Métodos Matemáticos de la Física III (Espacios de Hilbert)

- Profesores:
  - José Santiago: Teoría y problemas grupo 1 (jsantiago @ugr.es)
    - Tutorías: M y J (11:00-13:00 y 14:00-15:00) despacho A03.
  - Fernando Cornet: Problemas grupo 2 (cornet @ugr.es)
    - Tutorías: L (17:00-18:30), X (12:00-13:00, 17:00-18:30), V (10:00-12:00) despacho 02
  - Detalles del temario, información, apuntes en:
    - www.ugr.es/~jsantiago/Docencia/MMIII/

Métodos Matemáticos de la Física III (Espacios de Hilbert)

- Bibliografía principal:

  - L. Abellanas y A. Galindo, *Espacios de Hilbert*, Eudema, 1987.
  - A. Vera López y P. Alegría Ezquerra, *Un curso de Análisis Funcional. Teoría y problemas,* AVL, 1997.
  - G. Helmberg, *Introduction to spectral theory in Hilbert space*, Dover, 1997.
  - P. Roman, *Some modern mathematics for physicists and other outsiders*, vol. 2, Pergamon, 1975.
  - P. Lax, *Functional Analysis*, Wiley 2002.
  - A. Galindo y P. Pascual, *Mecánica Cuántica*, Eudema, 1989.
  - E. Romera y otros, *Métodos Matemáticos*, Paraninfo, 2013.

- Notas de clase muy esquemáticas: ejemplos, demostraciones y comentarios <u>importantes</u> en pizarra o de viva voz (tomad apuntes)

Motivación

- Postulados de la Mecánica Cuántica

Postulado I: A cada sistema físico corresponde un espacio de Hilbert complejo separable y cada estado puro está descrito por un rayo $|\Psi\rangle$ en dicho espacio

Postulado II: A cada observable de un sistema corresponde un operador lineal autoadjunto en el espacio de hilbert cuyos autovalores son los posibles valores de una medida del observable

Postulado III: La probabilidad de que al medir un observable (A) sobre un estado puro ($|\Psi\rangle$) se obtenga un valor (a) es $\langle\Psi|P_{A,a}|\Psi\rangle$ donde $P_{A,a}$ es el proyector al subespacio propio de autovalores

- No sólo MC. Ecuaciones diferenciales, integrales, ...

Motivación

- No sólo MC. Ecuaciones diferenciales, integrales, …
- Más en general, un espacio de Hilbert es la estructura matemática necesaria cuando uno tiene que generalizar $\mathbb{R}^n$(o $\mathbb{C}^n$), incluyendo su geometría y las posibles operaciones sobre vectores a espacios de dimensión infinita

Esquema del curso

- Preliminares: Espacios lineales y espacios métricos
- Espacios normados y de Banach
- Espacios con producto escalar y de Hilbert.
- Espacios de funciones. Desarrollo en autovalores.
- Funcionales y espacio dual. Teoría de distribuciones
- Operadores en Espacios de Hilbert
- Teoría espectral de operadores

¿Por qué espacios de Hilbert?

- Generalizan propiedades de $\mathbb{R}^n$ a espacios de dimensión infinita

Espacio Lineal

- Combinaciones lineales (finitas) de vectores. Independencia lineal. Base lineal.

Espacio Métrico

- Combinaciones infinitas requieren límites: noción de distancia

- Distancia invariante bajo traslaciones: basta conocer distancia al origen (norma)

Espacio Normado

- Generalización de $\mathbb{R}^n$: necesitamos geometría (ortogonalidad, ángulos). Producto escalar.

