

Introducción

La primera aplicación de la teoría de Fermi fuertemente degenerado es debida a R.H. Fowler (1926)⁸⁰ que trata de explicar los distintos tipos de evolución que han podido tener distintos tipos de estrellas partiendo de la hipótesis de que se establece un estado de equilibrio en su interior. Este desarrollo es completado por Chandrasekhar (1939, Nobel 1983); con la adición de algunos hechos más recientes, es todavía una descripción válida.⁸¹

En la segunda parte de esta (sub)lección revisamos la aplicación del modelo de gas de Fermi degenerado y otros para comprender propiedades de un conjunto de electrones en materiales.

Estrellas enanas blancas

A la hora de estudiar la evolución estelar remarcamos que la observación del sistema juega aquí un papel más difícil que en otros estudios científicos:

⁸⁰no confundir con el Nóbel W.A. Fowler.

⁸¹S. Chandrasekhar, *Introduction to the Study of Stellar Structure*, Univ. of Chicago Press, Chicago 1939; *Principles of Stellar Dynamics*, Dover Pub., NY 1960 (existe un 'Dover paperback', versión reducida de 1957).

Otras referencias interesantes:

R.J. Tayler, *Stellar Evolution*, Rep. on Progr. in Physics **31**, 167 (1968)

J. Nuckolls *et al*, *Laser-induced thermonuclear fusion*, Physics Today, August 1973, p. 46

Huang p. 230; Pathria p. 243

W. Herbst & G.E. Assousa, *Supernovas and Star Formation*, Sci. Am. **241**, 138 (1979)

H.A. Bethe, *Supernova Mechanisms*, Rev. of Modern Physics **62**, 801 (1990)

- la escala temporal característica para las variaciones en las propiedades del Sol es de miles de millones de años,
- observaciones como las relacionadas con novas, supernovas, etc. podrían ser accidentes más que etapas de una evolución estándar, etc.

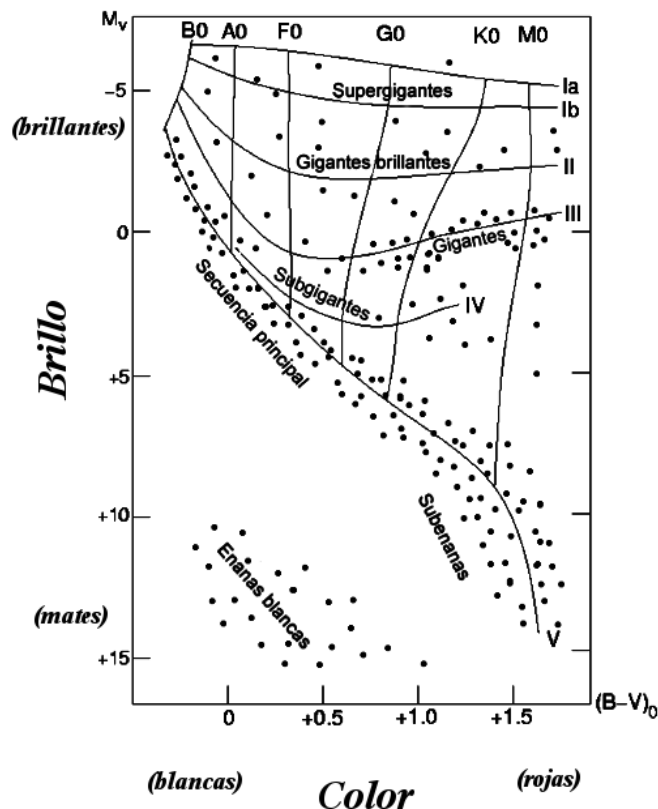
pero hay observaciones, como el **esquema de Hertzsprung-Rusell**(HR), a las que se les atribuye un gran valor indicativo del proceso seguido por una estrella típica:

El diagrama HR está caracterizado por dos parámetros:

- **Brillo** (ej., como el log de la luminosidad real — la aparente medida en la Tierra corregida de la distancia a la estrella —) y
- **Color** (mediante un ‘índice de color’ — una relación entre medidas fotoeléctricas de radiación emitida en bandas bien definidas del espectro, ej. en zonas ultravioleta, azul y amarilla — que, en condiciones normales — si radiasen como cuerpos negros —, relacionado con T superficie estrella),

la mayor parte ($\sim 90\%$) pertenecen a una franja bien definida, **secuencia principal** que implica cierta proporcionalidad entre brillo y color (las blancas son brillantes, mientras que las rojizas son mates):

~ 10 % de excepciones:
 prescindiendo de otros
 detalles, estrellas gran
 radio + brillantes de lo
 que corresponde a su color
 rojo, y otras pequeño
 radio, gran densidad,
 mates para su color blanco



Cómo interpretar este diagrama: ¿El 90 % es siempre de la secuencia principal y por lo tanto unas difieren de otras en algo esencial que las posiciona en dicha secuencia, o bien las estrellas son parecidas y todas gastan el 90 % de su vida en la secuencia principal evolucionando desde gigante roja hasta enana blanca, etc? Ya Russell proponía — aceptando la sugerencia de Kelvin (1861) — que las estrellas evolucionan consecuencia (únicamente) de la energía gravitatoria liberada en un lento proceso de contracción (gigantes rojas → secuencia principal → enanas blancas). Aceptable en el modelo actual que, sin embargo, involucra mayor complejidad (otras fuentes de energía, particularmente fusión, contracción del núcleo acompañada de expansión de capas más exteriores, etc.): esencialmente, mediante sucesivos procesos de contracción gravitatoria, fusión, expansión debida a degeneración cuántica, etc, se puede pasar de gran nube de hidrógeno a pequeña enana blanca, supernova, estrella de neutrones, agujero negro:

De acuerdo con el el concepto observacional anterior, se admite la siguiente secuencia de evolución estelar:

- Nube de hidrógeno homogénea (las moléculas se mueven al azar). En un cierto momento se forma un núcleo más denso que vence el movimiento aleatorio de las moléculas y empieza un atracción gravitatoria. En este momento la nube inicial (transparente) se hace opaca y aparece una tendencia hacia el colapso gravitatorio, al principio rápido, y después más lento debido a la aparición de gradientes de presión que se oponen al colapso.
- Aumenta la temperatura dentro del núcleo por bombardeo de partículas que son aceleradas gravitatoriamente hacia el núcleo. A la temperatura de 10^5 se produce la ionización del H. El e^- exterior salta. El núcleo es entonces un gas mezcla de protones y electrones.
- Sigue la concentración y aumentando la temperatura hasta los 10^7 momento en el que la colisión entre protones es tan violenta que se vence la repulsión culombiana y aparecen las interacciones fuertes originando la fusión nuclear $H \Rightarrow He$, que es un proceso muy exotérmico donde se emiten muchos fotones y neutrinos (que no colapsan gravitatoriamente), la estrella se hace muy brillante (visible). Es una fase estable con una gran emisión de energía y la estrella pasa la mayor parte de su vida.
- Como consecuencia de la presión de radiación, las capas más externas tienden a expandirse y aparecen como más rojizas (más frías) pero muy luminosas dando lugar a una gigante roja, pues consecuencia de la expansión alcanzan un gran tamaño. (Betelgeuse). La evolución de este proceso depende mucho del tamaño de la estrella. Para tamaños grandes el proceso se acelera, la estrella consume su combustible y muere antes
- Cuando se ha consumido todo el H se frena la expansión y vuelve la contracción y no hay nada que la detenga (no hay combustible nuclear) sólo He . Se tiene entonces una enana blanca (poco brillante)⁸²

⁸²Suponiendo que la masa y la temperatura son tales que no se pueden iniciar procesos de fusión de átomos de He

En este contexto se admite el siguiente **modelo idealizado de estrella enana blanca**:

- Temperatura central $T \approx 10^7$ K, a la que corresponde una energía térmica⁸³ $kT \approx 10^3$ eV, para la que todo el helio ha de estar prácticamente ionizado.
- Masa $M \approx 10^{33}$ gr
- Densidad de masa $\rho \approx 10^7$ gr/cm³. (Para el Sol, M y T son comparables, pero su densidad es $\rho \approx 1$ gr/cm³.)

Si suponemos que toda la masa M es de helio (2e+2p+2n), podemos suponerla formada por N electrones (de masa m) y $N/2$ núcleos de helio (de masa $2m_p + 2m_n \simeq 4m_p$),⁸⁴ y se tiene

masa:

$$M \simeq Nm + \frac{N}{2}4m_p = N(m + 2m_p) \simeq 2Nm_p,$$

densidad de electrones:

$$n = \frac{N}{V} \approx \frac{M/2m_p}{M/\rho} = \frac{\rho}{2m_p} = \frac{10^7 \text{ gr/cm}^3}{3/4 \times 10^{24} \text{ gr}} \sim \mathcal{O} \left(10^{30} \text{ electrones/cm}^3 \right),$$

momento de Fermi:

$$p_F = (3\pi^2 n)^{1/3} \hbar \approx 10^{10} \times 10^{-27} \sim \mathcal{O} (10^{-17} \text{ gr cm/s}),$$

energía de Fermi:

$$\epsilon_F = p_F^2/2m \sim \mathcal{O} (10^{-7} \text{ ergios}) = \mathcal{O} (10^5 \text{ eV}),$$

⁸³ $kT = (8,617385 \times 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}) \times (10^7 \text{ K}) = 862 \text{ eV}$

⁸⁴ $m_n = 1,67493 \times 10^{-27} \text{ kg} \approx m_p = 1,67262 \times 10^{-27} \text{ kg}; m_e = 9,10939 \times 10^{-31} \text{ kg} \ll m_p$

y temperatura de Fermi:

$$T_F \equiv \epsilon_F/k \sim \mathcal{O}(10^{10} \text{ K})$$

Consecuencias: Puesto que

- p_F es comparable al momento ($mc \simeq 9 \times 10^{28} \text{gr} \times 3 \times 10^{10} \text{cm/s} \approx 10^{-17} \text{gr cm/s}$) del electrón, y ϵ_F es comparable a la energía en reposo mc^2 del electrón, se sigue que la **dinámica de los electrones en la EEB es relativista**;
- aunque T está muy por encima de las temperaturas típicas en la Tierra, es muy inferior a la de Fermi ($T_F/T \sim 10^3$), de modo que el **gas de electrones está fuertemente degenerado**.

Estos hechos sugieren:

modelo idealizado de EEB: gas de Fermi muy degenerado (es decir, en el estado fundamental) formado por N electrones relativistas que se mueven en el campo creado por $N/2$ núcleos de helio, supuestos sin movimiento, que proporcionan la cohesión gravitatoria;

así, los únicos efectos que esperamos son:

tendencia a la contracción gravitatoria hacia el centro de la estrella, presión hacia afuera debida al gran momento medio que tienen los electrones (*presión de degeneración*).

En una EEB tenemos un situación de equilibrio donde se compensan esas dos tendencias antagónicas.

Gas relativista de Fermi en el estado fundamental (es decir, completamente degenerado)

La energía (cinética) de una partícula relativista, usando θ sin dimensiones tal que $p \equiv mc \sinh \theta$:⁸⁵

$$\begin{aligned}\epsilon &= \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} - mc^2 = mc^2 \left\{ \left[1 + \left(\frac{p}{mc} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\} \\ &= mc^2 \left[(1 + \sinh^2 \theta)^{1/2} - 1 \right] = mc^2 (\cosh \theta - 1)\end{aligned}$$

y la velocidad:

$$u \equiv \frac{\partial \epsilon}{\partial p} = \frac{2pc^2}{2\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}} = c \frac{p/mc}{\sqrt{1 + (p/mc)^2}} = c \tanh \theta$$

Y, **en el cero absoluto**, la energía total del gas (suponiendo degeneración $g = 2$ — como para electrones —, y una descripción continua — sistema macroscópico) es⁸⁶

$$\begin{aligned}E_0 &= 2 \sum_{|\vec{p}| < p_F} \epsilon \simeq \frac{2V}{h^3} \int_0^{p_F} \epsilon 4\pi p^2 dp \\ &= \frac{8\pi V m^4 c^5}{h^3} \int_0^{\theta_F} \sinh^2 \theta (\cosh \theta - 1) \cosh \theta d\theta\end{aligned}$$

⁸⁵el momento de una partícula relativista con velocidad u es $p = \frac{mu}{\sqrt{1-(u/c)^2}} \equiv mu\gamma$ y la energía cinética $\epsilon = mc^2\gamma - mc^2$. De la definición de γ se tiene $(u\gamma)^2 = c^2(\gamma^2 - 1) = \frac{p^2}{m^2}$. De esta última expresión multiplicando por c^2 se tiene $m^2c^4\gamma^2 = p^2c^2 + m^2c^4$. tomando raíz cuadrada y sustituyendo en la expresión de ϵ da el resultado requerido.

