

C1. Física de la complejidad

En esta lección veremos modelos que, surgidos en la Física, han originado conceptos que parecen tener relevancia en todas las ciencias. El modelo más sencillo mimetiza *percolación*, esto es, el fenómeno del “mojado” al propagarse un líquido a través de una sustancia sólida porosa, como cuando el agua “percola” por el café molido en una cafetera italiana. Otros modelos de esta clase son la pila de arena, una red cuyos enlaces sean muelles elásticos, los gases reticulares y el gas con arrastre, el modelo de Ising y sus variantes, etc. Se trata de sistemas con muchos componentes que interactúan entre sí mediante el intercambio de fuerzas o información y, eventualmente, sufren la acción de agentes externos (campos eléctricos o magnéticos, gravedad, cambios en el medio ambiente, etc.).

La fenomenología que presentan estos sistemas es compleja en el sentido de que no se sigue de modo sencillo del conocimiento de las leyes de interacción entre los componentes. En particular, veremos cómo sus cambios no están caracterizados por una escala única para el tiempo y otra para el espacio, esto es, nunca existe un suceso único característico. Vamos a descubrir, sin embargo, algunos rasgos de sencillez entre tanta complejidad; por ejemplo, las propiedades estadísticas siguen a menudo sencillas leyes potenciales y hay cierta *universalidad*, esto es, idénticas leyes potenciales para sistemas que, desde un punto de vista microscópico, son aparentemente dispares.

En este capítulo interesa una introducción al estudio de estos modelos con dos objetivos: seguir con la descripción que iniciamos en el capítulo anterior de conceptos relevantes en la ciencia más moderna, y ensayar métodos de estudio apropiados. Algunos de estos modelos son objeto de un estudio más sistemático y riguroso en Física estadística.¹

Los sistemas que aquí interesan admiten un análisis riguroso si, dada cualquier configuración $\{\mathbf{s}\}$, puede definirse la función hamiltoniano, H , que determina su energía potencial total, $E = H(\{\mathbf{s}\})$. Si el sistema está en *equilibrio canónico* a temperatura T , se define la “función de partición”,

$$Z = \sum_{\{\mathbf{s}\}} \exp \left[\frac{-H(\{\mathbf{s}\})}{kT} \right],$$

donde la suma es sobre todas las configuraciones posibles que puede adoptar el sistema, cuyo logaritmo resulta ser la energía

¹J Marro & R Dickman, *Nonequilibrium Phase Transitions in Lattice Models*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1999.

libre, esto es, un potencial termodinámico del que se sigue toda la información macroscópica sobre el sistema. Lamentablemente, pocos de los sistemas que nos interesan aquí pueden caracterizarse como sistemas en equilibrio con un hamiltoniano bien definido, por lo que no se les puede aplicar este formalismo tan poderoso.

1.- Los conceptos relevantes

Los sistemas de interés suelen encontrarse en situaciones —estacionarias o no— fuera del equilibrio. Por ejemplo, un conductor atravesado por una corriente de electrones está en un **estado estacionario**, o evolucionando hacia él, pero nunca en equilibrio, pues no puede escribirse un hamiltoniano que contenga toda la información necesaria para caracterizar ese estado con corriente. Estos sistemas fuera del equilibrio desarrollan a veces estructuras o “patrones” sin necesidad de que sean controlados o manipulados por un agente externo.² Se habla entonces de **auto-organización**. Es el caso, por ejemplo, del crecimiento de patrones en presencia de ciertas reacciones químicas, o del desarrollo de las estructuras que conforman los sistemas biológicos.

Otro concepto importante es el de **criticalidad**, que tiene su manifestación más clara en las proximidades del **punto crítico**. Se llama así a un punto en algunos diagramas de fase asociado con un *cambio de fase continuo*, como el que marca el inicio de la condensación (formación de las primeras gotitas de líquido a partir del vapor) cuando temperatura y presión toman ciertos valores, o el paso de un estado paramagnético a otro ferromagnético (el material pasa a tener comportamiento tipo imán) a la temperatura de Curie del material en ausencia de campo magnético aplicado. Mientras que una perturbación local sólo tiene generalmente efectos locales, se propaga por todo el sistema si éste es conducido a su punto crítico, debido a que el efecto decae entonces algebraicamente en lugar de hacerlo exponencialmente. Aunque sólo los vecinos próximos interactúen directamente, cualesquiera dos elementos están *correlacionados*, como relacionados por una interacción efectiva, de modo que se influyen mutuamente; se dice entonces que el sistema es *crítico*. Este tipo de criticalidad ocurre tanto en el estado de equilibrio como lejos de él.

Una propiedad general de los sistemas en estados críticos es la **invariancia de escala** (IE), esto es, el sistema presenta el mismo aspecto en cualquier escala.³ Se manifiesta matemáticamente en que su comportamiento está caracterizado por funciones (por ejemplo, funciones de correlación o distribución) dominadas por leyes potenciales:

$$f(x) = Ax^{-\eta}.$$

²Sigo —lejanamente— a Jensen 1998, como en parte de la sección anterior.

³Sigo G Grinstein & C Jayaprakash, “Simple Models of Self-Organized Criticality”, *Computers in Physics* **9**, 164 (1995)

Si cambio $x \rightarrow ax$, obtengo

$$g(x) = (Aa^{-\eta}) x^{-\eta}.$$

Resulta que, para cualquier valor del exponente η , $g(x)$ es una función indistinguible de $f(x)$, excepto que la amplitud A ha cambiado en un factor $a^{-\eta}$. Dicho de otro modo, el cambio relativo $f(x)/f(ax) = a^{-\eta}$ es independiente de x , luego no existe una escala característica en el fenómeno. Por otra parte, esta IE implica decaimientos *cualitativamente* prolongados —algebraicos. Estas propiedades no se dan si el fenómeno está controlado por funciones exponenciales como $\exp(-x/\xi)$. En este caso, los decaimientos son rápidos, y $x \rightarrow ax$ cambia la **longitud de correlación** ξ —que mide la escala característica para el decaimiento— en un factor a : no hay IE.

Las leyes potenciales se extienden en la práctica a lo largo de un rango finito para la distancia, el tiempo u otra variable, pues son finitos la extensión de los sistemas reales y el tamaño de sus elementos (partículas). Este rango —‘varios órdenes de magnitud’— es característico de cada caso.⁴

Una gran variedad de sistemas en física, química, biología y, probablemente, en economía, sociología, etc. manifiestan IE.⁵ Ejemplos:

- La distribución de probabilidad de las intensidades de terremotos decae de acuerdo con la ley (potencial) de Guthenberg-Richter: $p(E) \sim E^{-\eta}$ es la probabilidad de un terremoto que libera una energía E cuando las placas deslizan; $\eta \in [1.8, 2.2]$. Además, la morfología de las fallas resulta tener cierta naturaleza fractal y, como se comenta luego, los ‘recuerdos’ posteriores al terremoto principal siguen una ley potencial llamada de Omori.⁶
- El estudio de fósiles evidencia grandes fluctuaciones en la evolución biológica. En efecto, se detectan largos períodos de desarrollo relativamente lento y etapas caracterizadas por una febril actividad en la

⁴La ley potencial habrá de manifestarse a lo largo de distancias arbitrariamente largas si consideramos modelos (de la física estadística) en el límite termodinámico.

⁵Ver, por ejemplo, B Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, San Francisco 1982.

⁶Ver artículos de CH Scholz y de D Sornette en T Riste & D Sherrington (eds.), *Spontaneous Formation of Space-Time Structures and Criticality*, Dordrecht, Kluwer 1991.

que la evolución es casi violenta, de modo que, presuniblemente, esas fluctuaciones podrían describirse mediante leyes potenciales.⁷

- Muchos objetos naturales (por ejemplo, el pulmón humano) son **fractales**. Esto quiere decir en la práctica que su masa M crece $M \sim L^D$ con su dimensión lineal L a lo largo de un amplio rango de valores de L .

El exponente D es la **dimensión fractal** del objeto, típicamente un número no-entero menor que la dimensión d (un número entero) del espacio en el que se halla, como veremos.

Notar que la validez de esta ley potencial para L grande implica (sutiles) correlaciones de largo alcance entre las posiciones de las partículas individuales que constituyen el objeto.

- Las fluctuaciones temporales en los mercados financieros, cuyo espectro se ha venido diciendo, aunque sin unanimidad, que crece para pequeñas frecuencias como una potencia de la frecuencia,⁸ esto es, lo que se llama **ruido** $1/f$.

Vamos a definir este concepto. Sea una serie temporal $q(t)$ de una magnitud cualquiera que fluctúa arriba y abajo de una manera que parece errática.⁹ Nos preguntamos si el valor de la señal en t_0 , $q(t_0)$, influye en una medida posterior, $q(t_0 + t)$. Por supuesto, no estamos interesados en un tiempo específico t_0 , sino en las propiedades típicas, esto es, estadísticas, de la señal.

⁷Se plantean en este campo cuestiones importantes: ¿La evolución biológica de las especies es lenta y gradual o puede ocurrir a saltos? ¿Tiende el conjunto de todas las especies hacia una configuración final en la que ya no sería posible mejora alguna debida a cambios evolutivos? SJ Gould [*Paleobiology* **3**, 135 (1977)] y MD Raup [*Science* **231**, 1528 (1986)] han defendido y presentado evidencia, respectivamente, de que las especies sobreviven durante largos períodos y luego desaparecen en unos pocos años. Además, la extinción de una especie ocurre simultáneamente con la de otras, y se observan grandes variaciones en el número de especies que se extinguen a la vez. Esto es, la extinción ocurre como en avalanchas (ver luego) siguiendo un proceso aparentemente arbitrario, una especie de susceptibilidad aleatoria al medio ambiente. Un modelo de P Bak & K Sneppen [*Phys. Rev. Lett.* **74**, 4083 (1993)] trata de recrear esta situación y de mostrar que es compatible con SOC.

⁸Por ejemplo, P Dutta & PM Horn, *Rev. Mod. Phys.* **53**, 497 (1981); MB Weissman, *Rev. Mod. Phys.* **60**, 537 (1988); MJ Kirton & MJ Uren, *Adv. Phys.* **38**, 367 (1989).

⁹Estamos pensando en señales con variación temporal tales como la actividad de manchas solares, fluctuaciones en la resistencia eléctrica de un conductor, el flujo del río Nilo, o variaciones de presión en el aire causadas por la música.

Por ejemplo, la **función de correlación temporal**,

$$G(t) = \langle q(t_0) q(t_0 + t) \rangle_{t_0} - \langle q(t_0) \rangle_{t_0}^2, \quad (1)$$

donde se indica un promedio sobre tiempos iniciales, contiene información sobre la historia del sistema y sobre ese tipo de dependencia o causalidad. Se tiene $G(t) = 0$ si no hay correlación estadística entre las señales en t_0 y t . La rapidez con que $G(t)$ disminuye hacia este valor desde la fluctuación instantánea media, $G(0) = \langle q(t_0)^2 \rangle_{t_0} - \langle q(t_0) \rangle_{t_0}^2$, mide la duración de las correlaciones o efectos de memoria en la señal.

Las cualidades de la señal pueden investigarse mejor en el espectro (*power spectra*) de la señal,¹⁰ definido en términos del cuadrado de la amplitud de la transformada de Fourier de la señal:

$$S(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T dt q(t) \exp(2i\pi ft) \right|^2$$

o, equivalentemente para un proceso estacionario:

$$S(f) = 2 \int_0^\infty dt G(t) \cos(2\pi ft). \quad (2)$$

Se dice que $q(t)$ “tiene ruido $1/f$ ” cuando:¹¹

$$S(f) \sim 1/f^\beta$$

con $\beta \approx 1$ a bajas frecuencias.¹²¹³

¹⁰Ver Jansen 1998, apéndice D, páginas 141-145, para una ilustración específica de la relación entre la serie temporal original y su espectro.

¹¹Este comportamiento se ha detectado también en el ruido en exceso a baja frecuencia en conductores eléctricos con tendencia (*bias*), emisiones acústicas durante transformaciones martensíticas, movimientos bajo la acción de la gravedad en pilas de granos de arroz, congestiones de tráfico, fenómenos migratorios, etc. Ver, por ejemplo, P Dutta and PM Horn, *Rev.Mod.Phys.* **53**, 492 (1981); E Vives *et al.*, *Phys.Rev.Lett.* **72**, 1694 (1994); J Duran *et al.*, *Phys.Rev.E* **53**, 1923 (1996); K Nagel and M Paczuski, *Phys.Rev.E* **51**, 2909 (1995); E Albano, “Self-organized collective displacements of self-driven individuals”, *Phys.Rev.Lett.*, in press; K Christensen *et al.*, *Phys.Rev.Lett.* **77**, 107 (1996).

¹²Es decir, hasta longitudes de onda del tamaño de la muestra. En la práctica, para $0 < f_{\min} \leq f \leq f_{\max} < \infty$, donde f_{\min} es necesario para evitar la ‘catástrofe ultravioleta’ o divergencia de la energía a bajas frecuencias.

¹³Nótese que no todos los observables han de presentar espectro $1/f$ en un sistema crítico. De hecho, si el espectro de $q(t)$ se comporta $1/f^3$, el de su derivada $\partial q(t)/\partial t$ se comportará $1/f$.