Espacio (pre)Hilbert

Espacios Lineales

- Definición: Espacio lineal (o vectorial) sobre un cuerpo Λ es una terna (L, +, .) formada por un conjunto L no vacío y dos aplicaciones (suma y producto por escalares) que satisfacen:

$$+ : L \times L \longrightarrow L \qquad \cdot : \Lambda \times L \longrightarrow L$$

$$(i)\ (L,+)\ \text{grupo aditivo} \quad \left\{ \begin{array}{l} (ia)\ x + y = y + x \\ (ib)\ (x+y)+z = x+(y+z) \\ (ic)\ \exists 0 \in L / x + 0 = x \\ (id)\ \forall x \in L, \exists(-x) \in L / x + (-x) = 0 \end{array} \right.$$

$$(ii)\ \lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$$

$$(\text{iii})\ \ \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$$

$$\forall\ x, y, z \in L$$

$$(iv)\ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$$

$$\forall\ \lambda, \mu \in \Lambda$$

$$(v)\ 1 \cdot x = x$$

Espacios Lineales

- Propiedades inmediatas:

$(i)\ \alpha \cdot 0 = 0$

$(ii)\ 0 \cdot x = 0$

$(iii)\ -x = (-1) \cdot x$

$(iv)\ x + y = x + z \Rightarrow y = z$

$(v)\ \alpha \cdot x = \alpha \cdot y, \alpha \neq 0 \Rightarrow x = y$

$(vi)\ \alpha \cdot x = \beta \cdot x, x \neq 0 \Rightarrow \alpha = \beta$

$(vii)\ \alpha \cdot x = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ o } x = 0$

- Notación:

$$A + B = \{x + y, \forall x \in A, \forall y \in B\}$$

$$\lambda A = \{\lambda \cdot x, \forall x \in A\}$$

$$\Lambda x = \{\lambda \cdot x, \forall \lambda \in \Lambda\}$$

$$\Lambda A = \{\lambda \cdot x, \forall \lambda \in \Lambda, \forall x \in A\}$$

Espacios Lineales

- Definición: Subespacio lineal. Subconjunto no vacío de espacio lineal con estructura de espacio lineal.

$$M \subset L \text{ (L esp. lineal, } M \neq \emptyset\text{) subespacio lineal si}$$

$$\alpha x + \beta y \in M, \qquad \forall \alpha, \beta \in \Lambda,\ \forall x, y \in M$$

- Propiedades:

$$\{M_\alpha\}_{\alpha \in A} \text{ subesp.} \Rightarrow\ \bigcap_\alpha M_\alpha,\ \sum_{i=1}^n M_i \text{ subesps.}$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in M,\ \forall n \text{ finito},\ \forall x_1, \ldots x_n \in M$$

- Definición. Envolvente lineal: sea $S \subset L$

$$[S] = \{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \forall n \text{ finito}, \forall x_i \in S, \forall \alpha_i \in \Lambda\} \text{ (es subespacio lineal)}$$

- Propiedades:

$$\text{[S] es el menor subesp. que contiene a S}$$

$$[S] = \bigcap_i M_i,\ \{M_i\} \text{ el conjunto de subesp. que contiene a S}$$

Espacios Lineales

- Definición: Independencia lineal.

  $X \subset L$ es linealmente independiente (l.i.) si

  $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0,\ x_i \in X, \alpha_i \in \Lambda \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$

- Definición: Base de Hamel. Conjunto l.i. Maximal (no contenido en ningún otro conjunto l.i.).

- Propiedades:

  Todo conjunto l.i. es ampliable a base de Hamel

  Todas las bases de Hamel de L tienen el mismo cardinal (dimensión lineal)

  L=[B], $\forall$ B base de Hamel de L

  B base de Hamel de L $\Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \alpha_i \in \Lambda, x_i \in B$ es única

Espacios Lineales

- Definición: Suma directa de subespacios. Sean $\{M_i\}_{i=1}^{n}$ subesps. de L

$$L = M_1 \vec{\oplus} \ldots \vec{\oplus} M_n \text{ (L suma directa de } M_i) \text{ si}$$

$$\forall x \in L \ \exists! \ x_1 \in M_1, \ldots x_n \in M_n \ / \ x = x_1 + \ldots + x_n$$