⁸⁶En espacio de momentos, para una partícula en una caja, la ec. de Dirac tiene la misma solución que la de Schrödinger, luego la densidad de estados para un gas relativista es la misma que para el caso no-relativista.

y la presión (**presión de degeneración**):⁸⁷

$$\begin{aligned} P_0 &\equiv \frac{1}{3V} \langle p u \rangle_0 = \frac{2}{3h^3} \int_0^{p_F} p u 4\pi p^2 dp = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_F} u p^3 dp \\ &= \frac{8\pi m^4 c^5}{3h^3} \int_0^{\theta_F} \sinh^4 \theta d\theta \end{aligned}$$

Usando las definiciones

$$x \equiv \sinh \theta_F = \frac{p_F}{mc} = (3\pi^2 n)^{1/3} \frac{\hbar}{mc}, \quad (34)$$

$$A(x) = x(2x^2 - 3) \sqrt{x^2 + 1} + 3 \sinh^{-1} x$$

88

$$B(x) = 8x^3 \left(\sqrt{x^2 + 1} - 1 \right) - A(x)$$

se tiene

$$P_0 = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3} A(x), \quad E_0 = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3} V B(x) \quad (35)$$

⁸⁷Puede obtenerse $P_0 = -\partial E_0 / \partial V$ notando que θ_F (tq $p_F \equiv mc \sinh \theta_F$) depende de V ; de hecho, p_F puede definirse: $2 \frac{V}{h^3} \left(\frac{4}{3} \pi p_F^3 \right) = N$. Alternativamente, recuérdese que

$$P \equiv \frac{1}{3} \rho \langle u u \rangle = \frac{1}{3} \frac{M}{V} \langle u u \rangle = \frac{1}{3} \frac{Nm}{V} \langle u u \rangle = \frac{1}{3} \frac{N}{V} \langle p u \rangle$$

para el caso no-relativista y que, para el relativista, todavía puede escribirse

$$P = \frac{1}{3} \frac{N}{V} \langle p u \rangle$$

aunque ahora es $p \neq mu$ ($p = mc \sinh \theta \neq mu = mc \tanh \theta$). En el cero absoluto,

$$\langle p u \rangle_0 = \frac{2 \sum_{|\vec{p}| < p_F} p u}{2 \sum_{|\vec{p}| < p_F} 1} = \frac{2V}{h^3} \frac{\int_0^{p_F} p u 4\pi p^2 dp}{N}$$

de donde se sigue la expresión indicada.

⁸⁸aquí $\sinh^{-1} x$ es el arcsenh x .

El comportamiento asintótico de las funciones $A(x)$ y $B(x)$ es:

$$A(x) = \begin{cases} \frac{8}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \frac{1}{3}x^9 - \frac{5}{22}x^{11} + \dots, & x \ll 1 \\ 2x^4 - 2x^2 + 3 \left(\ln 2x - \frac{7}{12} \right) + \frac{5}{4x^2} + \dots, & x \gg 1 \end{cases} \begin{cases} \text{no relativ.} \\ mc \gg p_F \\ \text{relativista} \\ mc \ll p_F \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} \frac{12}{5}x^5 - \frac{3}{7}x^7 + \frac{1}{6}x^9 - \frac{15}{176}x^{11} + \dots, & x \ll 1, \text{ no relativ.} \\ 6x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 3 \left(\ln 2x - \frac{1}{4} \right) + \frac{3}{4x^2} + \dots, & x \gg 1, \text{ relativista} \end{cases}$$

La ecuación (35) establece una relación funcional entre P_0 y el radio R de la EEB, supuesta esférica.⁸⁹ El resultado es que, para una masa M dada, P_0 aumenta rápidamente al disminuir R , tanto si la estrella es relativista como si no. Podemos entonces preguntarnos por el estado en el que se compensa P_0 con la presión debida a la fuerza gravitatoria, si esto es posible. La condición es⁹⁰:

⁸⁹En efecto, puesto que x depende del volumen de la estrella —ver (34)—, se tiene: $P_0 = P_0(n) = \tilde{P}_0(V) = \hat{P}_0(R)$. La forma de la función se representa en Huang p.234, donde también hay más detalles.

⁹⁰En efecto, el gas uniforme de fermiones (es decir, la estrella) ejerce una presión $P_0(n)$ sobre las ‘paredes’ que implica un trabajo:

$$\int_{\infty}^R P_0 4\pi r^2 dr;$$

es decir, una caja o un ‘agente externo’ tienen que hacer el negativo de este trabajo para comprimir la estrella desde un estado de densidad cero hasta un estado de densidad finita (suponemos una esfera de radio R).

Es claro que este ‘agente externo’ es la interacción gravitatoria en la propia estrella, que origina una energía de la forma $-\alpha GM^2/R$.

Si R es el radio de equilibrio, esta energía ha de compensar el trabajo hecho al comprimir la estrella, de donde se sigue el resultado (36).

Notar que escribimos $-\alpha GM^2/R$ para conseguir las dimensiones correctas: el sistema estrella sólo involucra una masa y una longitud. La teoría no permite determinar α que ha de ser $\alpha \sim \mathcal{O}(1)$ (no hay argumentos para esperar otra cosa); Galindo-Pascual escribe $\alpha = 3/5$. (Estrictamente hablando, (36) define α ; su contenido físico queda determinado por la hipótesis de que es del orden de la unidad.)

$$\int_{\infty}^R P_0 4\pi r^2 dr = -\alpha \frac{G M^2}{R} \quad (36)$$

con G la cte. de gravitación⁹¹ y $\alpha \sim \mathcal{O}(1)$. Derivando respecto de R :

$$P_0 = \frac{\alpha G M^2}{4\pi R^4}, \quad (37)$$

relación que caracteriza nuestro modelo de EEB.

La condición de EEB, (37), ha de completarse con la dependencia $P_0(R)$. Veamos casos explícitos:

- Si la T del gas de fermiones fuese mucho mayor que la de Fermi (es decir, $T \gg 10^{10}$ K), el sistema puede aproximarse por el gas (clásico) de Boltzmann, esto es, $P_0 = nkT$, y se sigue

$$R = \frac{2}{3}\alpha M \frac{G m_p}{kT}.$$

pues $M \simeq 2Nm_p$, y hemos usado $n = \frac{N}{V} = \frac{M/2m_p}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3M}{8\pi m_p R^3}$.

Este caso puede usarse para comparar pero, por supuesto, no es aplicable a las EEB donde $T \sim 10^7$ K.

- En el caso no-relativista ($x \ll 1 \implies R \gg 10^8$ cm,⁹² esto es, baja densidad para M dada), tenemos $A(x) \simeq \frac{8}{5}x^5$, de donde

⁹¹ $G = 6,67259 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

⁹²En efecto, recordemos (34):

$$x = \frac{p_F}{mc} = \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{1/3} \frac{\hbar}{mc} \quad (38)$$

de donde se sigue con facilidad que

$$x \left\{ \begin{array}{l} \ll \\ \sim \\ \gg \end{array} \right\} 1 \implies R \left\{ \begin{array}{l} \gg \\ \sim \\ \ll \end{array} \right\} 10^8 \text{ cm} \implies \left\{ \begin{array}{l} \text{caso no relativista} \\ \text{caso relativista} \end{array} \right.$$

$$P_0 \simeq \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3} \frac{8}{5} x^5 \stackrel{(34)}{\propto} n^{5/3} \stackrel{(38)}{\propto} \frac{M^{5/3}}{R^5}.$$

Usando esto en la condición (37):

$$R \simeq \frac{3(9\pi)^{2/3}}{40\alpha} \frac{\hbar^2}{G m m_p^{5/3} M^{1/3}} \propto M^{-1/3}$$

(donde es notable el cambio cualitativo respecto del caso clásico arriba).

- Si son importantes los efectos relativistas ($x \gg 1 \implies R \ll 10^8$ cm, esto es, altas densidades), $A(x) \simeq 2x^4 - 2x^2$, y se tiene:

$$R \simeq \frac{\sqrt[3]{9\pi}}{2} \frac{\hbar}{mc} \left(\frac{M}{m_p}\right)^{1/3} \sqrt{1 - \left(\frac{M}{M_0}\right)^{2/3}} \propto M^{1/3} \sqrt{1 - \left(\frac{M}{M_0}\right)^{2/3}},$$

con la constante (con dimensiones de masa).

$$M_0 = \frac{9}{64} \left(\frac{3\pi}{\alpha^3}\right)^{1/2} \frac{(\hbar c/G)^{3/2}}{m_p^2}.$$

Conclusión:

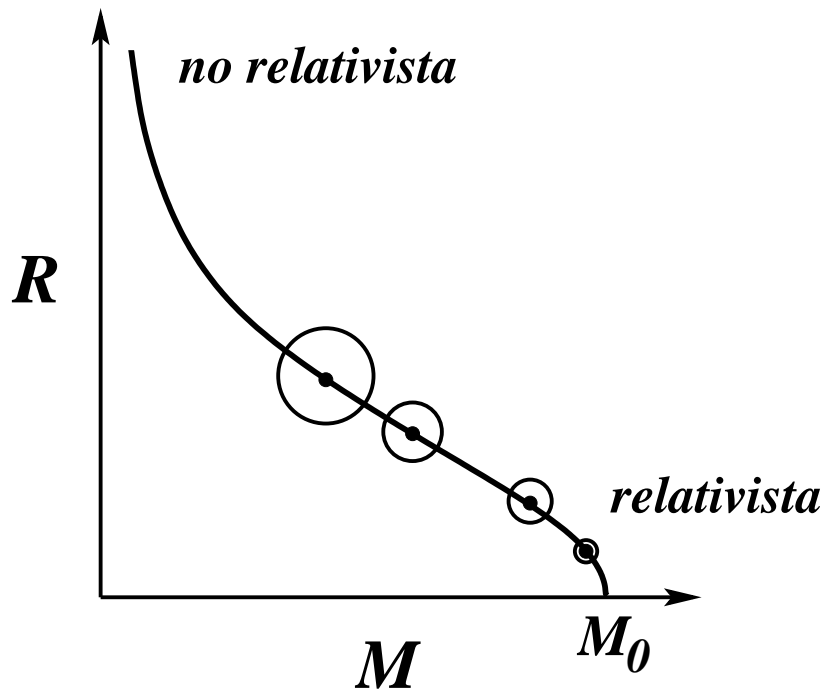
- el tamaño de una EEB, definida como se indicó, disminuye al aumentar su masa (las pequeñas son más densas),⁹³ tanto si el gas es relativista como si no;
- no es posible tener una EEB con $M > M_0$ (la ec. de equilibrio no tiene soluciones reales).

M_0 es el *límite de Chandrasekhar*; resulta $M_0 \approx 10^{33}$ gr.

La teoría no puede precisar más pues se desconoce α .

Chandrasekhar llegó a estimar $M_0 = 5.75 (\mu_e)^{-2} M_\odot$, donde

⁹³Esto es consecuencia de dos efectos: por ser más pequeñas les corresponde mayor masa y también menor volumen.