Supongamos que $S(f) \sim 1/f^\beta$ y $G(t) \sim 1/t^\alpha$. Poniendo $x = 2\pi ft$ en (2), se sigue $1/f^\beta \sim 1/t^{1-\alpha}$, luego $\beta \approx 1$ implica $\alpha \approx 0$.¹⁴ Es decir, el “ruido $1/f$ ” implica correlaciones que se propagan muchísimo en el tiempo.¹⁵

También interesa generalizar (1):

$$G(r) = \langle n(\mathbf{r}_0) n(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{r}_0} - \langle n(\mathbf{r}_0) \rangle_{\mathbf{r}_0}^2,$$

donde $n(\mathbf{r}, t)$ es un campo que describe el estado del sistema. Por ejemplo, si $n(\mathbf{r}, t)$ es la densidad local de partículas en un líquido o la magnetización local en un cristal magnético, $G(r)$ representa una **función de correlación espacial**.

Lejos de la temperatura crítica, estas correlaciones decaen exponencialmente, $G(r) \sim \exp(-r/\xi)$ más allá de la **longitud de correlación** ξ . Este parámetro diverge $\xi \sim |T - T_C|^{-\nu}$ al aproximarse a la temperatura crítica. En el punto crítico, $T = T_C$, la función de correlación cambia su comportamiento funcional de exponencial a algebraico, $G(r) \sim r^{-\eta}$. En consecuencia, la divergencia de ξ se considera como señal de ausencia de una escala característica de longitudes en T_C . En la práctica, las funciones de distribución suelen ser más apropiadas que $G(r)$ para evidenciar invariancia de escala.

- Siguiendo la observación de von Humboldt (1807) de que las áreas mayores acomodan más especies que las pequeñas, suele admitirse hoy día como ley básica de la biodiversidad que el número de especies S en un área x satisface

$$S = Ax^z,$$

aunque no hay acuerdo sobre el valor de z , que se ha medido entre 0.26 y 1.36.¹⁶

- Turbulencia total (*fully developed*), caracterizada por una función de correlación (o función de estructura) para la velocidad que tiene comportamiento potencial,

$$\langle |\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{0})|^2 \rangle \sim |\mathbf{r}|^\zeta, \quad \zeta \approx \frac{2}{3},$$

¹⁴¡Hemos olvidado aquí los problemas de convergencia de la integral! Notar que, no puede tenerse $G(t) \sim 1/t^\alpha$ para $\beta = 1$ sino que se sigue entonces un lento decaimiento logartmico, $G(t) \sim 1/\ln t$.

¹⁵De hecho, implica más correlaciones que si se tratara de *ruido blanco* ($\beta = 0$) pero menos que en el caso de *ruido browniano* ($\beta = 2$).

¹⁶ML Rosenzweig, *Science* **284**, 276 (1999)

entre un límite superior, la escala en la que el sistema es perturbado o “arrastrado” (ver pág.29), y un límite inferior, la escala disipativa.

El origen de la IE en sistemas con interacciones de corto alcance es todavía misterioso.

Se observa que los sistemas —aislados— en equilibrio termodinámico presentan esta propiedad en sus puntos críticos; de hecho, sencillos argumentos muestran que estos sistemas tienen comportamiento exponencial, salvo en superficies o puntos aislados en el espacio de parámetros, a menos que haya interacciones de largo alcance o simetrías especiales.¹⁷

Pero estos argumentos no aplican, y la IE podría ser más general, en situaciones de noequilibrio,¹⁸ cuando los sistemas son “arrastrados” externamente y/o atravesados por corrientes de modo que no pueden alcanzar el estado de equilibrio termodinámico. En estos casos, la falta de una escala característica para las longitudes y para el tiempo se manifiesta en una geometría espacial fractal y en fluctuaciones temporales $1/f$.¹⁹

Volvamos sobre el concepto de **criticalidad**. Para medir cómo reacciona el sistema a una perturbación externa puede definirse el *tiempo de respuesta* —o reacción— característico y la *longitud de correlación* —o escala para las longitudes—, a lo largo de la que decae espacialmente la perturbación. En un estado ordinario (no crítico), aunque la respuesta puede diferir en detalle al cambiar la posición y el instante de la perturbación, la distribución de respuestas es estrecha y queda bien caracterizada por la respuesta promedio.

¹⁷Ver, por ejemplo, G Grinstein, *J. Appl. Phys.* **69**, 5441 (1991). Las excepciones al argumento para sistemas en equilibrio son el caso de interacciones suficientemente largas, que pueden producir invariancia de escala (imagino que semejante a la ley de estados correspondientes en la teoría de campo medio) y el caso de ciertas simetrías especiales: rotacional y traslacional, respectivamente, para el modelo de Heisenberg en su fase ferromagnética en campo cero y para una interfase rugosa sin efectos gravitatorios (S.-k. Ma, *Modern Theory of Critical Phenomena*, Benjamin, NY 1976).

¹⁸PL Garrido *et al*, *Phys. Rev. A* **42**, 1954 (1990) argumenta teóricamente que las correlaciones en sistemas fuera del equilibrio con ley de conservación local decaen algebraicamente (potencialmente), pues las fluctuaciones en magnitudes que se conservan sólo pueden desaparecer mediante procesos difusivos, descritos por leyes potenciales.

¹⁹Noto que la teoría SOC requiere la presencia de ambos en ausencia de escalas características. Así, ha de establecerse que el sistema tiene un espectro $1/f$ y, además, fractales espaciales, que son generalmente más difíciles de identificar.

Por el contrario, la misma perturbación aplicada cambiando la posición y/o el instante origina una respuesta de tamaño impredecible si el sistema es crítico; el promedio puede no existir y, en cualquier caso, no es una medida suficiente de la respuesta.

Para ilustrar esta situación, consideremos un montón de arena o de arroz, con la forma de un cono invertido. Si vamos añadiendo granos de arena con cuidado podremos conseguir situaciones marginalmente estables como en el caso del piano.²⁰ A partir de ese momento, al añadir un grano en una posición de la pendiente elegida al azar, se producirá una *avalancha* de granos que caracterizaremos por el número de granos, s , involucrados en la avalancha (por ejemplo, los que se desplazan, o los que caen fuera del cono), y por la duración t de ésta. La respuesta del sistema está caracterizada por distribuciones estadísticas $P(s)$ y $P(t)$, respectivamente.²¹ En el estado crítico esperamos:

- leyes potenciales, $P(s) \sim s^{-\tau}$ y $P(t) \sim t^{-\alpha}$.
- Por supuesto, los rangos de variación respectivos tienen límites inferiores, s_1 y t_1 ; por ejemplo, como mínimo, una avalancha ha de involucrar el desplazamiento de un grano, y durar un tiempo igual al que tarda un grano en moverse una distancia igual al tamaño de un grano.
- Para sistemas finitos de tamaño lineal L , suele observarse un cambio (*crossover*) hacia decaimiento exponencial por encima de cierta escala, $P(s) \sim \exp(-s/s_2)$ si $s > s_2$.
- Si el sistema está en un estado crítico genuino, la escala para este cambio ha de crecer con el tamaño; típicamente, $s_2 \sim L^\omega$ con $\omega > 0$.

²⁰Quizás sea necesario hacer el montón bi-dimensional restringiéndolo a que se forme entre dos vidrios paralelos próximos. Más adelante veremos en este capítulo cómo representar en el ordenador una situación ideal de este tipo.

²¹En matemáticas se habla de:

función densidad $p(x)$, definida de modo que $p(x)dx$ es la probabilidad de que la variable estocástica tome valor en el intervalo de longitud dx alrededor de x , y de **función de distribución**, o probabilidad de que la variable estocástica en $(-\infty, +\infty)$ tome un valor menor que x :

$$P(x) = \int_{-\infty}^x dx' p(x').$$

En física no suele hacerse tal distinción, por lo que —para evitar confusiones (aunque yo procuraré hacer esa distinción)— es importante notar que, en el caso de leyes potenciales, el exponente de $P(x)$ iguala al de $p(x)$ más 1.

- En consecuencia, si $\tau < 2$, no existe el promedio de la distribución en el límite de un sistema macroscópico (para el que L es del orden de 10^8 veces el volumen molecular típico, luego $s_2 \sim \infty$).
- Si $\tau < 3$, no existe el segundo momento de la distribución, y su “anchura” —definida como la desviación estándar— es infinita.

También se habla de **criticalidad auto-organizada** (*self-organized criticality*, SOC), pues podría haber sistemas fuera del equilibrio que no necesitaran ser *sintonizados* para mostrar comportamiento crítico, sino que su propia dinámica les conduciría de modo natural hacia un estado caracterizado por correlaciones algebraicas.²² Se acepta la necesidad de escalas temporales bien separadas para que pueda ocurrir tal evolución hacia un estado dinámico SOC. Más concretamente, el proceso relacionado con el agente que mantiene al sistema fuera del equilibrio (el campo no-hamiltoniano que hemos de mantener en un circuito para producir la corriente eléctrica, por ejemplo) ha de ser mucho más lento que el proceso de relajación interna. La sismicidad proporciona un ejemplo típico, pues los esfuerzos en la corteza terrestre se van acumulando en una escala de años, como consecuencia del movimiento de placas tectónicas, mientras que se liberan en unos pocos segundos o minutos durante el terremoto. Esta separación de escalas temporales está íntimamente relacionada con la existencia de *umbrales* y *metastabilidad*. Un ejemplo de Jensen (1998) hace evidente esta relación:

Empujamos el piano para que deslice por el suelo. Inicialmente nos parece anclado pero, al seguir forzándolo, se acumula energía elástica en la interfase piano-suelo hasta que la fricción ya no es capaz de seguir aguantando nuestra fuerza. El piano da entonces un pequeño salto adelante, liberando la energía acumulada, la fuerza aplicada disminuye, y el ciclo comienza de nuevo.

Hemos de vencer un **umbral** —acumular la energía necesaria— lo que ocurre en una escala temporal mucho mayor que el corto intervalo temporal que caracteriza el salto que libera o disipa —casi instantáneamente— esa energía. Si no hubiera umbral, por tener una interfase suelo-piano perfecta, sin rozamiento, el piano

²²Según P Bak, C Tang and K Wiesenfeld, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 381 (1987), esta propiedad sería característica de una gran clase de sistemas naturales.

se movería continuamente disipando energía a la vez que se le trasmite.

La fricción a vencer por el piano en cada momento depende de los detalles microscópicos de cómo el pie rugoso se acopla con las rugosidades del suelo, luego hay —muchísimos— estados diferentes en los que el piano queda *pegado* mientras es empujado. Estos estados del sistema piano–suelo son **metaestables** pues, aunque son independientes del tiempo (esto es, aparentemente estables) su energía no es la menor posible debido a la energía elástica acumulada y todavía no liberada.

Entre los estados metastables son particularmente importantes las configuraciones visitadas por el piano al saltar, cuando de hecho describe un movimiento entrecortado. El conjunto de estos estados, llamados **marginalmente estables**, será muy rico puesto que, llegados a esta situación, un incremento en la fuerza aplicada puede originar cualquier respuesta: ausencia de movimiento o un salto muy corto o uno relativamente largo, esto es, de longitud total impredecible.

Los estados marginalmente estables en sistemas fuera del equilibrio (como es el caso del sistema piano–suelo manipulado por un agente externo *no-hamiltoniano*) están caracterizados por funciones algebraicas y ausencia de una escala típica para longitudes y tiempos, como pasa con las configuraciones de un sistema termodinámico en su punto crítico.

La **teoría SOC de Bak, Tang and Wiesenfeld** (BTW) defiende que hay muchos sistemas capaces de alcanzar espontáneamente esta situación, sin necesidad de que el experimentador sintonice un determinado valor para uno o varios parámetros (como en el caso de la condensación, que hemos de hacer $T = T_C$). Esta teoría ambicionaba explicar por qué los fractales y las series (fractales) con fluctuaciones $1/f$ son tan comunes en la naturaleza. De hecho, a pesar de todo lo que hoy sabemos acerca de los fractales (ver capítulo fnl04), todavía no entendemos bien por qué se forman. ¿Qué aspectos en la evolución o en la dinámica de los sistemas complejos son responsables de la formación de fractales? Muchos materiales forman estructuras cristalinas, como los metales y la sal común. No es demasiado sorprendente puesto que las fases cristalinas ordenadas se corresponden con la mínima energía posible. Pero los fractales no se corresponden con la configuración de mínima energía en equilibrio termodinámico, luego su formación debe de ser guiada por algún principio dinámico de selección mientras el sistema evoluciona (generalmente hacia un estado estacionario fuera del equilibrio).

BTW especulan que SOC podría formar fractales y ruido $1/f$ mediante el siguiente mecanismo. Una señal circula por un sistema si encuentra un camino conectado de regiones *activas* (por encima del umbral). Si el sistema es conducido al azar (como el piano) o parte de un estado aleatorio, las regiones activas formarán una cierta red aleatoria. La dinámica interna inducida por el arrastre externo modifica, o correlaciona, esta red. Cuando el sistema se relaja (disipa energía), cesa esta dinámica y casi todas las regiones quedan por debajo del umbral. Pero el lento arrastre externo activará eventualmente alguna región, y vuelve a comenzar el proceso que permite la relajación. El resultado será una complicada telaraña de regiones acopladas dinámicamente. Una vez alcanzado este estado SOC marginalmente estable, el arrastre producirá flashes de actividad impredecible, consecuencia de propagaciones a lo largo de distintas rutas.

La acción combinada del arrastre externo y de la relajación interna del umbral sugiere, pues, que se tendrá finalmente una compleja maraña de caminos dinámicos como la que caracteriza la “percolación” de un líquido a través de un sólido poroso. Y no sería extraño que esta geometría resultante tuviese naturaleza fractal. Si las regiones activas fuesen fractales de distinto tamaño, habría que esperar que la duración del proceso de relajación inducido, consecuencia de propagación a través de estos fractales, variase al azar en un rango muy amplio.

En este capítulo, entre otras cosas, también trataré de concretar en modelos específicos estas ideas abstractas y heurísticas de BTW.

Nota: La teoría SOC se proponía originalmente dar una “explicación al ruido $1/f$ ”. Resulta que tal pretensión es errónea en un sentido estrictamente técnico,²³ aunque la hipótesis ha resultado tener un contenido físico muy interesante.

Para poder concretar todas estas ideas, introduzco ahora dos modelos que muestran IE; uno es un sistema en equilibrio (aunque admite variantes que no lo están), el otro alcanza un estado estacionario fuera del equilibrio.

²³HJ Jensen, K Christensen and HC Fogedby, *Phys. Rev. B***40**, 7425 (1989)

2.- Percolación: criticalidad en el equilibrio

Sea una red cuadrada $L \times L$. Cada nudo está ocupado con probabilidad ρ , y vacío con probabilidad $1 - \rho$.²⁴ Si generamos con el ordenador un número suficiente de ‘configuraciones’, esto es, realizaciones independientes de este sistema, observaremos que

- todas las configuraciones para una densidad dada ρ son igualmente probables, y
- las configuraciones ‘típicas’, representativas —de hecho, todas salvo un conjunto de medida nula— tienen un aspecto aleatorio, sin estructura alguna.

Siguiendo con el análisis, observaremos

- la existencia de *cúmulos*, esto es, grupos de nudos que son vecinos próximos (VP) y están ocupados,
- cuya distribución de tamaños tiene un corte abrupto para un *tamaño característico* que depende de ρ . Más concretamente,
 - por encima de una *densidad crítica* ρ_c el tamaño característico es ‘infinito’, esto es, hay un cúmulo que comprende una fracción finita de todos los nudos ocupados. Este cúmulo resulta hacerse más denso y compacto al aumentar ρ .
 - Para $\rho = \rho_c$, el cúmulo infinito existe, pero es poco denso y está esparcido —de hecho, su estudio muestra que puede caracterizarse por una dimensión fractal no trivial.
 - A bajas densidades, sólo hay pequeños cúmulos aislados, pero el tamaño característico diverge cuando ρ se acerca a ρ_c , y la distribución de tamaños tiende a seguir una ley potencial.

Definiendo la probabilidad $p_\infty(\rho)$ de que un nudo cualquiera pertenezca al cúmulo infinito,

$$p_\infty(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho < \rho_c \\ 1 & \text{si } \rho = 1 \end{cases}.$$

²⁴El modelo se generaliza inmediatamente para una red cúbica simple en dimensión d ; aquí consideramos $d = 2$ para visualizar mejor algunos resultados. También nos restringimos al caso de percolación aleatoria de sitios, aunque pueden definirse otras variantes. Véase D. Stauffer, *Introduction to Percolation Theory*, Taylor, London 1985.

En $\rho = \rho_c$, $p_\infty(\rho)$ comienza a crecer monótonamente hacia la unidad, y se mide en las proximidades de esta transición que

$$p_\infty(\rho) \sim (\rho - \rho_c)^\beta, \quad \rho \rightarrow \rho_c^-.$$

A este fenómeno, cuyo comienzo está caracterizado por un *exponente crítico*, β , al igual que ocurre en la condensación y en otros cambios de fase termodinámicos familiares, se le llama **percolación**. La magnitud $p_\infty(\rho)$, que refleja los cambios de simetría en la transición, es el **parámetro de orden**.

Este sencillo modelo es susceptible de muchas interpretaciones. Por ejemplo, permite investigar beneficios en un sistema con riesgo (de perderlos). Para ser concretos, supongamos que los nudos ocupados representan árboles. Para una configuración dada, se lanza una chispa a uno de los nudos de modo que, si está ocupado, se inicia un fuego forestal que se propaga inmediatamente; si está vacío, nada se quema.

El *beneficio* a obtener, B , es madera y se define como la densidad de árboles que quedan sin quemar después de saltar la chispa, promediada sobre todas las posibles configuraciones (con objeto de obtener un resultado típico). Una vez iniciado el fuego, se quema todo el cúmulo asociado, esto es, el fuego se propaga a todos los árboles que sean VP de uno incendiado.

Sea p_s la densidad de sucesos de tamaño s , y $P(s)$ la distribución acumulada de sucesos de tamaño mayor o igual a s . Se sigue para el beneficio:

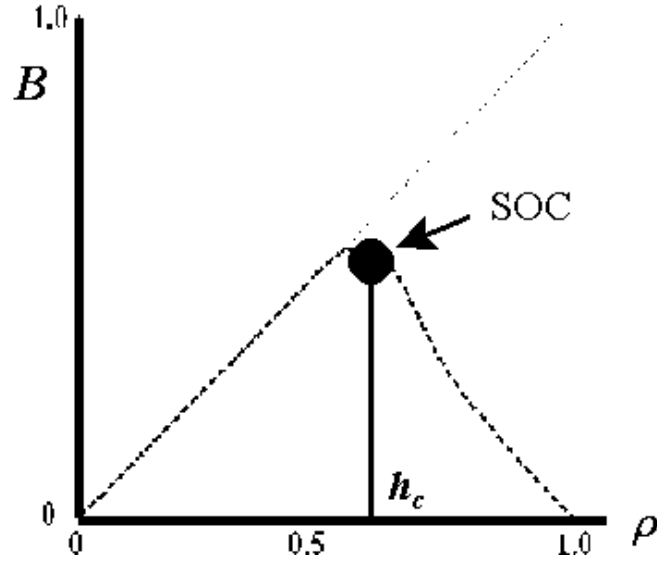
$$B(\rho) = \rho - \langle s \rangle,$$

donde $\langle p \rangle$ es un promedio sobre configuraciones (para que sea típico).

En general, también hay que promediar sobre la distribución espacial de chispas (para que tampoco dependa de ese detalle). Pero esto no es importante en el caso aleatorio que aquí interesa puesto que, por invariancia traslacional, los resultados son independientes de la distribución de chispas.

El beneficio B en función de la densidad inicial ρ (para este caso de percolación aleatoria) resulta:

El máximo posible corresponde a la diagonal $B = \rho$, que se obtendría si la fracción de árboles quemados al caer la chispa fuera despreciable. Esto ocurre



en el modelo si la densidad es baja (no hay cúmulos infinitos). Alrededor de un cierto valor de ρ , ρ_c , se observa un cambio bien definido, y $B(\rho)$ comienza a decrecer monótonamente con ρ hasta llegar a cero cuando $\rho = 1$ (todo está conectado, luego todo se quema).

El cambio en $\rho = \rho_c$ es aquí suave, pero se hace abrupto si $N \rightarrow \infty$, evidenciando el cambio de fase que llamamos *percolación*.

El beneficio puede calcularse como la suma de contribuciones asociadas con casos en los que:

- (i) la chispa no acierta en el cúmulo infinito, lo que tiene probabilidad $1 - p_\infty(\rho)$, y toda la densidad permanece como beneficio, y
- (ii) la chispa cae en el cúmulo infinito, lo que tiene probabilidad $p_\infty(\rho)$, y sólo queda el resto:

$$\begin{aligned} B(\rho) &= [1 - p_\infty(\rho)] \rho + p_\infty(\rho) [\rho - p_\infty(\rho)] \\ &= \rho - p_\infty^2(\rho) \end{aligned}$$

Así, el beneficio tiene una sencilla relación con el parámetro de orden, y cerca del punto crítico está caracterizado por el exponente 2β . Se sigue que, en este caso, el beneficio óptimo coincide con el punto crítico.

3.- Pilas de arena y sus variantes

Un autómata celular inspirado en la dinámica de las pilas de arena sirvió como primera ilustración del concepto de SOC.²⁵ Sin embargo, los experimentos en sistemas reales no han llegado a confirmar las hipótesis.

En efecto, inmediatamente después de la propuesta BTW, se estudió un equivalente del autómata celular original y otros casos parecidos sin detectar evidencia de leyes potenciales.²⁶

Las configuraciones típicas muestran una pendiente θ que oscila entre el ángulo de reposo θ_r y una pendiente máxima θ_m . Al perturbar el sistema, θ aumenta gradualmente hasta θ_m , momento en el que se produce un deslizamiento que prácticamente afecta a toda la ladera, hasta que se recobra el mínimo θ_r . Esto es, las distribuciones asociadas son muy estrechas, y la dinámica es oscilatoria en lugar de crítica.

Al repetir estos experimentos en sistemas similares bajo condiciones experimentales muy cuidadosas,²⁷ se ha observado el mismo comportamiento oscilatorio para las pila grandes, mientras que las avalanchas (entre 3 y 80 granos en un caso) en pilas de menor tamaño, así como pequeñas avalanchas (entre 2 y 20 granos) que pueden detectarse en los sistemas grandes entre sus oscilaciones típicas, se describen muy bien con una distribución $P(s) \sim s^{-\tau}$, $\tau \in [2.134, 2.5]$, donde s representa la masa desplazada fuera del sistema por la avalancha.²⁸

En cualquier caso, a pesar de este comportamiento tipo SOC, la dinámica de estos sistemas está condicionada por los grandes sucesos, de modo que, como concluye Jensen (1998), las pilas de arena reales no muestran invariancia de escala en espacio y tiempo.

El desacuerdo se ha atribuido a la inercia en el movimiento de los granos de arena.

²⁵P Bak, C Tang & K Wisenfeld, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 381 (1987); *Phys. Rev.* **A38**, 364 (1988); K. Wisenfel, C Tang & P Bak, *J. Stat. Phys.* **54**, 1441 (1989)

²⁶HM Jaeger *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 40 (1989), *Science* **255**, 1523 (1992)

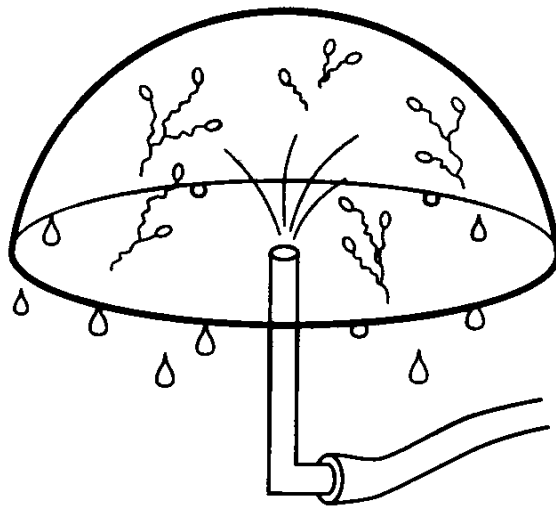
²⁷Held *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1120 (1990); Bretz *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2431 (1992); Rosendahl *et al.*, *Phys. Rev.* **E47**, 1401 (1993)

²⁸Es interesante que el comportamiento temporal de estas pequeñas avalanchas es similar al de los pequeños ‘recuerdos’ después de un seísmo. Según una ley de F Omori [*J. College Sci. Imper. Univ. Tokyo* **7**, 111 (1895)] el número de éstos en el instante t después de un gran terremoto decae $n(t) \sim 1/t^\alpha$ con $\alpha \in [1, 1.5]$ y lo mismo se observa después de una de las grandes avalanchas que describen Jaeger y colaboradores.

De hecho, es posible que, dada su forma aproximadamente esférica, se facilite el que puedan ganar energía cinética, lo que facilitaría el que acabasen arrastrando a otros, y predominantemente observaríamos avalanchas que involucran a toda la ladera, esto es, sucesos grandes sin comportamiento algebraico.

Esto ha sugerido experimentos que eviten la acción de la gravedad,²⁹ y también el estudio de otros sistemas donde el efecto inercial no sea tan notable. En particular, se han estudiado avalanchas de pulsos de flujo magnético —consecuencia del movimiento de vórtices— en superconductores tipo II,³⁰ las de gotas de agua en el cristal de una ventana golpeada por la lluvia.

Esta situación ha sido recreada lanzando agua finamente pulverizada sobre la superficie interior de una cúpula de Plexiglas.³¹



Cuando las gotas adquieren masa suficiente para vencer la adherencia característica de la interfase agua-vidrio, se deslizan por la superficie interior y, eventualmente, se juntan con otras hasta caer por los bordes de la cúpula. Se mide la cantidad de agua que cae en función de t —para pulverizaciones ligeras, con objeto de

²⁹Por ejemplo, P Evesque (Ecole Central de Paris) ha sugerido estudiar dinámica granular en una centrifugadora colocada en una nave de la ESA, de modo que puedan determinarse los efectos de campos gravitatorios entre 10^{-6} y 10^3 veces el terrestre.