$M_{\odot} \simeq 2 \times 10^{33}$ gr es la masa del Sol

μ_e es el grado de ionización del gas.

En la práctica, $\mu_e \simeq 2$, luego se sigue $M_0 \simeq 1.44M_{\odot}$.

No se tiene noticia de la existencia de EEB mayores.

Según la teoría, la presión de degeneración P_0 consecuencia del PP no es suficiente para contrarrestar la tendencia al colapso gravitacional si $M > M_0$, y el sistema sigue evolucionando (ver referencias indicadas).

Conclusiones

- Dependencia de R de la EEB con $M \Rightarrow$ Las más pequeñas son las más densas.
- El hecho de que el gas sea relativista o no, no aparta nada importante cualitativamente.

Chandrasekhar in the 1930s. (Photo courtesy of S. Chandrasekhar.)



- Hay efectos cuánticos importantes \Rightarrow alta degeneración.
- No es posible tener una EEB con $M > M_0$ pues no hay solución para R . Si $M > M_0$ la presión de degeneración no es suficiente para evitar el colapso gravitacional por esto no tiene soluciones reales

Hipótesis simplificatorias

- Nuestro modelo es un sistema de fermiones relativista muy degenerado. Hemos supuesto que los núcleos de He se encuentran en reposo y que por tanto su movimiento no va a influir en la dinámica del sistema. Sin embargo las temperaturas son tan altas que la energía cinética de estos núcleos será muy alta luego modelos más realistas deben incluir el efecto del movimiento de los núcleos.

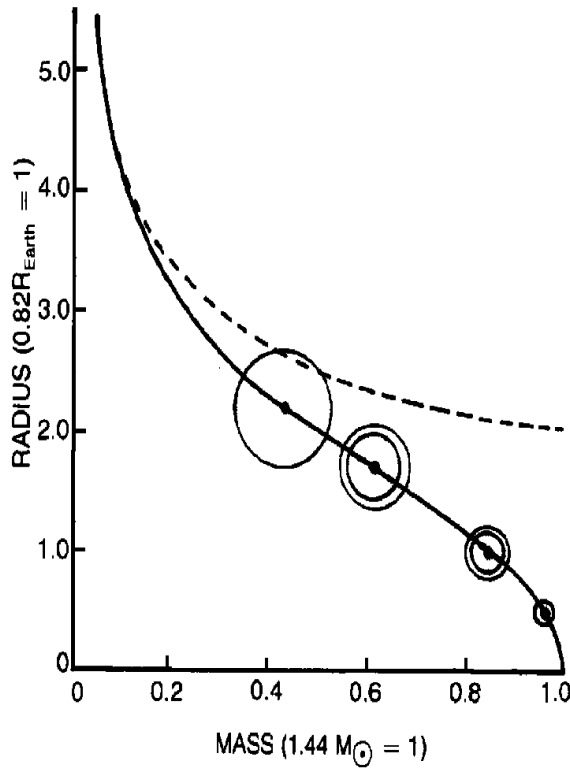


Figura 1: Masa versus radio. La curva discont. se sigue de las consideraciones de degeneración no-relat. de Fowler: el radio para la configuración de equilibrio disminuye, pero sólo se hace cero para masa infinita. En este caso, una estrella de cualquier masa puede confortablemente equilibrarse en el estado EEB. Esto no ocurre para configuraciones completamente degeneradas. (Dibujo del propio Chandrasekhar.)

- Tampoco se ha incluido las posibles interacciones en nuestro sistema, por ejemplo, que dan lugar a pares $e^-e^+ \xrightarrow{\text{decae}} \gamma, \nu$, que influyen en la dinámica de la estrella. También choques fotón- e^-2 , el decaimiento de los plasmones (ondas energéticas de los plasmas).
- Estos sistemas aunque muy masivos, sin embargo no impiden el escape de neutrinos, luego va a haber pérdidas energéticas grandes que no se han tenido en cuenta.
- También estamos suponiendo que la estrella es una esfera homogénea de masa pero experimentalmente se muestra una distribución no homogénea de de masa.
- Estamos suponiendo que el gas de e^- es ideal, que no lo es,

máxime cuando estamos viendo que la densidad es muy grande.

Quitando estas limitaciones se admite que la teoría de Chandrasekhar es válida hasta ahora, y que la evolución de una estrella depende de forma esencial de su masa, aunque se desconoce el mecanismo de esta dependencia. Se admiten además otros tipos de evolución:

- A Hay estrellas muy pequeñas con una densidad muy alta en el centro que contraresta el colapso. Esto ocurre si no se alcanza una temperatura para la que se inician otros procesos de fusión. Si esto no ocurre la presión de degeneración es tan grande que frena el colapso y la estrella acaba enfriándose poco a poco ($M = 0,09M_{\odot}$).
- B La estrella vive más si su masa es mayor pero por debajo del límite de Chandrasekhar. Esto no va a ser una situación estática pues hay una tendencia al colapso. En este proceso la temperatura sigue aumentando hasta llegar a una $T_c = 2 \times 10^8 K$, a la cual los núcleos de He empiezan a juntarse para formar núcleos de C que implica un proceso exotérmico que emite energía que puede superar la emisión superficial (estrella activa) hasta que se agota el He. En este momento colapsa, aumenta la densidad, aumenta la degeneración y aumenta la presión de degeneración frenando el colapso, acabando en una enana blanca y se enfría.
- C si la estrella tiene una masa mayor que la del sol, sigue la concentración de masa y sigue aumentando la temperatura interior hasta que llega a $6 \times 10^8 K$ donde comienzan nuevos procesos de fusión, formándose átomos más pesados hasta que se agota el combustible nuclear, y empieza de nuevo el colapso. Pero ahora tenemos nada más que átomos de hierro que difícilmente se combinan. La presión de degeneración no puede entonces frenar el colapso y colapsa el centro de la estrella y las capas exteriores explotan hacia fuera (explosión de supernova) (ver figura) mientras que el centro se hace cada vez más denso de forma que al final sólo nos quedan neutrones. La explosión de las capas más externas se hace a una veloci-

dad muy grande. Estos procesos son bastantes corrientes. En el siglo pasado se han fotografiado unas 50 supernovas.

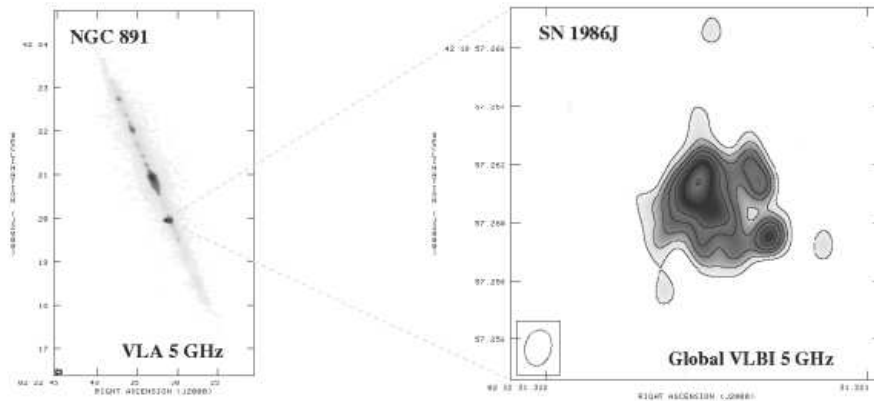


Figura 2: [2] Supernova 1986J en la galaxia NGC891. Extraordinariamente luminosa se estima que la explosión ocurrió a finales de 1982 (incertidumbre de 8 meses). La estrella madre tenía probablemente una masa 20 ó 30 veces la del Sol. Se expande con velocidad media inferior a unos 15.000 km/s

Cuando las ondas de choque se desplazan por el universo se encuentran zonas no homogéneas que se deforman llegando a envolver zonas de gases interestelares comprimiéndolos y dando lugar a nuevas estrellas en las cuales se encuentran todos los elementos. En 1054 en la nebulosa cangrejo se describe una de las primeras supernovas descritas. Hoy se encuentra en esa zona del espacio una nube de gas interestelar que se desplaza a una velocidad de unos 1000km/seg ; retrotrayéndonos en el tiempo con esta velocidad se obtiene la fecha de la explosión (1054).

Las estrellas de neutrones (el núcleo residual de la supernova) son muy pequeñas y son miles de millones de veces más pesadas que las enanas blancas. Estas estrellas de neutrones giran muy rápidamente y como hay campos magnéticos muy intensos se emite una de frecuencia muy grande que se llama pulsar. Para las estrellas de neutrones la velocidad ecuatorial ha de ser el 13% de la velocidad de la luz por $R \sim 10\text{km}$ y una densidad miles de millones de veces mayor que la densidad de las enanas blancas. Las estrellas de neutrones son inestables y se piensa que siguen contrayéndose colapsando y dando lugar a los agujeros negros.

“Estuve preocupado por la posibilidad de inteligencia extraterrestre”

J. S. Santander “Estaba enormemente preocupado”, reconocía el otro día Anthony Hewish, el descubridor de los púlsares. “Si aquello eran realmente señales de seres inteligentes extraterrestres, ¿qué debía hacer yo como científico?: ¿hacerlo público?, ¿devolver el mensaje de radioseñales, diciéndoles ‘eh, estamos aquí’, con el riesgo de que los emisores tuvieran en su planeta graves problemas demográficos o de otro tipo y vinieran a conquistarnos?”.

Hewish recuerda ahora sus tribulaciones sin perder su cortés sonrisa ni su flema británica, pero lo cierto es que en aquellos días se pasó tres semanas sin apenas dormir. “Tres semanas era el tiempo que necesitaba para determinar con precisión la procedencia de la señal. Si eran seres vivos, debían estar en un planeta, y la precisión de las señales era suficiente para determinar si sus movimientos orbitales eran los esperables de un planeta”. Hewish trabajó febrilmente,

tratando de corregir los efectos que sobre sus mediciones primia la propia rotación de Tierra. El resultado: la señal provenía de un planeta, sin la propia estrella pequeña, del púlsar.

“Por un lado, fue decepcionante”, admite Hewish, “por otro me sentí muy aliviado al saber que lo que tenía en manos era un mero descubrimiento científico y no una cuestión de política galáctica”. Recibió el Premio Nobel de Física en 1974 por su descubrimiento

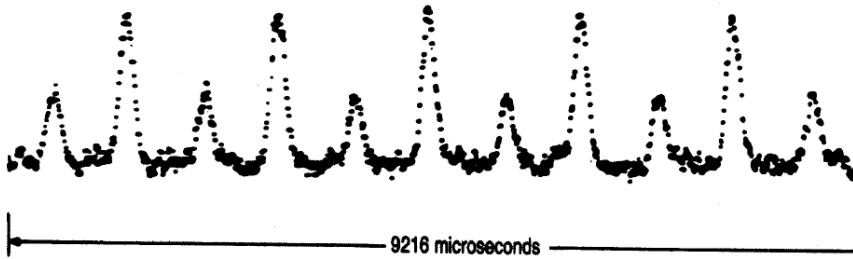
El País 4/9/96



Anthony Hewish (a la izquierda) y Joseph Taylor en Santander la pasada semana.

PABLO HC

Nobel 1974
ANTHONY HEWISH ► DESCUBRIDOR DE LOS PÚLSARES



Waveform of the pulsating radio signal from the millisecond pulsar recently discovered at Arecibo by Donald Backer and his colleagues. The full period of 1.558 milliseconds shows a primary peak separated from a secondary peak by about 180° . The two peaks presumably are from the opposite magnetic poles of the rapidly spinning neutron star. Most of the pulse width seen here is attributed to the signal-averaging instrumentation rather than the intrinsic signal.

PHYSICS TODAY / MARCH 1983

Otras aplicaciones del gas de electrones

- Magnetismo y gas de Fermi: paramagnetismo de Pauli, diamagnetismo de Landau, efecto Hass-van Alphen.
- Propiedades del gas electrónico en metales: calores específicos; efectos magnéticos; coeficientes de transporte, número de Lorentz.