³⁰S Field *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 1206 (1995). Jensen (1998), páginas 18-23, explica claramente lo que es un superconductor tipo II y los detalles del experimento.

³¹B Plourde *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2749 (1993)

evitar distintas ‘avalanchas’ para el mismo valor de t . (El efecto de la viscosidad puede evaluarse realizando el experimento para varias temperaturas.)

y las avalanchas que se producen en una pila de arroz.³²

Los efectos inerciales pueden minimizarse con granos de arroz puesto que son menos densos y simétricos que los de arena, y hay variedades que tienen una superficie basta.

Así, se ha mostrado que, para granos adecuados —y corrigiendo los efectos de tamaño finito en el sistema, necesariamente pequeño— la energía potencial gravitatoria que liberan los granos al descender en avalancha sigue generalmente una ley $P(E) \sim E^{-\tau}$ con $\tau \simeq 2.04$ durante una década y media.

No siguen este comportamiento las avalanchas pequeñas —para las que $P(E)$ es prácticamente constante— ni las pilas formadas con granos simétricos y bien pulidos, que siguen una *exponencial extendida*, $P(E) \sim \exp[-(E/E_0)^\gamma]$ con $\gamma \simeq 0.45$, aunque este caso también evidencia cierta IE.³³

La conclusión de estos experimentos es que, con mucha generalidad, se observan leyes potenciales, aunque es dudoso que los sistemas investigados sufran el fenómeno SOC tal como fue originalmente enunciado.

Estas ambigüedades pueden analizarse en modelos de ordenador que simulen el comportamiento de los sistemas reales. De hecho, el paradigma de SOC, esto es, invariancia de escala sin necesidad (aparente) de ajustar parámetro alguno es un autómata celular inspirado en las pilas de arena. A diferencia del modelo para la percolación, este sistema es explícitamente dinámico. Se trata de un sistema abierto dotado de una regla dinámica local que, aunque trata de mimetizar la situación real, es arbitraria; de hecho, está diseñada buscando sencillez y eficacia para ser implementada en el ordenador. Iterando repetidamente esta regla, el sistema evoluciona hacia la densidad crítica, mostrando comportamiento SOC.

Sea una red $L \times L$ que puede albergar un número entero de granos (de arena, por ejemplo) en cada nudo, $h(i, j)$. Se procede añadiendo granos, uno

³²V Frette *et al.*, *Nature* **379**, 49 (1996)

³³En efecto, Jensen (1998, pág.18) argumenta que, dado que Frette encuentra un tamaño característico para la avalancha, $E_0 \simeq 0.45L$, donde L es la base de la pila, de modo que E_0 crece con L , la dinámica no tiene una escala intrínseca para la energía en este caso.

a uno, esto es,

$$h(i, j) \rightarrow h(i, j) + 1, \quad (3)$$

en sitios elegidos al azar. El sitio (i, j) se desmorona cuando su altura h excede el umbral h_u . Esto ocurre en este modelo (PA) disminuyendo $h(i, j)$ en una cantidad fija dada que inmediatamente se distribuye entre los lugares VP de (i, j) .

Para concretar, tomemos $h_u = 4$ y la regla de desmoronamiento:

$$h(i, j) \geq h_u = 4 : \begin{cases} h(i, j) \rightarrow h(i, j) - 4 \\ h_{VP} \rightarrow h_{VP} + 1 \end{cases} \quad (4)$$

Cuando el sitio que se desmorona pertenece al límite del sistema, el sistema pierde arena. Esta regla de desmoronamiento se itera hasta que todos los sitios quedan con $h(i, j) < h_u$, y se añade entonces otro grano al azar, y así sucesivamente.

Esta dinámica puede interpretarse como consecuencia de que un gradiente local condiciona la estabilidad. La pila es estable en \mathbf{r} si el gradiente en ese punto es menor que un umbral, $z(\mathbf{r}) < z_c$; en otro caso, es inestable y los granos caen por la ladera.³⁴

Para plasmar esta interpretación, imaginemos el caso más sencillo de una red unidimensional, con h_i granos en i y una pendiente local $z_i = h_i - h_{i+1}$. La dinámica consiste en dos operaciones:

(a) Añadimos un grano en i , $h_i \rightarrow h_i + 1$, lo que cambia:

$$\begin{aligned} z_i &\rightarrow z_i + 1, \\ z_{i-1} &\rightarrow z_{i-1} - 1. \end{aligned} \quad (5)$$

(b) Si es $z_i > z_c$, un grano ha de caer a la siguiente posición, luego $h_i \rightarrow h_i - 1$, $h_{i+1} \rightarrow h_{i+1} + 1$, y se siguen los cambios:

$$\begin{aligned} z_{i-1} &\rightarrow z_{i-1} + 1, \\ z_i &\rightarrow z_i - 2, \\ z_{i+1} &\rightarrow z_{i+1} + 1. \end{aligned} \quad (6)$$

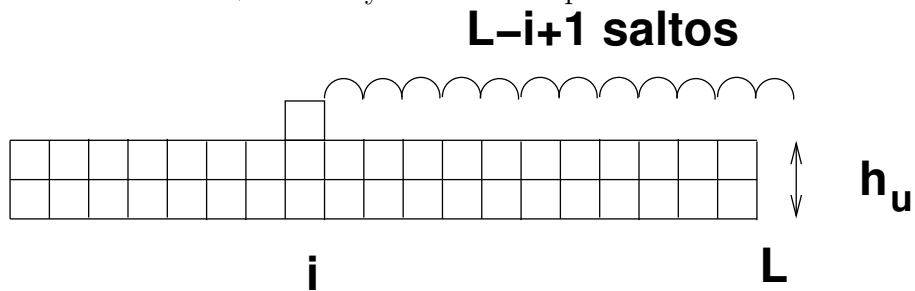
³⁴Esta es la versión *pendiente* en contraposición con la versión *altura* definida arriba (Jensen 1998). Suponemos aquí que el gradiente z es un escalar —que toma valores enteros—, pero no hay modificaciones importantes si se supone vector, como se muestra B McNamara & K Wiesenfeld *Phys. Rev. A* **41**, 1867 (1990).

PROBLEMA 2.1: Propongo que comprueben estas afirmaciones haciendo un gráfico para esta situación unidimensional, y que estudien las consecuencias de esta dinámica con cuidado.

No es difícil predecir el comportamiento en el caso unidimensional. Si la ladera inicial es muy pronunciada, el sistema relaja hasta que $h_i = h_u \forall i$.³⁵ Se dice que este estado es un **atractor global** pues, independientemente de la configuración inicial,³⁶ terminamos en él por aplicación sucesiva de las reglas (3) y (4). Es interesante cómo el sistema dinámico selecciona una configuración muy atípica entre todas las configuraciones estables posibles.

El atractor global es un ejemplo de **configuración mínimamente estable**, pues la adición de más granos conduce siempre a relajación. También es una **configuración crítica**, en el sentido de que cualquier adición conduce a sucesos de todos los tamaños. Puesto que este estado crítico consiste en una sola configuración (lo que no es cierto para redes con $d > 1$), es posible comprender explícitamente este caso:

Imaginemos una perturbación consistente en aplicar (3) en un lugar i elegido al azar con probabilidad uniforme. Se supera el umbral (la pendiente local se hace *sobrecrítica*) y se produce relajación. Concretamente, hay ‘avalancha’ consistente en que un grano de arena es transportado desde i hasta rebosar por el extremo libre en L , momento en el que el sistema queda estabilizado. Esto involucra $L - i + 1$ sitios y otros tantos pasos.



³⁵Es decir, si $z_i > z_c$ para $0 \leq i \leq L$ en el ‘modelo pendiente’ hay relajación según la regla (b) hasta que $z_i = z_c \forall i$.

³⁶Notad que, partiendo de una superficie plana, $h_i = 0 \forall i$, se iría —bastante artificialmente— a configuraciones con grandes valores negativos de $h_i - h_{i+1}$, simplemente porque (b) no involucra el valor absoluto de $|z_i|$.

En consecuencia, si $P(s)$ es la probabilidad de que la relajación involucre s sitios, y $P(t)$ la de que sean necesarios t pasos temporales para restablecer una configuración estable, se tiene $P(s) = P(t)$, igual a la distribución uniforme en $[1, 2, \dots, L + 1]$, esto es,

$$P(t) = \begin{cases} \frac{1}{L+1} & \text{si } i \in [1, 2, \dots, L + 1] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En contraposición con la sencillez de este caso unidimensional, y de la sencillez *microscópica* del caso general, el comportamiento *macroscópico* que genera el algoritmo PA —y sus posibles variantes— es generalmente complejo y lejos de trivial, incluso para $d = 2$.

De hecho, como sugiere la fig.(a), el modelo no parece tener correlaciones de largo alcance en general y,³⁷ sin embargo, las avalanchas muestran una distribución potencial para los *tamaños* (esto es, número de sitios que se desmoronan como resultado de añadir un único grano a la pila). El modelo también manifiesta **auto-similitud** en relación con ciertos rasgos espaciales y temporales, por ejemplo, formas fractales de las regiones individuales que sufren avalanchas —fig.(b)— y espectros potenciales de las series temporales de sucesos.

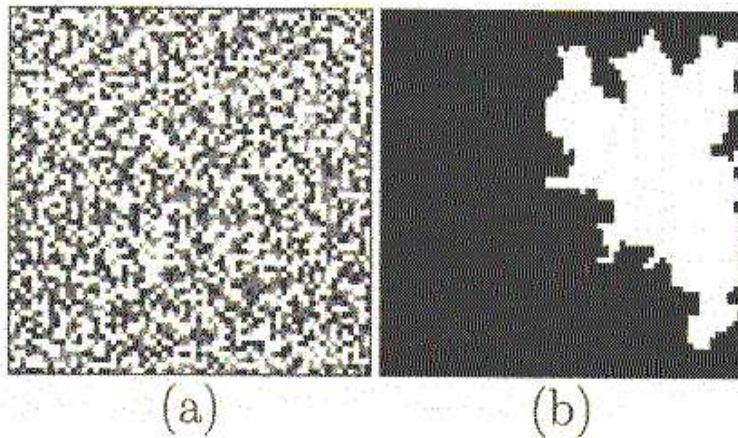
Siguen configuraciones obtenidas en el ordenador:

Configuraciones típicas generadas mediante el algoritmo PA en una red 64×64 : (a) Cada nudo se representa con un cuadradito en la escala de grises, desde negro para $h = 0$, hasta blanco para $h = 3$. (b) El blanco ilustra la naturaleza fractal de un suceso típico, esto es, el conjunto de sitios afectados por una avalancha grande.

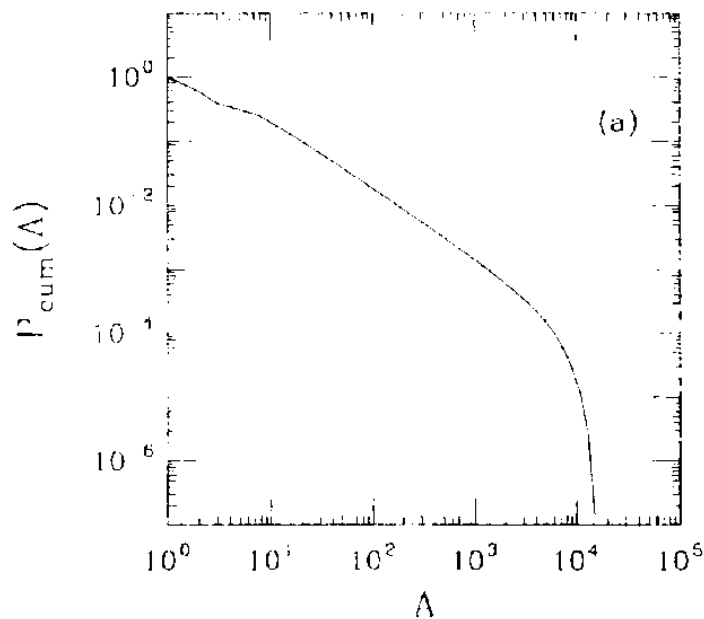
Es notable la similitud entre la IE que manifiesta este paradigma de SOC —un sistema definido por su dinámica, que le conduce a estados que, aunque sean estacionarios, no son de equilibrio— y la que muestran los sistemas en equilibrio —por ejemplo, el caso de percolación aleatoria— cerca de su punto crítico.³⁸ A continuación, describo algunos detalles del comportamiento que implica el algoritmo PA.

³⁷Se conocen, sin embargo, reglas basadas en propiedades locales que definen un subconjunto de configuraciones permitidas —ver D.Dhar, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1613 (1990).

³⁸La semejanza entre SOC y comportamiento crítico en el equilibrio llega al punto de que pueden establecerse *mapeados*:



Se observa claramente cómo la ley potencial que describe la distribución de los tamaños de los sucesos se extiende desde la escala microscópica —sitios individuales— hasta la escala macroscópica —el tamaño del sistema: Comportamiento potencial, $\sim A^\alpha$, de la probabilidad de observar



- J.M. Carlson *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2547 (1990); *ibid Phys. Rev.* **E48**, 688 (1993)
- O. Narayan & A.A. Middleton, *Phys. Rev.* **B49**, 244 (1994)
- M. Paczuski, S. Maslov & P. Bak, *Phys. Rev. E* **53**, 414 (1996)

De hecho, el punto crítico en el PA se asocia con una densidad crítica (altura media) de arena en la pila alrededor de $\langle h \rangle_c = 2.125$.

un suceso de tamaño igual o mayor que A , en una red 128×128 ; este comportamiento se extiende desde los sucesos individuales hasta los que tienen tamaño comparable al del sistema.

En el PA, definimos *beneficio* como el número de granos que no son afectados por la avalancha inducida por la adición de un grano a la pila. Más concretamente:

- esperamos hasta que el sistema alcanza un estado estadísticamente estacionario;
- consideramos una configuración dada después de una iteración completa de las reglas de adición, (3), y desmoronamiento, (4);
- calculamos, en esa configuración, la suma de alturas en los sitios del subconjunto U que no ha sido afectado en ese suceso particular —como la región negra de la fig.(b) mostrada más arriba;
- promediamos a lo largo del tiempo³⁹ para obtener el beneficio:

$$B(\rho) = \left\langle \frac{1}{N^2} \sum_U h(i, j) \right\rangle.$$

En un gráfico $B(\rho)$ similar al de la página 14, este cálculo sólo produce —también dibujado en aquella figura— un punto, $B_c = B(\rho = \langle h_c \rangle)$, en las proximidades del máximo de la curva de trazo discontinuo para la percolación. El hecho de que no obtengamos de este modo una curva $B(\rho)$ como la de percolación se interpreta en la teoría BTW como que el sistema PA tiene la propiedad SOC, esto es, su dinámica le conduce espontáneamente a un estado estacionario de densidad (crítica) $\langle h_c \rangle$.

A pesar de esta diferencia, es sencillo establecer una conexión directa entre PA y percolación si consideramos el siguiente **modelo PA primitivo**:

- suponed que podemos manipular un grado de libertad adicional, la densidad inicial; esto es, empezamos con la red vacía y añadimos granos al azar hasta alcanzar una densidad dada;

³⁹En este caso, la media temporal con esta dinámica iterativa es equivalente a promediar sobre distintas realizaciones independientes, esto es, sobre lo que se llama una *colectividad* en Física estadística. De hecho, los resultados no dependen de la distribución espacial usada para añadir granos. Por ejemplo, se obtiene esencialmente la misma distribución de tamaños para los sucesos si los granos se añaden en un sitio particular, que si añaden en un subconjunto o aleatoriamente por todo el sistema.

- en este proceso exigimos que todas las alturas queden por debajo del límite prefijado (por ejemplo, $h_u = 4$), de modo que se obtiene una distribución ‘truncada’, con alturas restringidas a valores $h(i, j) \in [0, 1, 2, 3]$ y el valor medio ajustado para tener la densidad dada;
- añadimos un grano y calculamos el beneficio B (otra vez, como el número de granos en los sitios no perturbados) en función de la densidad, y promediamos sobre el estado inicial y sobre la perturbación.

El resultado es una curva continua similar a la de percolación (esto es, el trazo discontinuo en la figura de la página 14). En consecuencia,

- el máximo beneficio ocurre para densidades próximas al punto crítico, donde la avalancha es del orden del tamaño del sistema;
- sistemas con baja densidad no producen buenos resultados (quedan pocos granos después de la avalancha, pues había pocos inicialmente); y
- para densidades superiores a la crítica, la perturbación tienden a vaciar el sistema, por lo que se observa disminución del beneficio.

A pesar de la similitud con el PA ordinario, este PA modificado, más primitivo, no manifiesta SOC; los mecanismos que conducen a la densidad crítica son esencialmente distintos:

- en SOC, la densidad crítica es el **atractor global** de la dinámica, lo que es consecuencia del hecho de que el sistema es conducido a una velocidad infinitesimal (esto es, mediante pasos microscópicos)
- el PA modificado es sintonizado, variando la densidad, para obtener el máximo beneficio; esto mimetiza las estadísticas del SOC, pero no como consecuencia de ‘auto organización’.

Conclusión: no puede distinguirse entre estos dos casos —SOC y ‘SOC aparente’— mediante un simple análisis de sus estadísticas.⁴⁰

⁴⁰Menciono aquí el interesante preprint: J.M. Carlson & J. Doyle, *Highly Optimized Tolerance: A Mechanism for Power Laws in Designed Systems* (14 Abril 1999, probablemente para *Phys. Rev. E*), donde se definen sistemas HOT que —comparados con SOC y con sistemas en equilibrio como el de percolación— ilustran, en particular, cómo las leyes potenciales pueden ser un fenómeno muy general, no necesariamente asociado con una densidad única ni con mecanismos de criticalidad. Es posible que los sistemas reales combinen SOC u otros fenómenos que inducen aleatoriedad con diseño en el proceso de mutación y selección cuando evolucionan hacia estados complejos y eficaces. Como ejemplo, se discute en este trabajo el caso de *Internet* y otros ‘ecosistemas’

Pilas: versión pendiente

Profundizamos ahora en la fenomenología de las pilas volviendo a su ‘versión pendiente’ (Jensen 1998). Sea la red (*cúbica simple*) $L \times L$ en dimensión d con sus vectores básicos \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, \dots, d$. En cada sitio de la red definimos una variable dinámica $z(\mathbf{r})$ sometida a las siguientes reglas:

R1: *Perturbación conservativa:*

$$\begin{aligned} z(\mathbf{r}) &\rightarrow z(\mathbf{r}) + d \\ z(\mathbf{r} - \mathbf{e}_i) &\rightarrow z(\mathbf{r} - \mathbf{e}_i) - 1 \quad \forall i. \end{aligned}$$

R2: *Perturbación no-conservativa:*

$$z(\mathbf{r}) \rightarrow z(\mathbf{r}) + 1.$$

R3: *Relajación:* Si $z(\mathbf{r}) > z_c$:

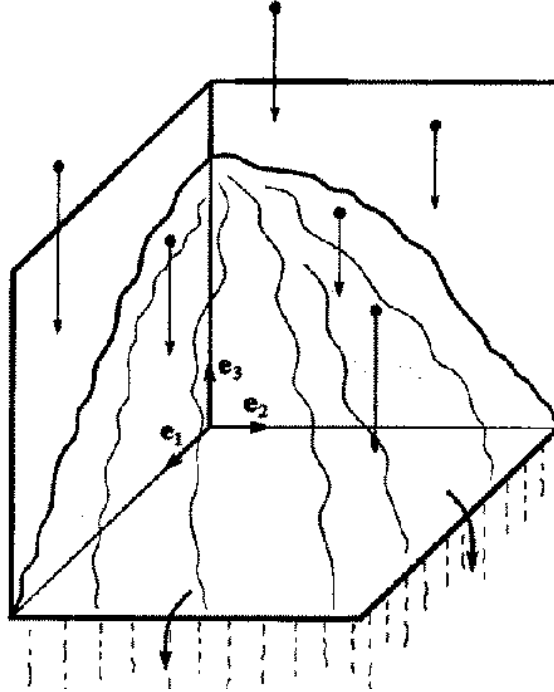
$$\begin{aligned} z(\mathbf{r}) &\rightarrow z(\mathbf{r}) - 2d \\ z(\mathbf{r} \pm \mathbf{e}_i) &\rightarrow z(\mathbf{r} \pm \mathbf{e}_i) + 1 \quad \forall i. \end{aligned}$$

R4: *Condiciones en los límites:* Imaginamos la pila en una esquina del cubo (suponemos $d = 3$ para ilustrar el caso), de modo que el exceso puede caer por los otros dos lados de la base: Podemos tomar:

- *Bordes cerrados:* $z(\mathbf{r}) = 0$ en las caras del cubo, esto es, en posiciones $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_d)$ en las que al menos una de las coordenadas $r_i = 0$.
- *Bordes abiertos:* la arena puede salirse por las aristas con $r_i = L$, esto es, si $z(\mathbf{r}) > z_c$ en estas aristas, se hace:

$$\begin{aligned} z(\mathbf{r}) &\rightarrow z(\mathbf{r}) - 2d + \text{number of } i \text{ with } r_i = L, \\ z(\mathbf{r} + \mathbf{e}_i) &\rightarrow z(\mathbf{r} + \mathbf{e}_i) + 1 \quad \text{si } r_i \neq L, \\ z(\mathbf{r} - \mathbf{e}_i) &\rightarrow z(\mathbf{r} - \mathbf{e}_i) + 1 \quad \forall i, \\ z(\mathbf{r}) &= 0 \quad \text{si } \exists \text{ una coordenada } r_i = 0. \end{aligned}$$

La red se actualiza simultáneamente. Todos los sitios críticos, $z(\mathbf{r}) > z_c$, se actualizan a la vez. Se define un **paso temporal** como una visita a todos los L^d sitios, en la que se comprueba si $z(\mathbf{r}) > z_c$ y, si éste es el caso, se actualiza. Se perturba según la regla R1 ó R2. Si aparecen sitios críticos, se produce relajación de acuerdo con las reglas R3 y R4 hasta que todos los sitios se hacen sub-críticos.



EJERCICIO: Se pide reproducir el comportamiento de este modelo en el ordenador, y estudiar con detalle sus propiedades. En particular, se pide concluir acerca de IE y SOC.⁴¹

En este estudio es necesario definir con rigor el concepto de **avalancha**. Supongamos que perturbamos un sitio \mathbf{r}_0 , elegido al azar, y se produce “avalancha”. Hablamos entonces de:

- **tamaño:** número $|A|$ de sitios \mathbf{r} conectados que pertenecen a la región A afectada por la avalancha,
- **centro de masas:**

$$\mathbf{R}_{\text{CM}} = \frac{1}{|A|} \sum_{\mathbf{r} \in A} \mathbf{r},$$

- **longitud típica:**

$$\ell = \frac{1}{|A|} \sum_{\mathbf{r} \in A} |\mathbf{r} - \mathbf{R}_{\text{CM}}|,$$

⁴¹Resuelto en Jensen (1998). Se lista un programa FORTRAN en apéndice A y los resultados de la simulación se analizan en Jensen (1998), pág. 35 y siguientes. Ver también SS Manna, *J. Stat. Phys.* **59**, 509 (1990) y P Grassberger, *Phys. Rev. E* **49**, 2436 (1994).

- **energía liberada:** número de sitios, s , que han de relajarse para que todos se hagan sub-críticos de nuevo
- **duración:** número total de actualizaciones simultáneas de la red completa que han de hacerse para que todos los sitios sean sub-críticos.

Estas tres magnitudes no son independientes, luego habría que calcular la densidad de probabilidad simultánea $P(\ell, s, t)$. En la práctica se estudian las distribuciones incondicionales (probabilidad de una variable, independientemente del valor de las otras dos):

$$P(\ell) = \int ds \int dt P(\ell, s, t)$$

$$P(s) = \int d\ell \int dt P(\ell, s, t)$$

$$P(t) = \int d\ell \int ds P(\ell, s, t),$$

que se supone han de ser leyes potenciales

$$P(\ell) \sim \ell^{-\lambda}, \quad P(s) \sim s^{-\tau}, \quad P(t) \sim t^{-\alpha}.$$

esto es, mostrar IE.⁴²

⁴²Este modelo tiene **dimensión crítica** $d_c = 4$. Se define d_c como la dimensión por encima de la que los exponentes críticos se hacen independientes de la dimensión y toman el valor clásico, esto es, el que predicen las teorías de campo medio. De hecho, dentro de la resolución numérica de estas simulaciones, se encuentran los mismos valores para los exponentes en $d = 4$ y $d = 5$; ver Jensen (1998), pág. 39.

Por otra parte, no se confirma por completo que el espectro sea de la forma $1/f$; ver Jensen (1998), pág. 39-42.

4.- Más invariancia de escala

Una característica notable de los sistemas con SOC es la extrema rapidez con que responden a perturbaciones externas (como golpes de ruido aleatorio extrínseco). Los tiempos de respuesta τ_R son muy cortos comparados con las escalas de tiempo típicas τ_P en las que son perturbados externamente o “arrastrados” (ver debajo).

De hecho,⁴³ se conviene que SOC sólo ocurre en el límite en el que $\kappa \equiv \tau_R/\tau_P$ es estrictamente cero; por el contrario, en los sistemas convencionales fuera del equilibrio, siempre es $\kappa > 0$ y, a menudo, $\kappa \gg 1$.

Podemos definir entonces SOC como un estado estadísticamente estacionario producido por procesos con una separación infinita de escalas temporales, esto es, $\kappa = 0$, que manifiesta IE en ausencia de interacciones de largo alcance sin sintonizar parámetros.

Tal separación extrema de escalas temporales se corresponde con un aspecto esencial de muchos fenómenos naturales. Esto lo ilustra, por ejemplo, la zona sísmica junto a una falla, donde el lento movimiento relativo de placas tectónicas puede llevar años, incluso décadas, hasta originar una inestabilidad que resulta en un terremoto. Una vez que éste comienza, sin embargo, puede terminar en unas decenas de segundos, resultando que $\kappa \sim 10^{-7}$.