Introducción

Las propiedades magnéticas de la materia son consecuencia esencialmente de los electrones (libres o ligados), de sus momentos magnéticos⁹⁴ luego el estudio de las propiedades magnéticas de un gas (ideal) de electrones es relevante en este contexto.

Electrones en presencia de un campo, tanto si son libres como si están ligados a los átomos, presentan dos efectos importantes conceptualmente distintos:

- tienden a describir órbitas (en un plano perpendicular al campo) cuantizadas, lo que origina **diamagnetismo**, caracterizado por susceptibilidad,

$$\chi \equiv \lim_{\mathcal{H} \rightarrow 0} \frac{\partial M_z}{\partial \mathcal{H}},$$

negativa; $\vec{M} = (M_x, M_y, M_x \equiv M_{\vec{\mathcal{H}}})$ es la magnetización con que responde el sistema al campo aplicado;

- sus espines tienden a alinearse con $\vec{\mathcal{H}}$, originando **paramagnetismo**, con $\chi > 0$.

⁹⁴El núcleo influye poco, salvo en formación de la ψ electrónica, pues resulta pesado para tener mm orbital apreciable y el intrínseco es unas 10^{-3} veces el del electrón.

(Además, si \mathcal{H} muy intenso y baja T , χ manifiesta comportamiento oscilatorio.)

Estos efectos coexisten en los sistemas reales, que manifiestan el resultado de la competencia, pero pueden imaginarse independientes (lo que simplifica su estudio) si la interacción espín-órbita es despreciable.

Otras aplicaciones del gas de electrones: Paramagnetismo de Pauli

El paramagnetismo “clásico” (es decir, en el contexto de la estadística de Maxwell-Boltzmann) se dice de Langevin. Suponiendo además que el momento intrínseco de la partícula puede ‘tomar cualquier orientación en el espacio’, que tampoco es realista, vimos (en la lección de magnetismo clásico) que la teoría de Langevin describe muy bien el comportamiento de muchas sustancias a T 's altas. Todavía mejora la situación suponiendo el espacio cuantizado en el sentido usual.

Se obtiene en este caso:

$$M_z = n\bar{\mu}B_J(x), \quad x \equiv \frac{\bar{\mu}\mathcal{H}}{kT}$$

con n =densidad de partículas, $\bar{\mu} = g\mu_B J$, g =factor de Landé, μ_B =magnetón de Bohr, $J = n^o$ cuántico de momento angular total, $B_J(x)$ =función de Brillouin.

Esto implica el comportamiento de χ fuertemente condicionado por T :

- (1): T 's altas, $\chi = \mathcal{C}/T$, con \mathcal{C} =cte. de Curie, de acuerdo con experimentos a T ‘suficientemente alta’;
- (2): T 's bajas: si x crece, $B_J(x) \rightarrow 1$, luego se tiende al estado de saturación magnética:

$$M_z = n\bar{\mu} = ng\mu_B J \implies \chi = 0$$

(pues la agitación térmica es despreciable, y casi todos los momentos magnéticos estarán orientados en dirección de $\vec{\mathcal{H}}$).

Pero la situación 2, a bajas T 's, no se observa en metales: con generalidad, el paramagnetismo se hace independiente de T (aunque sí depende de la densidad n) al ir disminuyendo la T . Tampoco se tiende al estado de saturación magnética.

Pauli (1927) explicó este desacuerdo como consecuencia de que los electrones de conducción de metales alcalinos constituyen un gas de Fermi muy degenerado. Incluso suponiendo que el gas es ideal, el resultado es entonces acorde con los datos.⁹⁵ Veámoslo:

El hamiltoniano de un electrón libre no-relativista en campo magnético externo, $\vec{\mathcal{H}}$ es

$$\frac{1}{2m} \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - \vec{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}$$

con $\vec{\mu}$ el operador momento magnético intrínseco del electrón (\propto operador de espín). El primer término origina diamagnetismo, como veremos luego. Para tener en cuenta la contribución paramagnética restante, sean N fermiones libres de espín $\hbar/2$ y energía

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} - \vec{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}}$$

En estas condiciones, $\vec{\mu}$ paralelo o antiparalelo a $\vec{\mathcal{H}}$, luego $\vec{\mu} \cdot \vec{\mathcal{H}} = \mu \sigma$.

⁹⁵El momento medio de los electrones es siempre muy alto, propiedad del gas de Fermi incluso en el 0 K, consecuencia del PP (tenemos como mucho que la mitad de los espines apuntan en la dirección del campo), por lo que no puede alcanzarse saturación magnética: si dos electrones están en el mismo estado, es imposible que tengan sus espines en la dirección $\vec{\mathcal{H}}$. Por lo tanto, ha de esperarse una susceptibilidad límite, χ_0 , que será independiente de T aunque probablemente con fuerte dependencia en la densidad del gas (ϵ_F).

$\vec{\mathcal{H}}$ (donde los valores propios de $\vec{\sigma} \cdot \vec{\mathcal{H}}$ son $\sigma\mathcal{H}$ con $\sigma = \pm\frac{1}{2}$) y pueden distinguirse dos tipos de partículas en el gas con energía respectivas

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} \pm \bar{\mu}\mathcal{H} \quad \begin{cases} -\text{paralelos} \\ +\text{antiparalelos} \end{cases}$$

y procede estudiar esta ‘mezcla’:

Sin necesidad de llegar a hacer un tratamiento general, podemos concluir acerca de los caso extremos de mayor interés:⁹⁶

◦ en el **cero absoluto**,

$$\text{e. total} \quad \epsilon \leq \epsilon_F$$

$$\text{e. cinética} \quad 0 \leq \frac{p^2}{2m} \leq (\epsilon_F \pm \bar{\mu}\mathcal{H})$$

$$\text{momento} \quad 0 \leq p \leq [2m(\epsilon_F \pm \bar{\mu}\mathcal{H})]^{1/2}$$

donde ahora (+) es para paralelos y (-) para antiparalelos Así, el # partículas de cada tipo (# estados ocupados en el cero absoluto) viene dado en función de los parámetros del sistema como:⁹⁷

$$N^\pm = \frac{4\pi}{3} \frac{V}{h^3} [2m(\epsilon_F \pm \bar{\mu}\mathcal{H})]^{3/2}$$

de donde el momento magnético del gas en $0^\circ K$ es

$$M = \bar{\mu}(N^+ - N^-) = \frac{4\pi\bar{\mu}V(2m)^{3/2}}{3h^3} [(\epsilon_F + \bar{\mu}\mathcal{H})^{3/2} - (\epsilon_F - \bar{\mu}\mathcal{H})^{3/2}]$$

⁹⁶En el átomo de T-F, escribíamos que la máx energía de un electrón en el nivel de Fermi es $\epsilon_{máx} = \epsilon_F - e\varphi$, mientras que aquí escribimos $\epsilon_{máx} = \epsilon_F = p^2/2m \pm \bar{\mu}\mathcal{H}$. Esto es, un factor externo (\mathcal{H}) cambia el nivel de Fermi, mientras que el interno φ debido al núcleo no lo cambia. (De hecho, ϵ_F la tenemos definida para un sistema sin interacciones mutuas, y φ las contiene.)

⁹⁷Recordad que, puesto que los valores propios del momento son $p_x = (h/L)n_x$, con $n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, a cada celda de una red cúbica le corresponden $L^3/h^3 = V/h^3$ estados. Luego $N = \sum_{p^\pm} 1 \Rightarrow N^\pm = \frac{V}{h^3} \int d\vec{p} = \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{p^\pm} p^2 dp$, que da el resultado requerido.

que implica la susceptibilidad por unidad de volumen:⁹⁸

$$\begin{aligned}\chi_0 &= \lim_{\mathcal{H} \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \mathcal{H}} \left(\frac{M_z}{V} \right) \\ &= \frac{4\pi\bar{\mu}V(2m)^{3/2}}{3h^3} \lim_{\mathcal{H} \rightarrow 0} \left\{ \frac{3}{2} \bar{\mu} \left[(\epsilon_F + \bar{\mu}\mathcal{H})^{1/2} + (\epsilon_F - \bar{\mu}\mathcal{H})^{1/2} \right] \right\} \\ &= \frac{4\pi\bar{\mu}V(2m)^{3/2}}{h^3} \epsilon_F^{1/2} = \frac{3}{2} \bar{\mu}^2 \frac{n}{\epsilon_F}\end{aligned}$$

que no depende de la temperatura, sólo de la densidad y de ϵ_F y por lo tanto el PP da un límite inferior a la susceptibilidad como en experimentos reales.

- o a **temperaturas altas**, sin embargo, sistema se comporta como gas de Boltzmann (estadística de Maxwell-Boltzmann), y se sigue lo obtenido ya en contexto de paramagnetismo de Langevin, es decir, $M_z = N (\bar{\mu}^2/3kT) (1 + 1/J) \mathcal{H}$ luego, para $J = \frac{1}{2}$, es $M_z = N\bar{\mu}^2\mathcal{H}/kT$, de donde:

$$\chi_\infty = \frac{n\bar{\mu}^2}{kT} = \frac{\mathcal{C}}{T}, \quad \mathcal{C} = n\bar{\mu}^2/k.$$

Termodinámica

Sea $n_p^\pm = \#$ partículas con momento \vec{p} cuyo momento magnético es paralelo (antiparalelo) al campo. La energía total del gas es

⁹⁸En la última igualdad aquí hemos usado que

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_F &= \left(\frac{6\pi^2}{g} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} n^{2/3} \\ g &= 2 \end{aligned} \right\} \implies \epsilon_F^{3/2} = \frac{6\pi^2}{g} \frac{\hbar^3}{(2m)^{3/2}} n \implies$$

$$\epsilon_F^{1/2} = \frac{n}{\epsilon_F} 3\pi^2 \frac{\hbar^3}{(2m)^{3/2}} = \frac{3}{2} \frac{n}{\epsilon_F} \frac{\hbar^3}{4\pi(2m)^{3/2}}$$

$$\begin{aligned}
E &= \sum_{\vec{p}} \left[\left(\frac{p^2}{2m} - \bar{\mu}\mathcal{H} \right) n_p^+ + \left(\frac{p^2}{2m} + \bar{\mu}\mathcal{H} \right) n_p^- \right] \\
&= \sum_{\vec{p}} \frac{p^2}{2m} (n_p^+ + n_p^-) - \bar{\mu}\mathcal{H} \sum_{\vec{p}} (n_p^+ - n_p^-) \\
&= \sum_{\vec{p}} \frac{p^2}{2m} (n_p^+ + n_p^-) - \bar{\mu}\mathcal{H} (N^+ - N^-)
\end{aligned}$$

y la función de partición se sigue de

$$Z = \sum_{\substack{N=N^++N^-=\sum_{\vec{p}} n_p^++\sum_{\vec{p}} n_p^- \\ n_p^\pm=0,1}} \exp(-\beta E)$$

que puede calcularse fijando N^+ (que fija $N^- = N - N^+$), sumando sobre todos los posibles n_p^\pm , y sumando sobre N^+ , desde $N^+ = 0$ hasta $N^+ = N$, es decir,

$$\begin{aligned}
Z &= \sum_{N^+=0}^N \left[e^{\beta\bar{\mu}\mathcal{H}(2N^+-N)} \left(\sum_{\substack{n_p^+ \\ (\sum n_p^+=N^+)}} e^{-\beta\sum_{\vec{p}} \frac{p^2}{2m} n_p^+} \right) \left(\sum_{\substack{n_p^- \\ (\sum n_p^-=N^-)}} e^{-\beta\sum_{\vec{p}} \frac{p^2}{2m} n_p^-} \right) \right] \\
&= e^{-\beta\bar{\mu}\mathcal{H}N} \sum_{N^+=0}^N \left[e^{2\beta\bar{\mu}\mathcal{H}N^+} Z_0(N^+) Z_0(N - N^+) \right]
\end{aligned}$$

donde

$$Z_0(\mathcal{N}) = \sum_{\substack{n_p=0,1 \\ (\sum n_p=\mathcal{N})}} e^{-\beta\sum_{\vec{p}} \frac{p^2}{2m} n_p} \equiv \exp[-\beta A_0(\mathcal{N})]$$

representa la función de partición de un gas ideal de Fermi de \mathcal{N}

partículas ‘**sin espín**’ de masa m , y $A_0(\mathcal{N})$ es la energía libre de este sistema ficticio.