Un hecho importante es pues que el límite $\kappa = 0$ puede inducir IE aun cuando ésta no exista para $\kappa > 0$. Esto es, la longitud de correlación finita, ξ , a partir de la que las funciones de correlación o distribución dejan de ser algebraicas y empiezan a caer exponencialmente, diverge para $\kappa \rightarrow 0$ en sistemas con SOC; por ejemplo, puede tenerse

$$\text{correlaciones} \sim x^{-\eta} \exp\left(-\frac{x}{\xi}\right),$$

con cierto exponente η , donde $\xi \rightarrow \infty$ para $\kappa \rightarrow 0$.

Estudiamos a continuación unos modelos (de incendios forestales y terremotos) cuya simulación en el ordenador parece evidenciar que satisfacen la hipótesis SOC. Tienen en común que:

⁴³Sigo ahora a G. Grinstein & C. Jayaprakash, *Computers in Physics* **9**, 164 (1995)

- son casos sin regla de conservación pues, como se mencionó, la IE en sistemas de noequilibrio con conservación local es común y bien entendida, y no requiere $\kappa = 0$;⁴⁴
- constan de una red regular —consideraremos el caso de red cuadrada— en cuyos nudos hay variables reales, no-negativas, acotadas;
- son perturbados o *arrastrados/conducidos* (en el sentido de que las variables son cambiadas en el tiempo) lentamente, hasta superar cierto umbral o límite de estabilidad;
- se relajan entonces mediante una ‘avalancha’ que restaura la estabilidad, esto es, se reducen los valores de las variables por debajo del límite de estabilidad, y se genera de nuevo una estabilidad mediante ese lento arrastre, y así sucesivamente;

estas avalanchas ocurren con velocidad infinita comparada con la del arrastre, asegurando que $\kappa = 0$, lo que quiere decir en la práctica que cada avalancha tiene una identidad bien definida,⁴⁵ lo que permite tener estadísticas para sus tamaños s y duraciones T .⁴⁶

⁴⁴Notamos que la variable dinámica de los modelos de pilas se conserva (excepto en los límites del sistema) en cada actualización, consecuencia de que la arena se conservaría en los sistemas reales en los que se inspiran. Pero hay situaciones reales en las que no se conserva el campo dinámico. Por ejemplo, cuando la variable dinámica representa fuerzas o esfuerzos locales, como correspondería a un modelo de movimientos sísmicos.

⁴⁵Si fuera $\kappa > 0$, el rrastre podría producir una segunda avalancha antes de que hubiese terminado la primera, de modo que las avalanchas podrían colisionar o interferir, lo que es típico de sistema de noequilibrio *convencionales*.

⁴⁶Esta circunstancia resulta muy conveniente pues, en lugar de tener que estudiar funciones de correlación —una magnitud difícil de analizar numéricamente— uno puede buscar las leyes potenciales en las distribuciones de estas variables.

Notar también que la distribución de probabilidad para las duraciones, $P(T)$, será algebraica si lo es la de tamaños, $P(s)$. Esto es consecuencia —ver P. Back, C. Tang & K. Wiesenfeld, *Phys. Rev. A* **38**, 364 (1988)— de que sucesos largos espacialmente correlacionados relajan lentamente (esto es el *retardamiento crítico* en el equilibrio).

4.1 – Propagación determinista de fuego (FF1)

- Las variables (con valores reales), $u_i(n) \in [0, 4]$, representan la altura de un árbol en el nudo i en el tiempo (discreto) n .
- La red tiene condiciones periódicas en los límites (pues minimiza los efectos del tamaño finito y, en consecuencia, el comportamiento resultante es “típico” de sistemas *razonablemente grandes*).
- Inicialmente, las alturas $u_i(0)$ se toman al azar con distribución uniforme en $[0, 2]$ (en otro caso, el modelo será totalmente determinista).
- Los árboles crecen a velocidad constante, p , que suponemos pequeña.
- Los árboles con altura $u \geq 2$ captan fuego espontáneamente, y se queman, lo que supondremos que reduce su altura en 2, en un solo *paso* o unidad de tiempo.
- El fuego se propaga en un paso desde un árbol ardiendo a todos sus vecinos j con $1 \leq u_j < 2$; esto permite la propagación de grandes fuegos.
- Las actualizaciones de u_i se hacen de modo simultáneo en toda la red en cada paso;

resumiendo, la regla dinámica es:

Quema	$u_i(n) \geq 2$	\implies	$u_i(n+1) = u_i(n) - 2$
Propaga	$1 \leq u_i(n) < 2$	\implies	$u_i(n+1) = 2u_i(n)$ (luego arderá en $n+2$)
	y $u_j(n) \geq 2$		
Crece	$u_i(n) \neq \text{anterior}$	\implies	$u_i(n+1) = u_i(n) + p$

donde j indica un vecino próximo de i .

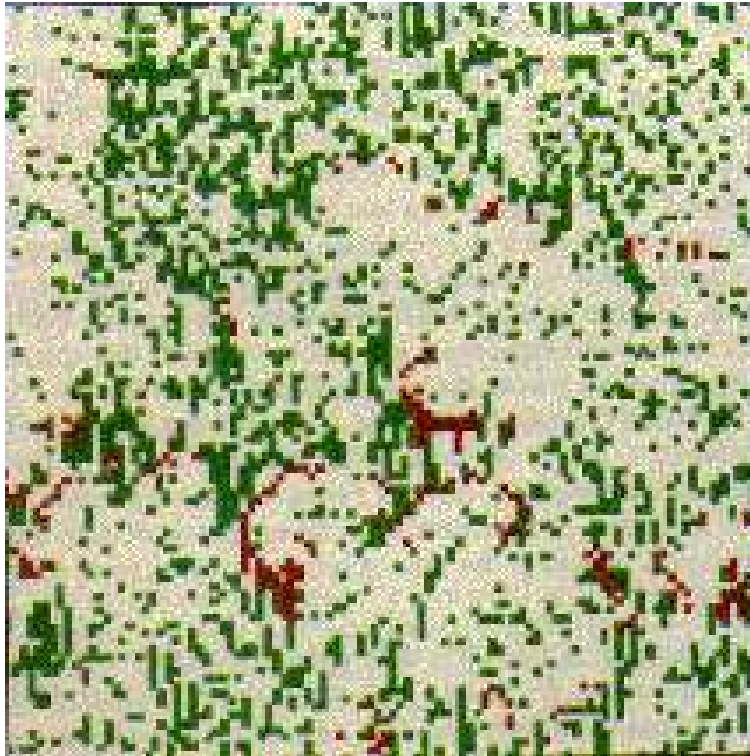
Aparte del *paso*, que es físicamente arbitrario, el crecimiento de un árbol desde 0 hasta 2 (el límite) puede tomarse como unidad de tiempo fundamental en este problema. Este tiempo es $2/p$, luego p^{-1} es la escala temporal físicamente relevante. Se siguen dos hechos importantes:

en el límite $p = 0$, el proceso de relajación (quema del bosque) es infinitamente rápido comparado con el crecimiento, lo que corresponde a la separación infinita de escalas temporales en el SOC.

para alcanzar un estado estadísticamente estacionario, es necesario iterar muchas veces el algoritmo, del orden de p^{-1} , lo que hace difícil obtener buenas estadísticas numéricas para pequeño p , el caso interesante, por ejemplo $p < 0.01$. Afortunadamente, puede estudiarse independientemente $p = 0$ (ver modelo SSM en página 35).

Para $p > 0$, el estado estacionario tiene una densidad constante, no-nula, de árboles quemados. Puesto que los fuegos forestales individuales no están bien definidos (salvo para $p = 0$), hay que acudir a las funciones de correlación para diagnosticar IE.

La figura:⁴⁷



⁴⁷K. Chen, P. Bak & M.H. Jensen, *Phys. Lett. A* **149**, 207 (1990); ver P. Bak, K. Chen & C. Tang, *Phys. Lett. A* **147**, 297 (1990) para un modelo semejante con variables discretas y crecimiento aleatorio.

Según J.L. Lebowitz, la propagación de fuegos, juntamente con el problema del tráfico y problemas moleculares, son casos bien comprendidos usando estas técnicas de sistemas complejos (leyes de escala, renormalización, puntos fijos,...).

Una configuración instantánea en red 100×100 con $p = 0.01$, que muestra árboles ardiendo ($u_i \geq 2$) en rojo y árboles grandes ($1 \leq u_i < 2$) en tonalidades verdes; el fondo restante son árboles pequeños ($u_i < 1$).

muestra que:

- el fuego forma curiosos frentes uni-dimensionales, tendiendo a quemar grupos de árboles ‘maduros’ (grandes) y a dejar árboles ‘quemados’ (pequeños) detrás;
- consecuentemente, la dimensión fractal del conjunto de fuegos es casi 1 para distancias x menores que una longitud de correlación típica ξ , que parece crecer como $1/p$ al disminuir p hacia el límite numérico de $p \sim 0.01$;
- para $x > \xi$, se mide $D \simeq 2$, como corresponde a una densidad no-nula de fuegos;
- estos resultados numéricos sugieren la divergencia de ξ e IE en el límite $p = 0$ para un sistema infinito,
- sin embargo, simulaciones⁴⁸ para $p < 0.01$ no han confirmado esto, por lo que (suponiendo que no se trata de dificultades de la simulación para valores tan pequeños de p) habría que concluir que FF1 no tiene IE, que confirma luego un cálculo directo para $p = 0$.

⁴⁸JES Socolar, G Grinstein & C Jayaprakash, *Phys. Rev. E* **47**, 2366 (1993)

4.2 – Modelo probabilista de fuego forestal (FF2)

Ahora suponemos que

$$u_i(n) = \begin{cases} 1 & (\text{árbol}) \\ 0 & (\text{nada, hueco}), \end{cases}$$

de modo que la versión con tiempo discreto y actualización simultánea que consideramos aquí es un **autómata celular**. Además, suponemos:

- condiciones límites periódicas;
- condiciones iniciales aleatorias;
- la regla dinámica, en cada paso, es
 - con probabilidad (pequeña) p , crece un árbol en cada hueco, esto es, $u_i(n+1) = 1$ si $u_i(n) = 0$;
 - con probabilidad (todavía menor) f , cada árbol se inflama y quema, esto es, $u_i(n+1) = 0$ si $u_i(n) = 1$;
 - este fuego se propaga instantáneamente a todo el cúmulo de árboles conectados al dado mediante enlaces VP, quedando el grupo reducido a huecos, esto es, con probabilidad 1, $u_j(n+1) = 0$ si $u_j(n) = 1$ y j pertenece al mismo grupo de VPs mutuos que un árbol que se quema en este paso.

Esta propagación instantánea asegura la separación infinita de escalas temporales que requiere el SOC. De hecho, en cada paso, hay fuegos individuales, de tamaño s , independientes entre sí: los s árboles que se queman a la vez por pertenecer a un mismo cúmulo.

Es razonable esperar IE en el estado estacionario para algún valor del parámetro libre f/p .

Si:

N es el número de sitios,

ρ es la densidad media estacionaria de árboles, y

$\langle s \rangle$ el número medio de árboles en un cúmulo,

entonces,

- $pN(1 - \rho)$ = número de medio de nuevos árboles en cada paso,
- $fN\rho\langle s \rangle$ = n^omedio de árboles destruidos en cada paso, si f es suficientemente pequeño (en otro caso, hay interferencia entre cúmulos s)

Cuando se igualen estas tendencias,

$$\langle s \rangle \sim \frac{1 - \rho}{\rho} \left(\frac{p}{f} \right),$$

de donde, puesto que $0 < \rho < 1$, se tiene que

$$\langle s \rangle \rightarrow \infty \quad \text{en el límite} \quad f/p \rightarrow 0.$$

El tamaño medio puede escribirse $\langle s \rangle = \sum_{s=1}^{\infty} sP(s)$, luego el resultado anterior parece indicar que la función de distribución $P(s)$ ha de decaer más lentamente que una exponencial con s en ese límite (de otro modo no divergería el tamaño medio), es decir,

$$P(s) \sim s^{-\tau}, \quad \tau < 2, \quad \text{para } f/p \rightarrow 0.$$

Este resultado se ha confirmado numéricamente,⁴⁹ y resultados exactos han mostrado la existencia de leyes potenciales en la versión unidimensional del modelo.⁵⁰ Es decir, hay SOC, cuando la velocidad de los incendios es infinitesimal comparada con la velocidad de crecimiento de los árboles ($f/p \rightarrow 0$), y ésta infinitesimal comparada con la velocidad de propagación del fuego a los vecinos en el cúmulo.⁵¹

⁴⁹B. Drossel & F. Schwabl, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1629 (1992); CL Henley, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2741 (1993)

⁵⁰B. Drossel, S. Clar & F. Schwabl, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3739 (1993)

⁵¹Estas circunstancias son más restringidas que en la propuesta original de Bak y, de hecho, relajando cualquiera de estas condiciones sólo se observa IA hasta cierto límite, incluso para $L = \infty$.

4.3 – Movimientos sísmicos (SSM)

Es un modelo determinista que trata de capturar lo esencial en la dinámica de terremotos, donde el movimiento relativo de dos placas tectónicas en una falla produce un lento pero constante incremento de los esfuerzos en varios puntos (que imaginamos localizados en los nudos de una red) a lo largo de la falla.⁵²

Representamos los esfuerzos mediante números reales no negativos, $u_i(n)$. Cuando el esfuerzo en un punto excede un límite dado (ej. 4), desliza — todo o parte— hacia los puntos VPs haciéndose cero en el punto dado; si alguno de los VPs supera entonces el límite, se produce otra transferencia, y así sucesivamente. Estas cascadas de deslizamientos se interpretan como terremotos; se define el tamaño como el número s de deslizamientos.

Este algoritmo es similar en lo esencial al FF1 en el límite $p = 0$, de modo que se cumple explícitamente la condición SOC $\kappa = 0$.

Puede realizarse como sigue:

- Suponemos condiciones iniciales aleatorias, con $0 \leq u_i(0) < 4$ para todo i , y límites abiertos (lo que es importante; ver problema 2.2).
- Crecimiento (inestabilidad):
 - Si $u_i(n) < 4$ para todo i , identificar un lugar $i = I$ en el que $u_i(n)$ toma su máximo valor.

⁵²Este modelo ha sido propuesto en Z Olami, HJS Feder & K Christensen, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1244 (1992); aquí sigo Grinstein & Jayaprakash, citado.

Mencionemos también que se han detectado leyes lineales, y todo lo que éstas implican, en las propiedades de la superficie terrestre; desde este punto de vista, se contempla la posibilidad de predecir terremotos. Más concretamente, la litosfera tiende a considerarse como un sistema no-lineal que genera desastres geológicos.

Este punto de vista está cualitativamente justificado en

- VI Keilis-Borok, *Physica D* **77**, 193 (1994); *Proc.Natl.Acad.Sci.USA* **93**, 3748 (1996)
- Z. Olami *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1244 (1992)
- K. Christensen & Z. Olami, *Phys. Rev. A* **46**, 1829 (1992)

Modelos de fracturas relacionados en:

- R. Blumenfeld & RC Ball, *Physica A* **177**, 407 (1991)
- WI Newman, DL Turcotte & AM Gabrielov, *Phys. Rev. E* **52**, 4827 (1995)
- S. Sahimi & S. Arbabi, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3689 (1996)
- DL Turcotte, *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*, 2nd ed. Cambridge Uni. Press. 1997.

- Hacer $u_i(n+1) = u_i(n) + 4 - u_I(n)$ para todo i , con objeto de volver I inestable y precipitar un terremoto.
- Deslizamiento (‘terremoto’): Para todo i tal que $u_i(n) \geq 4$, hacer
 - $u_i(n+1) = 0$, y
 - para todo j VP de i : $u_j(n+1) = u_j(n) + \alpha u_i(n)$ si $u_j(n) < 4$.
(Si j tiene más de un VP i con $u_i(n) \geq 4$, entonces j recibe esfuerzos de todos ellos en el paso $n+1$.)

Notar que la regla de distribución conserva el esfuerzo total en el sistema para $\alpha = 0.25$ (red cuadrada), y hay argumentos para esperar IE en presencia de conservación. Se dispone de evidencia numerica de que podría haber IE para $0.05 < \alpha < 0.25$ —por ejemplo,⁵³ $P(s) \sim s^{-(B+1)}$ con $B \approx 0.9$ para $\alpha = 0.2$ con redes hasta $L = 200$, y B parece variar continuamente con α — pero hay que ser cauto antes de concluir definitivamente.⁵⁴ Además, no está claro lo genérico que es el SSM. De hecho, si generalizamos a $u_j(n+1) = \gamma u_j(n) + \alpha u_i(n)$ la regla de transferir esfuerzos, tenemos que el SSM equivale a ajustar el nuevo parámetro al valor $\gamma = 1$, lo que colocaría al SSM en el mismo eje del comportamiento caótico, esto es, dándole un máximo exponente de Lyapunov de cero.

⁵³P Grassberger, *Phys. Rev. E* **49**, 2436 (1994)

⁵⁴Podría existir una longitud de correlación finita (mayor que la que se manifestaba en el FF1) cuyo origen no entendemos actualmente:

- W Klein & J Rundle, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1288 (1993)
- K Chistensen, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1289 (1993)

4.4 – Problemas

PROBLEMA 2.2: Escribid un programa de ordenador para investigar la distribución de probabilidad $P(s)$ de fuegos forestales de tamaño s en el modelo FF1 con $p = 0$.

La estrategia para trabajar en $p = 0$ consiste en desestabilizar estados estables creciendo todas las variables uniformemente hasta que el árbol mayor alcanza el límite de inestabilidad y se prende fuego (como se ha discutido para el SSM).

Tomar condiciones iniciales aleatorias, y evolucionar hasta alcanzar el estado estacionario.

No hay criterio automático. Habrá que analizar alguna(s) de las magnitudes de interés cuando uno cree haberlo alcanzado, y ver si esperando más no se altera el resultado. Típicamente, en presencia de IE, uno espera que la evolución transitoria crezca algebraicamente con el tamaño lineal del sistema.

Medir entonces s , el número total de árboles que se queman (cada árbol contribuye el número m de veces que se quema), para cada fuego, y producir estadísticas suficientes para estimar razonablemente $P(s)$.

Puesto que, de nuevo, no hay criterio automático, habrá que comparar la $P(s)$ obtenida con dos series estadísticas de diferente longitud.

Hacer dibujos log–log y log–lineal de $P(s)$ para saber si decae algebraica o exponencialmente.

Os encontraréis con la naturaleza del análisis numérico. Toma mucho tiempo acumular estadísticas aceptables —incluso para tamaños como $L = 32$ — y, una vez que se tienen, es difícil decir cuáles son los mejores ajustes. En parte debido a que el tamaño finito (pequeño) del sistema tiende a modificar (a partir del momento en que la longitud de correlación iguala L) el comportamiento de $P(s)$ a partir de cierto s , mayor cuanto mayor es L . Es necesario, pues, analizar distintos valores de L para conocer la zona de $P(s)$ afectada por el tamaño finito.

Decidid si vuestro modelo (FF1 en $p = 0$) tiene IE o no, y discutid vuestra conclusión.

PROBLEMA 2.3: Investigad $P(s)$ y $\langle s \rangle$ para terremotos en el SSM con condiciones periódicas en los límites, con $L \in [4, 16]$, durante unos 100 pasos:

- ¿Tiene este sistema IE?
- ¿Cómo cambian los resultados comparados con el caso de límites abiertos?
- Comparad con las conclusiones en JES Socolar, G Grinstein & C Jayaprakash, *Phys. Rev. E* **47**, 2366 (1993), P Grassberger, *Phys. Rev. E* **49**, 2436 (1994) y AA Middleton & C Tang, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 742 (1995).

PROBLEMA 2.3: Este tipo de modelos requiere programas de ordenador muy eficientes, que permitan investigar redes grandes evolucionando largo tiempo. Con este objeto hay que programar adecuadamente la regla dinámica, que es un proceso iterativo, el que consume más tiempo en el ordenador. Ejemplos:

- si hay que localizar el lugar con mayor altura, no es recomendable repasar toda la red en cada paso;
- habrá que programar eficazmente cómo llevar la cuenta de los sitios preparados para una transición — como, por ejemplo, cuando sólo los sitios VPs de uno que es afectado en n pueden ser afectados en $n + 1$

Para que notéis la importancia de estos detalles, comparad la eficacia de vuestro programa para el problema 2.2 con la de Grassberger: *Phys. Rev. E* **49**, 2436 (1994)

4.5 – Más fuegos forestales

Consideremos el siguiente modelo de fuego forestal,

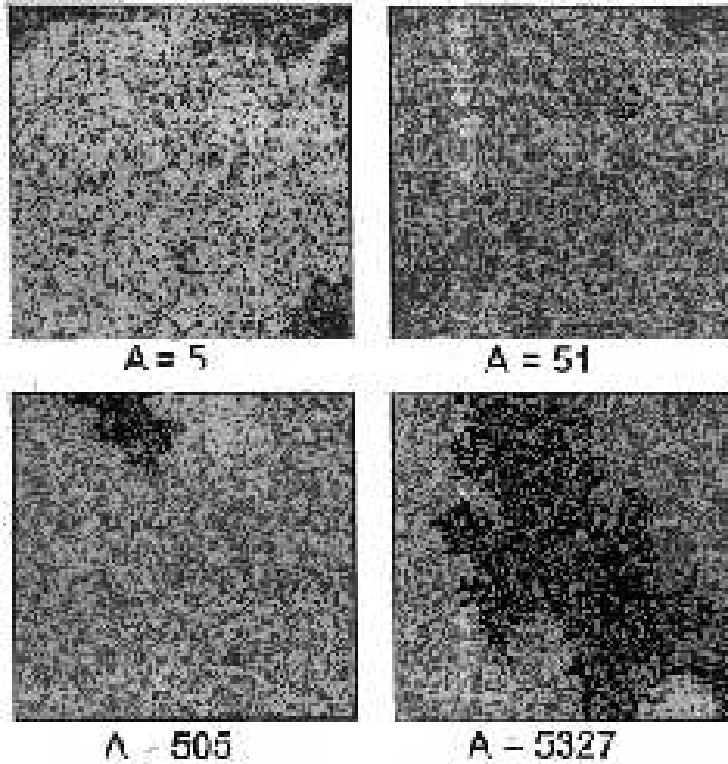
en un trabajo de G Morein, BD Malamud & DL Turcotte, ‘Log-Periodic Behavior in a Forest-Fire Model’, preprint, preparado para J. Stat. Phys., que lleva fecha 24/3/99.

En B. Drossel, ‘SOC and Synchronization in the Forest-Fire Model’, preprint (probablemente para Phys. Rev. E con fecha 8/3/99), hay bibliografía comentada —en la introducción— sobre estos modelos, y se estudia la versión uni-dimensional.

para el que disponemos de resultados explícitos y es parecido a FF2 (con bordes abiertos):

- red cuadrada regular con N_g nudos y límites abiertos;
- en cada paso, elegimos un nudo al azar;
- en la mayoría de los casos, esto es, a lo largo de $f^{-1} - 1$ pasos (por ejemplo, 99 si $f = 1/100$), se planta un árbol en el nudo seleccionado si está vacío;
- periódicamente, con frecuencia f (esto es, en el paso 100 para $f = 1/100$), se echa una cerilla al nudo que, si está ocupado, prende fuego al árbol y a los adyacentes (el fuego se detiene en los bordes si llega a ellos);
- el paso se repite N_S veces y se determina el número N_F de fuegos con área s_F , esto es, el número de árboles a los que se propaga el fuego de una cerilla.

Por este procedimiento se han obtenido, por ejemplo, los siguientes cuatro fuegos típicos a lo largo de una misma evolución:

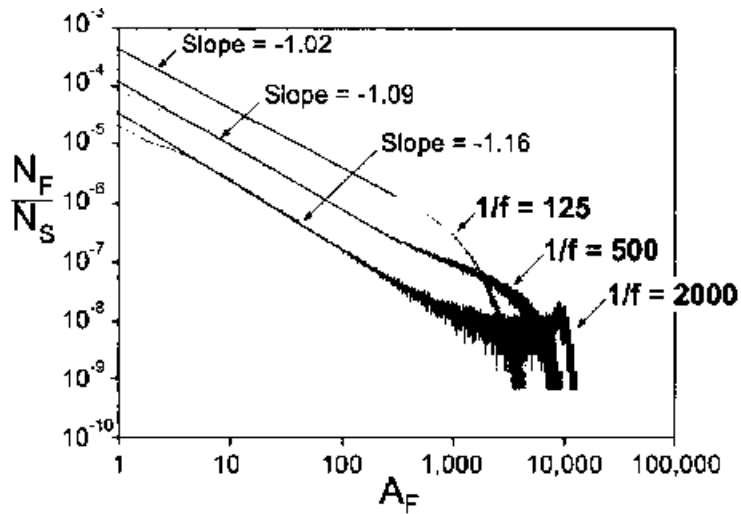


En este caso la red es 128×128 y $f = 1/2000$. Los puntos negros son árboles quemados; los grises, sin quemar; los claros, sitios vacíos. Se indica el área s_F en cada caso. Uno de los fuegos se ha extendido por toda la red.

- Resultados numéricos (el modelo admite solución campo medio): luego se tiene

$$\frac{N_F}{N_S} \sim s_F^{-\alpha}, \quad \alpha \approx 1.$$

Para fuegos grandes, hay desviaciones claras de este comportamiento. Al disminuir la frecuencia f , los fuegos grandes se hacen más numerosos, y la desviación es hacia arriba (respecto de la ley potencial para pequeños fuegos): los árboles se queman antes de que se formen grandes cúmulos si f es grande (por ejemplo, $f = 1/125$), pero, si f es suficientemente pequeña (por ejemplo, $f = 1/2000$) llegan a formarse cúmulos ‘infinitos’ antes de que se inicie el fuego. Esa desviación aparece aproximadamente para $s_F = 2000$ (1/8 de la red) si $f = 1/2000$. Los cúmulos grandes siguen comportamiento esperado (ver trabajo original).



Otros sistemas interesantes en los que aparecen los fenomenos de invariancia de escala y SOC incluirían los terremotos y gas reticular (como en Jensen pág. 42-75), tráfico, también DLG, procesos de contacto (en biología), etc.

C2.- Ejemplos de la química y de la biología.