Tomando logaritmos:

$$\frac{1}{N} \ln Z(N) = -\beta\bar{\mu}\mathcal{H} + \frac{1}{N} \ln \sum_{N^+=0}^N \underbrace{\exp [2\beta\bar{\mu}\mathcal{H}N^+ - \beta A_0(N^+) - \beta A_0(N - N^+)]}_{\equiv f(N^+)}$$

Las propiedades de la distribución $f(N^+)$ nos son familiares.⁹⁹ Se tiene

$$\frac{1}{N} \ln Z(N) = -\beta\bar{\mu}\mathcal{H} + \frac{1}{N} \ln f(\bar{N}^+)$$

donde \bar{N}^+ es el valor de N^+ que hace $f(N^+)$ máximo.

El número medio de part con espín paralelo en el estado de equilibrio, \bar{N}^+ , se sigue de la condición de máximo¹⁰⁰,

$$2\bar{\mu}\mathcal{H} - \left[\frac{\partial A_0(N^+)}{\partial N^+} \right]_{\bar{N}^+} - \left[\frac{\partial A_0(N - N^+)}{\partial N^+} \right]_{\bar{N}^+} = 0,$$

que equivale a¹⁰¹

$$\mu_0(\bar{N}^+) - \mu_0(N - \bar{N}^+) = 2\bar{\mu}\mathcal{H}$$

⁹⁹El logaritmo de esta suma es igual al logaritmo del término mayor salvo contribuciones de $\mathcal{O}(\ln N)$, luego despreciables para sistema macroscópico ($N \sim 10^{22}$) y en el límite-Termodinámico. De hecho, puede interpretarse el sistema en la macrocanónica debido a la $\sum_{N^+=0}^N$. En estas condiciones, hemos mostrado que la aproximación es rigurosamente válida para sistemas macroscópicos.

¹⁰⁰Puede comprobarse que esta ecuación sólo tiene una solución real entre 0 y N , que corresponde a un máximo.

¹⁰¹En efecto:

$$\frac{\partial A_0(N - N^+)}{\partial N^+} = \frac{\partial A_0(N - N^+)}{\partial(N - N^+)} \frac{\partial(N - N^+)}{\partial N^+} = -\frac{\partial A_0(N - N^+)}{\partial(N - N^+)}$$

con $\mu_0(\mathcal{N})$ el potencial químico del sistema ficticio.¹⁰²

Conocido $\overline{N^+}$, la magnetización se sigue ($\overline{N^-} = N - \overline{N^+}$) de

$$M = \bar{\mu} (\overline{N^+} - \overline{N^-}) \equiv \bar{\mu} N r, \quad (\text{con el parámetro } 0 \leq r \leq 1)$$

es decir,

$$\overline{N^+} = \frac{1+r}{2} N, \quad \overline{N^-} = \frac{1-r}{2} N,$$

y se tiene

$$\mu_0 \left(\frac{1+r}{2} N \right) - \mu_0 \left(\frac{1-r}{2} N \right) = 2\bar{\mu} \mathcal{H}$$

Para $\mathcal{H} = 0$, no hay dirección preferida por los espines, luego $M = 0$ y $r = 0 \implies$ si \mathcal{H} suficientemente pequeño, puede desarrollarse alrededor de $r = 0$ para escribir:

$$\begin{aligned} \mu_0 \left(\frac{N}{2} \right) + \left(\frac{1+r}{2} - \frac{1}{2} \right) \left[\frac{\partial \mu_0(xN)}{\partial x} \right]_{x=\frac{1}{2}} + \dots - \mu_0 \left(\frac{N}{2} \right) - \\ \left(\frac{1-r}{2} - \frac{1}{2} \right) \left[\frac{\partial \mu_0(xN)}{\partial x} \right]_{x=\frac{1}{2}} + \dots = 2\bar{\mu} \mathcal{H} \end{aligned}$$

¹⁰²Se está imaginando el sistema real como una mezcla (termodinámica) de componentes + y - con intercambio continuo de partículas. Se puede llegar a la misma conclusión por tanto igualando los potenciales químicos en el equilibrio: $\mu^+ = \mu^-$. Pero

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} \begin{cases} +\bar{\mu} \mathcal{H} & (\text{antiparalelo}) & (N^- \text{ partículas}) \\ -\bar{\mu} \mathcal{H} & (\text{paralelo}) & (N^+ \text{ partículas}) \end{cases}$$

luego la variación de energía interna por partícula (o potencial químico) en un campo \mathcal{H} es

$$\begin{aligned} \mu^+ &= \overset{\mu \text{ partículas sin espín}}{\mu_0(\overline{N^+})} - \bar{\mu} \mathcal{H} & (\text{paralelas}) \\ \mu^- &= \mu_0(\overline{N^-}) + \bar{\mu} \mathcal{H} & (\text{antiparalelas}) \end{aligned}$$

y se sigue lo indicado

de donde¹⁰³

$$\chi = \frac{1}{V} \lim_{\mathcal{H} \rightarrow 0} \frac{\partial M}{\partial \mathcal{H}} = \frac{2\bar{\mu}^2 n}{\left[\frac{\partial \mu_0(xN)}{\partial x} \right]_{x=\frac{1}{2}}}$$

que es una expresión general para la susceptibilidad.

Para hacer explícito este resultado, hay que usar aquí la expresión adecuada para el potencial químico del sistema de partículas sin espín; en particular, se tiene

- cerca del cero absoluto ($\mu \simeq \epsilon_F$), de modo que,¹⁰⁴ al hacer $T \rightarrow 0\text{K}$:

$$\chi_0 = \frac{3}{2} \bar{\mu}^2 \frac{n}{\epsilon_F}$$

que es no-nula e independiente de T (pero depende de n), que

¹⁰³En efecto, se tiene

$$r \rightarrow \frac{2\bar{\mu}\mathcal{H}}{\left[\frac{\partial \mu_0(xN)}{\partial x} \right]_{x=\frac{1}{2}}} \quad \text{para } \mathcal{H} \rightarrow 0,$$

luego

$$M = \bar{\mu}Nr \rightarrow \frac{2\bar{\mu}^2 N\mathcal{H}}{\left[\frac{\partial \mu_0(xN)}{\partial x} \right]_{x=\frac{1}{2}}} \quad \text{para } \mathcal{H} \rightarrow 0$$

y se sigue lo indicado.

¹⁰⁴En efecto, es

$$\mu \simeq \epsilon_F = \left(\frac{3N}{4\pi gV} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2m}$$

luego se tiene para el sistema ficticio ($g = 1$, y cambia $N \rightarrow xN$):

$$\mu_0(xN) = x^{2/3} \left(\frac{3N}{4\pi V} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2m}$$

y para el sistema real ($g = 2$)

$$\epsilon_F^{\text{real}} = \frac{1}{2^{2/3}} \left(\frac{3N}{4\pi V} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2m}.$$

Así:

$$\left[\frac{\partial \mu_0(xN)}{\partial x} \right]_{x=\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \underbrace{\left[x^{-1/3} \right]_{1/2}}_{2^{4/3}/3} \left(\frac{3N}{4\pi V} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2m} = \frac{2^2}{3} \epsilon_F^{\text{real}}$$

y se sigue:

$$\chi_0 = \frac{2\bar{\mu}^2 n 3}{2^2 \epsilon_F^{\text{real}}} = \frac{3}{2} \bar{\mu}^2 \frac{n}{\epsilon_F^{\text{real}}}$$

es un resultado que ya habíamos obtenido antes mediante otras consideraciones.

- a T 's bajas, pero finitas, es

$$\mu \simeq \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right]$$

y se sigue que

$$\chi \simeq \chi_0 \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right]$$

- para discutir T 's mayores, recordemos (tema gases ideales cuántico, lección 41) la ecuación de estado paramétrica para el gas ideal de fermiones:

$$\begin{aligned} n &= g\Lambda^{-3} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \frac{x^{1/2}}{\exp(x - \mu/kT) - \theta} \\ &= \frac{g}{\Lambda^3} \left(z - \frac{z^2}{2^{3/2}} + \frac{z^3}{3^{3/2}} + \dots \right), \end{aligned}$$

donde la segunda igualdad es para $z \equiv e^{\mu/kT} \ll 1$. En consecuencia,

- si $T \rightarrow \infty$:

$$z = e^{\beta\mu} \simeq \frac{\Lambda^3 N}{gV} \implies \mu \simeq kT \ln \left(\frac{N\Lambda^3}{gV} \right).$$

Así, para el sistema ficticio con $g = 1$ es: $\mu_0(xN) \simeq kT \ln(xN\Lambda^3/gV)$, de donde

$$\left[\frac{\partial \mu_0(xN)}{\partial x} \right]_{x=\frac{1}{2}} = \left[kT \frac{1}{xN\Lambda^3/gV} \left(\frac{N\Lambda^3}{V} \right) \right]_{x=\frac{1}{2}} = 2kT$$

y se sigue la ley de Curie,

$$\chi_\infty = \frac{n\bar{\mu}^2}{kT}$$

- si T es alta, pero finita, es apropiado quedarse con más términos en el desarrollo de n y se tiene

$$\chi = \chi_\infty \left(1 - \frac{n\Lambda^3}{2^{5/2}} + \dots \right),$$

que indica explícitamente la dependencia en n y T .

Diamagnetismo de Landau

El diamagnetismo es consecuencia de la libertad de movimiento que tienen los electrones en presencia de un campo magnético. Pero (T. de Bohr-van Leeuwen) la teoría clásica es incapaz de explicar efectos magnéticos, luego ha de estar asociado a fenómenos cuánticos. Landau (1930): asociado con cuantización órbitas de partículas cargadas en presencia de $\vec{\mathcal{H}}$, es decir, con el hecho de que la $E_{\text{cinética}}$ de las partículas asociada con el movimiento \perp a $\vec{\mathcal{H}}$ no puede tomar cualquier valor. Esta circunstancia \implies χ adicional a la paramagnética, cualitativamente semejante a ésta, pero negativa.

Sea un gas de electrones libres, salvo que interaccionan con $\vec{\mathcal{H}}$, sin espín (ya conocemos las consecuencias de este grado de libertad), confinado en volumen V . Con notación usual, el hamiltoniano es

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + \varphi(\vec{r}).$$

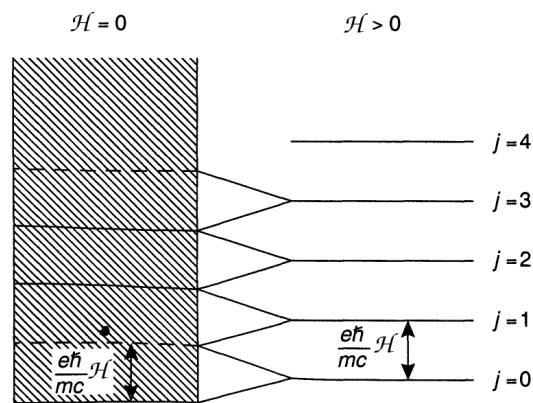
Resolviendo ec. de Schrödinger(ver [1] en la bibliografía), sus valores propios son¹⁰⁵

$$\epsilon(j, p_z) = \frac{e\hbar\mathcal{H}}{mc} \left(j + \frac{1}{2} \right) + \frac{p_z^2}{2m}, \quad J = 0, 1, 2, \dots \quad (39)$$

con degeneración

$$g = L_x L_y \frac{e\mathcal{H}}{hc}$$

Veámoslo: g niveles cuando $\mathcal{H} = 0$ se transforman en un solo $\epsilon(j, p_z)$ cuando $\mathcal{H} \neq 0$.



Puede estimarse:

¹⁰⁵La interpretación de (39) es que el movimiento del electrón puede descomponerse en:

·dirección z (la de $\vec{\mathcal{H}}$): movimiento con momento p_z ; está cuantizado, pero la separación de niveles es despreciable para sistemas macroscópicos y no produce efectos interesantes;

·plano (x, y) : describe círculos bajo acción de la fuerza de Lorentz que origina velocidad angular constante $\omega = e\mathcal{H}/mc$. La energía asociada está cuantizada en unidades $\hbar\omega = e\hbar\mathcal{H}/mc$.

$$g = \int \int_{\text{en un círculo}} d n_x d n_y \underset{p=\frac{h}{L}n}{=} \frac{L_x L_y}{h^2} \int \int_{\frac{e\hbar\mathcal{H}}{mc}j \leq \frac{p_x^2+p_y^2}{2m} \leq \frac{e\hbar\mathcal{H}}{mc}(j+1)} d p_x d p_y$$

(integrando en coordenadas polares)

$$= \frac{L_x L_y}{h^2} \pi \left[2m \frac{e\hbar\mathcal{H}}{mc} \{(j+1) - j\} \right] = L_x L_y \frac{e\mathcal{H}}{hc},$$

que es una medida de la libertad que tiene la partícula para acomodar el centro de su órbita en el área $L_x L_y$ del espacio físico.

La función de partición macrocanónica es¹⁰⁶

$$\begin{aligned} \ln \Xi &= \sum_{\epsilon} \ln (1 + z e^{-\beta\epsilon}) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{p_z} g \ln [1 + z e^{-\beta\epsilon(j,p_z)}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d p_z \frac{L_z}{h} L_x L_y \frac{e\mathcal{H}}{hc} \sum_{j=0}^{\infty} \ln [1 + z e^{-\beta\epsilon(j,p_z)}] \\ &= \frac{V e\mathcal{H}}{h^2 c} \int_{-\infty}^{\infty} d p_z \sum_{j=0}^{\infty} \ln [1 + z e^{-\beta\epsilon(j,p_z)}] \end{aligned} \quad (40)$$

y se tiene para el # electrones en equilibrio (pues estamos en la macrocanónica):

$$N \equiv \left[z \frac{\partial}{\partial z} \ln \Xi \right]_{\mathcal{H}, V, T} = \frac{V e\mathcal{H}}{h^2 c} \int_{-\infty}^{\infty} d p \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z e^{-\beta\epsilon}}{\underbrace{1 + z e^{-\beta\epsilon}}_1} \frac{1}{z^{-1} e^{\beta\epsilon} + 1}$$

Implicaciones:

¹⁰⁶donde la densidad de estados en el espacio de momentos en el eje z es L_z/h .

- **T 's altas:** N es finito luego, a T 's altas, cuando tienden a ocuparse los estados con n^o cuántico j alto, es necesario $z \ll 1$ para asegurar convergencia.¹⁰⁷ Entonces¹⁰⁸

Se tiene sucesivamente que:

$$\begin{aligned}
\ln \Xi &\simeq \frac{Ve\mathcal{H}}{h^2c} \int_{-\infty}^{\infty} dp \sum_{j=0}^{\infty} z \exp[-\beta\epsilon(j, p_z)] \\
&= \frac{zVe\mathcal{H}}{h^2c} \int_{-\infty}^{\infty} dp \sum_{j=0}^{\infty} \exp\left[-\beta\frac{p^2}{2m} - \beta\frac{e\hbar\mathcal{H}}{mc}\left(j + \frac{1}{2}\right)\right] \\
&= \frac{zVe\mathcal{H}}{h^2c} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dp \exp\left(-\beta\frac{p^2}{2m}\right)}_{\text{integral gaussiana}} \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \exp\left[-\beta\frac{e\hbar\mathcal{H}}{mc}\left(j + \frac{1}{2}\right)\right]}_{\text{serie geométrica}} \\
&= \frac{zVe\mathcal{H}}{h^2c} \overbrace{\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{1/2}}^{\text{integral}} \overbrace{\left[2 \sinh\left(\beta\frac{e\hbar\mathcal{H}}{2mc}\right)\right]^{-1}}^{\text{serie}} = \frac{zV}{\Lambda^3} \frac{x}{\sinh x},
\end{aligned}$$

con $x \equiv \beta\mu_B\mathcal{H}$ ($\mu_B =$ magnetón de Bohr)

y también que ($z \ll 1$)

$$N \simeq \ln \Xi \simeq \frac{zV}{\Lambda^3} \frac{x}{\sinh x},$$

y¹⁰⁹

$$M \equiv \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial}{\partial \mathcal{H}} \ln \Xi \right) = -\mu_B N L(x)$$

¹⁰⁷De hecho, ya sabemos que $z \ll 1$ corresponde al comportamiento 'gas de Boltzmann' característico de T 's altas.

¹⁰⁸Si $\alpha \equiv ze^{-\beta\epsilon}$ con $\epsilon > 0$ ($e^{-\beta\epsilon} < 1$) y $z \ll 1$, se tiene $\alpha \ll 1$, luego podemos usar aquí que $\ln(1 + \alpha) \simeq \alpha$.

¹⁰⁹En efecto, se tiene sucesivamente:

donde $L(x) \equiv \coth x - \frac{1}{x}$ es la función de Langevin que ya apareció antes. De hecho, este resultado coincide con el paramagnético, salvo que ahora es $M < 0$ (¡independientemente del signo de la carga eléctrica de la partícula!), como se observa en situaciones diamagnéticas. Es la tendencia a que se presenten momentos magnéticos opuestos a la dirección del campo

- **T 's altas y campos débiles:** $\mu_B \mathcal{H} \ll kT \implies x \equiv \frac{\mu_B \mathcal{H}}{kT} \ll 1$, luego:¹¹⁰

$$M \simeq -\mu_B N \frac{x}{3} = -N \frac{\mu_B^2 \mathcal{H}}{3kT}$$

y

$$\chi_\infty = -\frac{n\mu_B^2}{3kT}$$

que es el equivalente magnético de la ley de Curie para comportamientos diamagnéticos; La susceptibilidad neta se sigue entonces como

$$\chi_\infty = \chi_\infty^{\text{Pauli}} + \chi_\infty^{\text{Landau}}$$

pues en estos sistemas se pueden presentar ambos efectos. La expresión anterior es correcta siempre que no se tengan en cuenta correlaciones entre los dos efectos que ocurre cuando se desprecia la interacción espín-órbita.

Notemos también que $x \propto \mu_B \propto \hbar$, de manera que los desarrollos aquí pueden interpretarse como desarrollos en la cte. de Planck, y se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \left(\frac{\partial}{\partial \mathcal{H}} \ln \Xi \right) &= \frac{1}{\beta} \frac{zV (\beta\mu_B) \sinh x - (\beta\mu_B) x \cosh x}{\Lambda^3 \sinh^2 x} \\ &= \mu_B \frac{zV}{\Lambda^3} \left[\frac{1}{\sinh x} - \frac{x \cosh x}{\sinh^2 x} \right] = \mu_B \overbrace{\frac{zV}{\Lambda^3} \frac{x}{\sinh x}}^N \left[\frac{1}{x} - \coth x \right] \end{aligned}$$

¹¹⁰ $\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} - \dots \implies L(x) = \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \dots$

$$M \sim \hbar^2 + \mathcal{O}(\hbar^4),$$

es decir, este efecto diamagnético desaparece para $\hbar \rightarrow 0$, de acuerdo con el T de Bohr-van Leeuwen. Es evidente que teníamos que esperar este hecho, pues el diamagnetismo es consecuencia directa de la cuantización de las órbitas como acabamos de ver.

- sea, al contrario que hasta ahora, $kT \ll \epsilon_F$ (gas **muy degenerado**). Tenemos:¹¹¹

$$z \equiv \exp\left(\frac{\mu}{kT}\right) = \exp\left(\frac{\epsilon_F}{kT} + \dots\right) \gg 1.$$

Si, además el **campo es débil** ($\mu_B \mathcal{H} \ll kT$), puede aproximarse la suma en (40) por una integral,¹¹² con el resultado

$$\chi_0 = -\frac{1}{2}n\mu_B^2/\epsilon_F,$$

otra vez independiente de la carga y del mismo orden que el efecto paramagnético (suponiendo $\bar{\mu}$ del orden de magnitud de μ_B)¹¹³.

- **Efecto Haas-van Alphen** (1930): para T 's muy por debajo de la de Fermi y campos relativamente fuertes, es decir,

$$kT \approx \mu_B \mathcal{H} \ll \epsilon_F$$

¹¹¹ $\mu \simeq \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\epsilon_F}\right)^2\right]$

¹¹²Se usa la fórmula de Euler,

$$\sum_{j=0}^{\infty} f\left(j + \frac{1}{2}\right) \simeq \int_0^{\infty} f(x) dx + \frac{1}{24}f'(0)$$

hay detalles en Pathria p. 229-230.

¹¹³Concretamente $-\frac{1}{3}$

la función de partición macrocanónica tiene una parte oscilatoria de la forma:¹¹⁴

$$(\ln \Xi)_{\text{osc}} \propto (\mu_B \mathcal{H})^{3/2} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^\ell \cos\left(\frac{\ell\pi}{\mu_B \mathcal{H}} \epsilon_F - \frac{\pi}{4}\right)}{\ell^{3/2} \sinh\left(\frac{\ell\pi}{\mu_B \mathcal{H}} \pi kT\right)}$$

de donde se sigue una susceptibilidad oscilatoria,

$$\chi_{\text{osc}} = \frac{1}{\beta V \mathcal{H}} \left(\frac{\partial}{\partial \mathcal{H}} \ln \Xi \right)_{\text{osc}}.$$

Es notable el coseno del numerador, que predice violentas oscilaciones con $1/\mathcal{H}$:

- las oscilaciones son despreciables para $\mu_B \mathcal{H} \ll kT$, como consecuencia de la función hiperbólica en el denominador, y se tienen propiedades suaves como predice el diamagnetismo de Landau; pero
- estos términos oscilatorios serán apreciables si $\mu_B \mathcal{H} \approx \pi^2 kT$, lo que corresponde a $\mathcal{H} \sim 10^5 T$ Oersted,
 - luego han de ser observables para campos suficientemente intensos a muy bajas T 's, lo que explica oscilaciones descritas por primera vez en 1930, conocidas como efecto Haas-van Alphen.
 - Parte de su importancia radica en que el período de la oscilación es función de ϵ_F .¹¹⁵

¹¹⁴Algunos detalles en Pathria p. 231.

¹¹⁵En consecuencia, ϵ_F puede determinarse experimentalmente, de manera relativamente sencilla, por este método.

Propiedades del gas electrónico en metales

El modelo ‘gas ideal de Fermi’ ha de completarse, como se ha señalado antes, considerando interacciones. Las más relevantes en este contexto son

- electrón-electrón: no decisiva, debido al apantallamiento de la interacción coulombiana debido a cooperatividad; para conseguir descripciones cuantitativamente muy buenas es suficiente introducir masa efectiva para el electrón, por ejemplo;
- electrón-fonón: muy importante, induce interesantes fenómenos, como las parejas de Cooper que permiten comprender la superconductividad a bajas T 's;
- electrón-ión: introducida por Bloch (1928), conduce al concepto de bandas de energía (como se ve explícitamente en el modelo de Kronig-Penney) que permite explicar semiconductores, por ejemplo.

Drude (1900-1902) y Lorentz (1904-1909) trataron el gas electrónico¹¹⁶ como un gas de Boltzmann. Se consiguen así descripciones cualitativamente correctas a veces, pero hay fallos importantes.