Algunos sistemas químicos complejos pueden ser relevantes para comprender el origen de la vida, esto es, permiten adentrarse en dos problemas fundamentales:⁵⁵

- ¿cómo obtener la variedad de comportamientos que caracterizan células y organismos a partir de colecciones de moléculas? y
- ¿cómo pudieron ensamblarse originalmente moléculas individuales en colecciones que mostraran las características de la vida (disipación de energía, auto-réplica y adaptación)?

En este capítulo quiero describir algunos de estos modelos. Por supuesto, no voy a contestar a esas preguntas. Es más, no está todavía claro si es conceptualmente posible conectar, de modo determinista, los procesos a nivel molecular con el comportamiento de organismos vivos. De hecho, conociendo por completo las propiedades electrónicas del silicio (Si) y las características operacionales de los transistores nos dice muy poco acerca de las propiedades emergentes a alto nivel de los ordenadores. En todo caso, aquí no nos interesa responder a esas preguntas, sino aprender física.⁵⁶

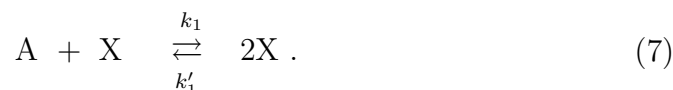
⁵⁵G.M. Whitesides & R.F. Ismagilov, 'Complexity in Chemistry', *Science* **284**, 89 (1999)

⁵⁶Además, resulta que, como ha mostrado la investigación reciente, en el intento de conectar biología con química se ha desarrollado ésta hasta el punto de poder diseñar potentes medicamentos específicos, esto es, moléculas que tienen las propiedades adecuadas (forma, propiedades superficiales y campos electrostáticos asociados) para interactuar específicamente con una parte de la superficie de una proteína determinada.

Un determinado tipo de procesos bioquímicos pueden ser modelados por un sistema abierto en el que continuamente se están metiendo reactivos y sacando productos de la reacción para mantener un estado estacionario de no equilibrio. El estudio de tal sistema ideal ayuda a entender la formación y estabilidad estructuras espacio-temporales complejas en biología. En tal modelo, uno podría también considerar que las moléculas pueden difundir. Los sistemas cuya dinámica viene descrita por una competencia entre procesos de reacción y difusión son importantes para entender muchos problemas en física y otras disciplinas⁵⁷. Entre los primeros modelos de este tipo destacan los gases reticulares cinéticos cuya dinámica incluye una competición entre procesos de reacción y difusión cuyo estudio y desarrollo ha sido llevado a cabo por matemáticos⁵⁸ y físicos⁵⁹ durante las últimas décadas del siglo XX.

1.- Ecuaciones de reacción–difusión macroscópicas

Consideremos la más simple reacción autocatalítica ⁶⁰:



que se corresponde con un sistema con una concentración c_A de moléculas tipo A, y una concentración m de moléculas de tipo X (especies autocatalíticas). Las moléculas de A reaccionan con X con una rate k_1 para formar otra molécula de X; la reacción inversa transcurre con rate k'_1 . Se sigue que $c_A m k_1 = m^2 k'_1$ en el estado estacionario. Supongamos ahora que las moléculas de B están también presentes con concentración c_B , y que se forma una nueva especie química C debido a la reacción de B con X:



El régimen estacionario está caracterizado por $c_B m k_2 = c_C k'_2$ dado que esta reacción es independiente de (7). Si las dos reacciones están acopladas, la

⁵⁷Turing A, *Philos T Roy Soc B* **237** 37, 1952

⁵⁸ver, por ejemplo, Kurtz T *J Appl Prob* **7** 49 (1970), Aronson DG & Weinberger HF, *Partial Differential Equations and Related Topics*, JA Goldstein ed., Springer-Verlag 1975, Arnold L & Theodosopulu M *Adv Appl Prob* **12** 367 (1980).

⁵⁹Nicolis G & Prigogine I *Self-organization in Nonequilibrium Systems*, Wiley Interscience 1977, Haken H *Advanced Synergetics* Springer 1983.

⁶⁰Schlögl F, *Z Phys.* **253**,147 (1972), Grassberger P & de la Torre A, *Ann Phys* **122** 373 (1979)

variación temporal neta de m se puede escribir como

$$\frac{d m}{d t} = F(m) = \frac{\partial \Phi(m)}{\partial m}. \quad (9)$$

La segunda igualdad define un potencial $\Phi(m)$, and

$$F(m) \equiv c_A m k_1 - m^2 k'_1 - c_B m k_2 + c_C k'_2. \quad (10)$$

El estado estacionario se corresponde con $F(m) = 0$, que implica que m es proporcional a $c_A k_1 - c_B k_2$ para $c_B k_2 < c_A k_1$; de cualquier forma el catalizador eventualmente desaparece ($m = 0$) para $k'_1 \neq 0$ y $c_C k'_2 = 0$. Modelos similares a (7)–(10) aparecen en muchas otras disciplinas abarcando desde la física a las ciencias sociales.⁶¹

El modelo incluido en (9) es demasiado simple para describir orden fuera del equilibrio en la naturaleza, que a veces incluye inhomogeneidades espaciales. Este es el caso si uno considera, por ejemplo, las oscilaciones espaciales y temporales que aparecen en la famosa reacción Belousov–Zhabotinsky⁶² o de forma más general la coexistencia de varias fases de no-equilibrio. Con esto en mente necesitamos asumir que m es una función tanto de t como de \mathbf{r} . También necesitamos un término de difusión que induzca correlaciones espaciales. De hecho, la dinámica de un gran número de diferentes sistemas viene dada por ecuaciones de tipo reacción–difusión de la forma

$$\frac{\partial m(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D \nabla^2 m(\mathbf{r}, t) + F[m(\mathbf{r}, t)], \quad (11)$$

donde $F(m)$ se puede obtener de un potencial $\Phi(m)$ como antes (por ejemplo, Smoller *J Shock Waves and Reaction-diffusion Equations* Springer 1983). Una generalización más natural de (11) es considerar que la magnitud relevante o parámetro de orden (por ejemplo, la partícula, momento, o densidad de energía de un fluido) satisface

$$\frac{\partial m(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathcal{F}(m, \nabla m, \dots). \quad (12)$$

La dependencia de \mathbf{r} mostrada en (11) y (12) requiere un comentario. Consideremos el problema químico desde un punto de vista más microscópico. Dividamos la sustancia reactante en muchas pequeñas cajas cúbicas de cara a ,

⁶¹Un modelo de desarrollo de dos especies, una de las cuales es la fuente de comida para la otra, se puede encontrar en Kurtz (1970), y un modelo de varios sistemas reaccionando químicamente se puede encontrar en Haken (1983)

⁶²Ver por ejemplo Zhabotinsky A and Zaikin A *J Theor Biol* **40** 45, (1973)

con N_x moleculas en la caja x . Definamos la probabilidad conjunta $P(\dots, N_{x-1}, N_x, N_{x+1}, \dots)$. La equation (11) se puede ver como una descripción continua del sistema discreto. Esto nos es una simple transformación formal ya que involucra un escalado temporal y espacial que tiene una motivación física muy importante. Hay que sumar sobre todos los grados de libertad que son irrelevantes a nivel macroscópico. Por ejemplo, sumariamos sobre los muchísimos (del orden de 10^{13} por segundo) cambios microscópicos producidos por colisiones durante un instante macroscópico dt los 10^{24} atoms que hay en una gota macroscópica de fluido. Entonces, el comportamiento fluctuante microscópico ha sido promediado en ecuaciones deterministas como (12). El mismo método puede utilizarse para obtener ecuaciones macroscópicas no solo para $m(\mathbf{r}, t)$ sino también para las funciones de correlación como $C(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) \equiv \langle N_x N_{x'} \rangle - \langle N_x \rangle \langle N_{x'} \rangle$. Esto es importante porque el estudio de las fluctuaciones es esencial para comprensión de muchos fenómenos. Esto es, restringiendonos al estudio de $m(\mathbf{r}, t)$ mediante su valor medio es equivalente a una aproximación de campo medio en la que uno no tiene en cuenta correlaciones producidas por el proceso de reacción en sí mismo; ver por ejemplo Kang K & Redner S *Phys Rev A* **32** 455 (1985).

Las ecuaciones de reacción-difusión, caracterizadas por su función potencial Φ , son la descripción relevante en el nivel macroscópico (o hidrodinámico) para un gran número de fenómenos que incluyen una estrategia de optimización. La propiedad subyacente es que un mecanismo rápido de reacción permite la existencia de muchos atractores que son ‘visitados’ gracias al acoplamiento con un mecanismo de difusión relativamente lento. Además, dos o más ecuaciones de reacción-difusión pueden describir el comportamiento de algunos sistemas incluso más complejos. El campo también es interesante ya que el comportamiento crítico de los sistemas de reacción-difusión puede ser variado.⁶³

2.- La reacción Belousov-Zhabotinsky (BZ)

BZ designa una clase de reacciones químicas caracterizadas por oscilaciones bien definidas,⁶⁴ que se tiene como paradigma de sistema complejo. Para nosotros, físicos, tiene el interés añadido de tratarse de un modelo definido en términos de ecuaciones fenomenológicas al que puede dotársele de una base microscópica.

⁶³Ver por ejemplo Ohtsuki T & Keyes T *Phys Rev A* **35** 2697 (1987); *ibid* **36** 4434.

⁶⁴A.N. Zaikin & A.M. Zhabotinsky, *Nature* **225**, 535 (1970); I. R. Epstein & K. Showalter, *J. Phys. Chem.* **100**, 13132 (1996)

Se trata de la operación simultánea de dos procesos, reacción y difusión,⁶⁵ lo que resulta en oscilaciones temporales y espaciales en las concentraciones de reactivos y productos que se manifiestan como patrones muy ordenados:



Estas reacciones pueden describirse matemáticamente como sistemas de ecuaciones no lineales de mayor o menor complejidad; el conjunto mínimo son dos ecuaciones reacción–difusión acopladas:⁶⁶

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u, v) + D_u \nabla^2 u$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon G(u, v) + D_v \nabla^2 v,$$

donde

u = concentración de la especie que cataliza la reacción;

⁶⁵Algo similar a la competición entre convección y difusión que describíamos —lección 0— como origen de complejidad en fluidos.

⁶⁶V.S. Zykov, A.S. Mikhailov & S.C. Müller, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 2811 (1998)

v = concentración de la especie que inhibe la reacción;

$\partial u/\partial t$, $\partial v/\partial t$ son los cambios temporales de esas concentraciones;

$F(u, v)$ y $\varepsilon G(u, v)$ caracterizan las reacciones, y

D_u y D_v (*coeficientes de difusión*) caracterizan las difusiones.

3. Quimiotaxis

Un gran número de especies animales presentan una sensibilidad muy aguda para detectar la información transmitida entre diversos miembros de la especie en forma de sustancias químicas a través del sentido del olfato. Las sustancias químicas que entran a formar parte de este proceso reciben el nombre de *feromonas*. Usualmente un individuo se mueve en la dirección en la que se incrementa la concentración de estas sustancias. Este tipo de comunicación es muy importante por ejemplo para la atracción sexual, demarcación territorial y depredación. Este tema modelaremos este movimiento químicamente inducido o *quimiotaxis* que a diferencia de la difusión se dirige hacia el gradiente de la concentración. Este tipo de procesos se ha detectado también en procesos biológicos como por ejemplo, el movimiento de los leucocitos hacia las regiones en las que está teniendo lugar una infección, como consecuencia del incremento de determinadas sustancias químicas producidas por dicha infección (ver por ejemplo Lauffenburger and Keller 1979), o el movimiento de la ameba *Dictyostelium discoideum* en colonias de estos microorganismos hacia concentraciones altas de AMP-cíclico (sustancia química producida por ellas mismas).

Supongamos la presencia de un gradiente en la concentración de una sustancia química atrayente, $a(\mathbf{x}, t)$ que produce un flujo de células hacia el incremento de esa sustancia. Entonces

$$\mathbf{J}_c = n(\mathbf{x}, t)\chi(a)\nabla a.$$

La ecuación de conservación para el número de células es:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = f(n)$$

donde $f(n)$ es el término de producción de células y

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_d$$

es el flujo total de células debido a la difusión y a la quimiotaxis. Entonces se obtiene la siguiente ecuación de reacción-difusión de quimiotaxis:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = f(n) - \nabla \cdot n\chi(a)\nabla a + \nabla \cdot D\nabla n$$

donde D es el coeficiente de difusión de las células. Como $a(\mathbf{x}, t)$ representa la concentración de una sustancia química que puede difundir, ésta debe satisfacer la ecuación :

$$\frac{\partial a}{\partial t} = g(a, n) + \nabla \cdot D_a \nabla a$$

donde D_a es la constante de difusión de la sustancia a y $g(a, n)$ es el término de producción. En general se espera que $D_a > D$. En el modelo de Keller y Segel (1971), se tiene $g(a, n) = hn - ka$ $f(n) = 0$ (producción de células despreciable) y $\chi(a) = \chi_0$ de forma que para $d = 1$ se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - \chi_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(n \frac{\partial a}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial a}{\partial t} &= hn - ka + D_a \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Otras formas que se han propuesto para el factor de quimiotaxis $\chi(a)$ son:

$$\chi(a) = \frac{\chi_0}{a}, \quad \chi(a) = \frac{\chi_0 K}{(K + a)^2}, \quad \chi_0 > 0, \quad K > 0.$$