Calores específicos

La primera dificultad del modelo clásico ocurre con el calor específico: La estadística de Maxwell-Boltzmann \implies los electrones han de satisfacer el *principio de equipartición*, es decir, cada electrón ha de contribuir $3 \times \frac{1}{2}k$ al calor específico, lo que implica independencia con la T . Las medidas muestran que todos los sólidos tienden a presentar C independiente de T para T suficientemente alta (es la ‘ley de Dulong y Petit’, discutida en otra parte), pero

¹¹⁶Los metales se caracterizan por altas conductividades eléctrica σ y térmica κ . Alrededor de 1890 quedó claro que la carga tenía naturaleza discreta y que altas σ en metales eran consecuencia de que los electrones exteriores en átomos estaban muy débilmente ligados. A este conjunto de electrones prácticamente libres se le llamó **gas electrónico**, y surgió la idea de un metal como una red de iones y más un gas de electrones sometidos a esa red, y comenzaron a aplicarle los métodos de teoría cinética y ME.

- el valor experimental es aproximadamente $3R$ por mol para sólidos monoatómicos, en lugar de la predicción $\frac{9}{2}R$ ¹¹⁷
- si la T no es tan alta, C_V depende fuertemente en T .

Einstein y Debye notaron cómo los modos de vibración de la red tienen naturaleza bosónica y (como se vió en otra parte) contribuyen con un C por modo:

$$C_v = \frac{12\pi^4}{5} k \left(\frac{T}{\theta_D} \right)^3, \quad \theta_D = \text{temp de Debye} \quad (41)$$

Pero ¿y la contribución del gas electrónico? Si sumamos a esto una contribución constante, como la que produciría un gas clásico, no se obtiene acuerdo con los datos para metales.

Sommerfeld (1928) notó que era muy importante tratar el gas electrónico como un gas de Fermi degenerado. En efecto, tomando $g = 2$, tenemos

$$\epsilon_F^{\text{electr}} = \frac{1}{2^{2/3}} \left(\frac{3N}{4\pi V} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2m},$$

donde es $N/V = n_e n_a / a^3$ ($n_e = \#$ electr de conducción por átomo; $n_a = \#$ átomos por celda unidad; $a =$ espaciado de la red). Si usamos los valores para el átomo de Na, por ejemplo, es decir, $n_e = 1$, $n_a = 2$, $a = 4'29$, se sigue $n = 2'53 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$, y haciendo m igual a 0'98 veces la masa del electrón para compensar que la teoría trata a este gas como 'ideal',¹¹⁸ se tiene

¹¹⁷La estadística M-B establece que

electrones:	3 grados lib.	\implies	$3 \times \frac{k}{2} = \frac{3}{2}k$
red (como oscil. armón.):	3 gl \times 2 tnos. cuadrát.	\implies	$3 \times 2 \times \frac{k}{2} = \frac{6}{2}k$

luego la predicción es $C_V = \frac{9}{2}Nk = \frac{9}{2}R$

¹¹⁸Aquí, y en otras muchas aplicaciones del modelo gas de Fermi, se está despreciando la posible energía de interacción, en particular, la debida a la presencia de un potencial producido por los iones (ej. los localizados en los nudos de la red), que produce efectos importantes —como comentamos luego—, y las interacciones entre electrones. Respecto de éstas, hay que notar que la interacción entre dos electrones aislados es coulombiana, nada

$$\epsilon_F \simeq 5'146 \times 10^{-12} \text{ erg} = 3'21 \text{ eV}$$

Si definimos la *temperatura de Fermi*¹¹⁹:

$$T_F \equiv \epsilon_F/k \simeq 3'3 \times 10^4 \text{ K}$$

para el sodio.¹²⁰

Todos los metales tienen T_F en el rango $10^4 - 10^5 \text{ K} \gg$ temperatura ambiente ($\simeq 3 \times 10^2 \text{ K}$), luego el gas electrónico está, en efecto, completamente degenerado, y el n^o medio de ocupación correspondiente diferirá muy poco de la función paso para 0 K : sólo las esquinas estarán ligeramente redondeadas en una región del orden de kT , despreciable comparada con ϵ_F .¹²¹

En estas condiciones, como se vió, hemos de asumir para el gas electrónico:

despreciable y, sin embargo, la teoría resultante parece suficientemente fina.

Esta aparente paradoja queda resuelta al notar (como se ve explícitamente en la *T. de plasmas* —de modo cualitativo— y en el *T. del límite termodinámico* —de modo riguroso) que, en un sistema con muchos electrones, como consecuencia del potencial coulombiano entre cada dos de ellos, aparece un efecto cooperativo que consiste en una especie de ‘nube de polarización’ que apantalla la interacción coulombiana de largo alcance, resultando una interacción efectiva entre cada dos electrones del ‘gas’ que disminuye muy rápidamente —dominada por una exponencial— con la distancia.

En consecuencia, en relación con algunas aplicaciones, es conveniente considerar un conjunto de partículas efectivas —en lugar de electrones— con masa efectiva m' , ligeramente distinta de la del electrón, m , tq m'/m depende del metal, pues pueden influir detalles estructurales del metal, etc. La relación adecuada para el sodio resulta ser $m'/m \simeq 0'98$.

¹¹⁹es decir, la T que hay que asociar con el momento medio que tienen los fermiones en el cero absoluto consecuencia del PP

¹²⁰Balescu cita

	ϵ_F (erg)	T_F (K)
Litio	$6'34 \times 10^{-12}$	$4'84 \times 10^4$
Sodio	$4'32 \times 10^{-12}$	$3'30 \times 10^4$

¹²¹Se llega al mismo resultado tomando como criterio el valor de la fugacidad. Sabemos que $z < 1$ corresponde a comportamiento clásico, mientras que $z \gg 1$ cuando los efectos cuánticos son notables para fermiones (ver luego el rango de variación de z para bosones). Suponiendo que pudiera usarse la expresión para un gas perfecto monoatómico, $z = (h^2/2\pi mkT)^{3/2} (N/V)$, y usando los valores típicos $m = 10^{-27} \text{ gr}$, $V = 10 \text{ cm}^3/\text{mol}$, se sigue $z \approx 10^6$!

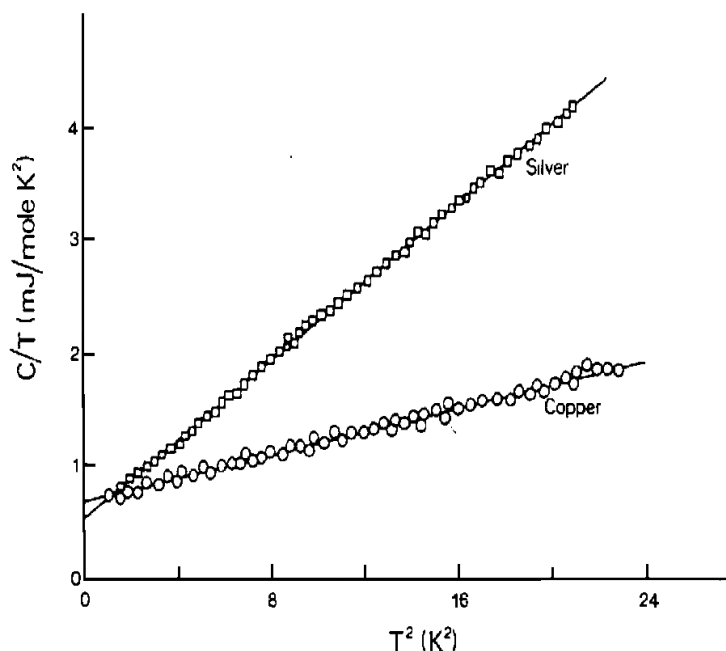
$$C_V = \frac{\pi^2}{2} k \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right). \quad (42)$$

Pero, a T 's ordinarias, es $(kT/\epsilon_F) \equiv T/T_F \sim \mathcal{O}(10^{-2})$, es decir, esta contribución es del orden de 10^{-2} R por mol, despreciable frente a la de la red, $3R$ por mol. En consecuencia, los metales a T 's ordinarias han de presentar la contribución bosónica (41), lo que confirman los experimentos.

La contribución bosónica (41) decrece rápidamente con T (reflejando cómo los osciladores van 'congelándose') de modo que, a bajas T 's, puede hacerse comparable a la fermiónica (42); la predicción es:

$$C_V = \gamma T + \delta T^3$$

que es confirmada muy bien en metales y aleaciones:¹²²



¹²²Se confirma comportamiento lineal de C_V/T en función de T^2 en el rango 1-4 K. Por ejemplo, Corak *et al*, Phys. Rev. **98**, 1699 (1955); ver también Pathria p. 234.

Comparando con (41) y (42): la pendiente δ de estas rectas (a muy baja T) permite determinar θ_D (temp de Debye), mientras que el corte γ con el eje vertical está relacionado con ϵ_F .¹²³

Efectos magnéticos

El comportamiento de los metales (en fase paramagnética) puede ahora entenderse a la luz de los resultados para distintos modelos.

Electrones ‘clásicos’ con espín (es decir, satisfacen la estadística M-B pero tienen momento magnético intrínseco de magnitud μ que puede orientarse $\pm \vec{\mathcal{H}}$)¹²⁴ sabemos que presentan una susceptibilidad acorde con Curie,

$$\chi_{\text{clás.}} = \frac{n\mu^2}{kT}$$

a T 's altas, mientras que se tiende a saturación magnética (que implica, en particular, $\chi = 0$) a T 's bajas (y campos intensos, del orden de 10^4 gauss a 1 K, o bien $10^5 - 10^6$ gauss a T ambiente). Se esperaba que los electrones de un metal a T **ambiente** presentaran este comportamiento clásico, pero sólo ocurre en la práctica para T 's altas y campos débiles. Excluyendo este caso límite, en un amplio rango de T 's (desde cerca de 0 K hasta 10^3 K o más), los metales en fase paramagnética presentan χ independiente de T y con valor típicamente 1 % del clásico.

Pauli (1930): tiene que ver con el PP, pues dos electrones en el mismo estado no pueden ‘alinear sus espines’ en dirección $\vec{\mathcal{H}}$, lo que impide saturación a “bajas” T 's (es decir, $T \ll T_F$), cuando hay mucha degeneración. En consecuencia, la χ de un metal ha de ser suma de la contribución de Pauli (debida al espín de electrones

¹²³Para el cobre se obtiene así $\theta_D = (343'8 \pm 0'5)$ K, que se compara muy bien con $\theta_D = 345$ K obtenido a partir de las constantes elásticas —según procedimiento descrito en otra parte— y $\gamma = 7 \times 10^4$ J / mol grado². A partir de ϵ_F , suponiendo que el gas es ideal, se sigue $\gamma = 5'4 \times 10^4$ J / mol grado². La diferencia desaparece suponiendo una ‘masa efectiva para los electrones del cobre’ 1'3 veces la electrónica. (Insisto, sin embargo, que este concepto de masa efectiva parece tener una validez bastante restringida.)

¹²⁴El mismo resultado se obtiene como límite $T \rightarrow \infty$ de la susceptibilidad de un gas de Fermi, como se vió.

degenerados) y de la de Landau (originada por el momento orbital de los electrones en presencia de $\vec{\mathcal{H}}$):

$$\chi_{\text{Pauli}} = \frac{3n\bar{\mu}^2}{2\epsilon_F}, \quad \chi_{\text{Landau}} = -\frac{n\mu_B^2}{2\epsilon_F}$$

donde $\bar{\mu} = g\mu_B J = \mu_B$ en este caso. De acuerdo con los experimentos, este resultado es mucho menor que $\chi_{\text{clás.}}$, independiente de T , y explica el efecto Haas-van Alphen (periodicidad con T) a bajas T 's y \mathcal{H} 's intensos.

Admitir la *degeneración* del gas electrónico es, pues, esencial para comprender sus propiedades. Esto es, como norma general, hay parejas de electrones con la misma energía que, por el principio de exclusión de Pauli, no pueden alinear simultáneamente sus espines en dirección $\vec{\mathcal{H}}$.

Pero ¿cómo es posible que electrones **muy** —incluso macroscópicamente— separados en un hilo conductor, por ejemplo, sepan acerca de sus estados respectivos para poder satisfacer el principio de exclusión de Pauli?

Respuesta: el PP **no** requiere que una tal pareja de electrones afecten mutuamente sus movimientos. El estado (de movimiento) a que se refiere el PP involucra la posición y el momento, magnitudes afectadas por el P de incertidumbre. Así, si podemos asegurar que dos electrones están en regiones diferentes del espacio, estamos restringiendo la precisión con que conocemos sus momentos, lo que impide concluir acerca de las implicaciones del PP sobre sus espines.

Este argumento puede hacerse cuantitativo; ver R. Peierls, *Surprises in Theoretical Physics*, Princeton 1979, p. 52.

Coefficientes de transporte

Como se ha dicho, las conductividades eléctrica σ y térmica κ son ‘anormalmente’ altas en los metales, lo que los distingue de otros

sólidos.¹²⁵ Una propiedad de σ y κ es la ley (fenomenológica) de Wiedemann-Franz (1853) que establece que $L = \kappa/\sigma T$ es independiente de T y del metal en cuestión.¹²⁶

El cálculo de Lorentz se refiere a electrones clásicos con sus velocidades distribuidas maxwellianamente; la predicción es

$$L = 3 \left(\frac{k}{e} \right)^2 = 2'23 \times 10^{-8} \text{ W } \Omega \text{ K}^{-2},$$

a comparar con valores experimentales recientes (en $\text{W } \Omega \text{ K}^{-2}$):

	0°C	100°C
Pb	2'47	2'56
Pt	2'51	2'60
Ag	2'31	2'37
Au	2'35	2'40

Es decir, la ley W-F sólo parece aproximada, y el valor clásico de Lorentz subvalora los datos en un 10 % aproximadamente.

La situación se aclara y la discrepancia desaparece calculando σ y κ mediante teoría de transporte. En particular, son necesarios conceptos cuánticos. Aquí vamos a ver sólo el argumento más sencillo que permite estimar L aceptablemente:

Puesto que el gas es muy degenerado, sólo los electrones en el nivel de fermi pueden ser excitados térmicamente (con una energía de excitación $kT \ll kT_F$), luego tendrán velocidad $v_F = (2\epsilon_F/m)^{1/2}$. Si su recorrido libre medio (rlm) es λ_F , se sigue un tiempo medio entre colisiones $\tau_F = \lambda_F/v_F$.

¹²⁵Estas conductividades son ejemplos típicos de **coeficientes de transporte** (otros son viscosidad, movilidad, coeficiente de difusión) y, por tanto, su estudio sistemático se hace a partir de las ecuaciones de transporte que involucran situaciones fuera del equilibrio. Sin embargo, bajo las hipótesis de cuasi-equilibrio o equilibrio local, es posible desarrollar argumentos que explican algunas de las propiedades de esas conductividades. Vamos a ilustrar este hecho.

¹²⁶A esta relación se le conoce como **número de Lorentz** puesto que éste fue el primero en calcularla teóricamente.

Si el gas está sometido a campo eléctrico E , cada partícula sufre aceleración $a = eE/m$, viajando una distancia $\frac{1}{2}at^2$ en cualquier tiempo t , o

una distancia media $\frac{1}{2}a \langle t^2 \rangle$ en el tiempo característico $\langle t \rangle$

Si calculamos estos promedios usando la función que nos dice cómo se distribuyen los rlm (entre colisiones), tendremos que

$\frac{1}{2}a \langle t^2 \rangle$ es la distancia media que recorren
los electrones antes de sufrir otra colisión

y

$\langle v \rangle = \frac{1}{2}a \langle t^2 \rangle / \langle t \rangle$ es la velocidad media de arrastre,

es decir, la velocidad neta que resulta de las aceleraciones $a = eE/m$ y de las deceleraciones que se producen en las colisiones.

La teoría general, mediante un argumento independiente,¹²⁷ establece que la fracción de rlm que terminan en el intervalo temporal $(t, t + dt)$ es

$$f(t) dt = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} dt.$$

Usando esta distribución con $\tau = \tau_F$ para calcular aquellos promedios,

$$\begin{aligned} \langle t^2 \rangle &= \frac{1}{\tau_F} \int_0^\infty t^2 e^{-t/\tau_F} dt = \text{(integrando por partes)} \\ &= 2 \int_0^\infty t e^{-t/\tau_F} dt = 2\tau_F \frac{1}{\tau_F} \int_0^\infty t e^{-t/\tau_F} dt = 2\tau_F \langle t \rangle \end{aligned}$$

¹²⁷Hecho en NE0-4

luego

$$\langle v \rangle = \frac{\frac{1}{2}a \langle t^2 \rangle}{\langle t \rangle} = a\tau_F = \frac{eE}{m}\tau_F = \frac{eE\lambda_F}{mv_F}$$

Puesto que

conductividad eléctrica = densidad de carga \times movilidad

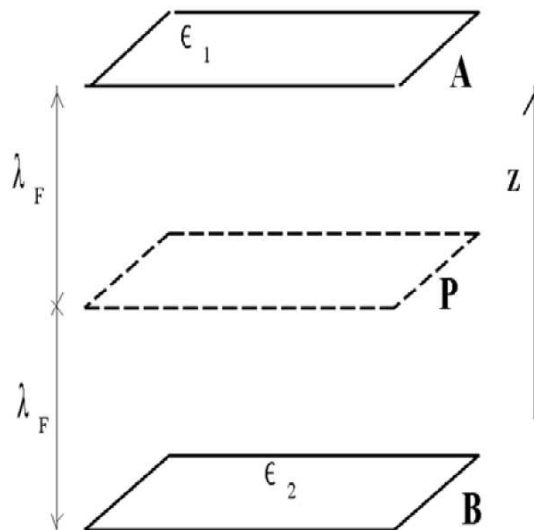
densidad de carga = # cargas por u. vol (n) $\times e$

movilidad \equiv velocidad media de arrastre por u. de campo = $\frac{e\lambda_F}{mv_F}$

se tiene finalmente:

$$\sigma = \frac{ne^2\lambda_F}{mv_F} \quad (43)$$

Para calcular κ , supongamos tres superficies de área unidad (A, P y B) en el seno del gas, paralelas entre sí separadas λ_F , tq ϵ_1 y ϵ_2 son las energías típicas de las partículas en las proximidades de A y B, respectivamente



Suponiendo que la dirección de la velocidad es aleatoria, puesto que hay 6 direcciones, la superior P será atravesada en promedio por $\frac{1}{6}nv_F$ electrones por u. de tiempo viniendo de A y otros tantos viniendo de B.

Así, el transporte neto de energía por u. de tiempo a través de P es

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \frac{1}{6}nv_F (\epsilon_1 - \epsilon_2) = \frac{1}{6}nv_F 2\lambda_F \left(-\frac{\partial\epsilon}{\partial z} \right) & \left| \begin{array}{l} \text{signo menos} \implies \text{flujo energía} \\ \text{sentido contrario gradiente} \end{array} \right. \\ &= -\frac{1}{3}nv_F \lambda_F \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial T} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Pero la conductividad se define

$$\frac{dQ}{dt} \equiv -\kappa \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

luego

$$\kappa = \frac{1}{3}nv_F \lambda_F \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial T} \right) = \frac{1}{3}nv_F \lambda_F \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{k^2 T}{\epsilon_F} \right),$$

usando (42) para el calor específico por electr, $\partial\epsilon/\partial T$, y escribiendo $\epsilon_F = \frac{1}{2}mv_F^2$:

$$\kappa = \frac{\frac{1}{6}nv_F \lambda_F \pi^2 k^2 T}{\frac{1}{2}mv_F^2} = \frac{n\pi^2 k^2 \lambda_F T}{3mv_F}.$$

Combinando esto con (43),

$$L = \frac{\kappa}{\sigma T} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k}{e} \right)^2 = 2'44 \times 10^{-8} \text{ W } \Omega \text{ K}^{-2}$$

que, aunque difiere poco del clásico, lo mejora e involucra un cálculo más acorde con la situación.

Bibliografía

- [1] La solución es como sigue (puede verse también Huang p.239, o Goldman *et al*, 'Problems in QM', problema 6.3). Sea

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + \varphi(\vec{r})$$

donde conviene considerar el potencial vector¹²⁸

$$A_x = 0, \quad A_y = \mathcal{H}x, \quad A_z = 0.$$

Se sigue la ec de Schrodinger:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{ie\mathcal{H}x}{\hbar c} \right)^2 \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi = 0. \quad (44)$$

puesto que esta ec no contiene explícitamente ni y ni z , tomamos

$$\psi(x, y, z) = e^{i(k_y y + k_z z)} u(x)$$

y se sigue para u :

$$u'' + \left[\frac{2mE_1}{\hbar^2} - \left(k_y - \frac{e\mathcal{H}}{\hbar c} x \right)^2 \right] u = 0, \quad (45)$$

¹²⁸que origina un campo uniforme de intensidad \mathcal{H} en la dirección z

donde $E_1 \equiv E - \frac{\hbar^2}{2m}k_z^2$ es la energía asociada con el movimiento en el plano transversal. Pero esta ecuación es formalmente similar a la ecuación de onda de un oscilador armónico de frecuencia $e\mathcal{H}/mc$ y centro en $x_0 = \hbar ck_y/e\mathcal{H}$, de lo que se sigue (la frecuencia es $2\omega_L = e\mathcal{H}/mc$ y se tiene $E_1 = (2j + 1)\hbar\omega_L$) que los niveles son

$$E_1 = \left(j + \frac{1}{2}\right) \hbar \frac{e\mathcal{H}}{mc}$$

y

$$E = \left(j + \frac{1}{2}\right) \frac{e\hbar\mathcal{H}}{mc} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$

QED.

Para determinar la degeneración han de considerarse condiciones en los límites. (En efecto, si el plano (x, y) , donde ocurren las órbitas circulares, es ∞ , habrá ∞ 's estados correspondientes a cada nivel E_1 , consecuente con el hecho de que la órbita circular clásica puede localizarse en cualquier parte del plano. Si el área es limitada, los estados que quedan fuera no existen —o tienen gran energía, consecuencia del potencial repulsivo en las paredes—; algunos, localizados cerca de las paredes, tendrán un corrimiento de su energía, pero son estadísticamente insignificantes.)

Supongamos condiciones cíclicas en las direcciones y y z , lo que permite valores para k_y y k_z que sean múltiplos de $2\pi/L_2$ y $2\pi/L_3$ respectivamente. No conviene incluir condición cíclica en dirección x , pues (44) y (45) dependen de x , luego no tienen soluciones periódicas. En su lugar, suponemos al sistema limitado por paredes a distancias L_1 en la dirección x .

[Si L_1 es grande, comparado con la extensión de la función oscilatoria $u_n(x - x_0)$, que es del orden del radio orbital $r = mc v/e\mathcal{H} = v/2\omega_L$, las funciones para las que el centro x_0 queda dentro del volumen no serán afectadas por la presencia de las paredes.]

No existen soluciones si x_0 queda fuera del volumen. Para un pequeño rango de x_0 cerca de las paredes, a uno y otro lado, la presencia de la pared modifica la función de onda y E_1 . Para un campo de 10^3 Gauss y un electrón de 2 eV, el radio es de unos 5×10^{-3} cm, luego esta región puede generalmente despreciarse.]

El intervalo permitido de k_y es $\frac{e\mathcal{H}}{\hbar c}L_1$. Se siguen entonces $L_1L_2e\mathcal{H}/2\pi\hbar c$ estados para cada energía, QED.