- Teorema: Sea $L=M_1+M_2$

$$L = M_1 \vec{\oplus} M_2 \Leftrightarrow M_1 \bigcap M_2 = \{0\}$$

$$[M_2 \text{ complemento lineal de } M_1 \text{ en L}]$$

- En general si $L=M_1+\ldots+M_n$

$$L = M_1 \vec{\oplus} \ldots \vec{\oplus} M_n \Leftrightarrow M_i \bigcap \sum_{j \neq i} M_j = \{0\}$$

Espacios Lineales

- Resumen resultados:
  - (Sub)espacio lineal: (L,+,.)
  - Envolvente lineal: [S]={combinaciones lineales FINITAS de S}
  - Independencia lineal: combinación lineal finita=0 $\Rightarrow$ todos los coeficientes=0
  - Base de Hamel: Conjunto l.i. maximal. Cardinal único (dimensión lineal). Descomposición de elementos de L en términos de elementos de B única.
  - Suma directa de subespacios: suma de subespacios con intersección (a la suma del resto) el cero de L.
- Otros resultados y definiciones (operadores, operador inverso, isomorfismos, proyectores, …) se pueden definir aquí pero los veremos directamente en espacios de Hilbert

Espacios Métricos

- Definición: Espacio métrico es un par (X,d) donde X es un conjunto no vacío arbitrario y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una aplicación (distancia o métrica) que cumple:

$(i)\ d(x,y) \geq 0$

$(ii)\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$(iii)\ d(x,y) = d(y,x)$ $\qquad \forall x,y,z \in X$

$(iv)\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

- Propiedades

$(i)\ d(x_1,x_n) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) + \ldots + d(x_{n-1},x_n)$

$(ii)\ |d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$

$(iii)\ Y \subset X,\ d'(y_1,y_2) = d(y_1,y_2) \Rightarrow (Y,d')$ esp. métrico con métrica inducida d'

Espacios Métricos

- Definiciones: Sea (X,d) un espacio métrico.
  - Bola abierta de centro x y radio r: $B(x,r)=\{y\in X\ /\ d(x,y)<r\}$
  - Bola cerrada de centro x y radio r: $\bar{B}(x,r)=\{y\in X\ /\ d(x,y)\leq r\}$
  - $\text{Sea } A\subset X,\, x\in A \text{ es pto. interior si } \exists r>0/B(x,r)\subset A$
  - Interior de A: $\text{int A}=\{x\in X\ /\ x \text{ es pto. interior de } A\}$
  - $A \text{ es abierto si } \operatorname{int} A = A$
  - $\text{Dado } A\subset X,\ x\in X \text{ es pto. de adherencia si } \forall r>0,\ B(x,r)\cap A\neq\emptyset$
  - Cierre de A: $\bar{A}=\{x\in X\ /\ x \text{ es pto. de adherencia en } A\}$
  - Subespacio cerrado: $A\subset X \text{ es cerrado si } A=\bar{A}$
  - Subespacio denso: $A\subset X \text{ es denso en } X \text{ si } \bar{A}=X$

Espacios Métricos

- Propiedades de abiertos y cerrados:
  - Sea (X, d) espacio métrico y $A \subset X$

$$\emptyset, X \text{ son cerrados (y abiertos)}$$

$$A \text{ abierto } \Leftrightarrow A^c \text{ cerrado}$$

$$\cap_{i \in I} A_i \text{ cerrado si } A_i \text{ cerrados}$$

$$\cap_{i=1}^n A_i \text{ abierto si } A_i \text{ abiertos}$$

$$\cup_{i=1}^n A_i \text{ cerrado si } A_i \text{ cerrados}$$

$$\cup_{i \in I} A_i \text{ abierto si } A_i \text{ abiertos}$$

Espacios Métricos

- Definición: Sucesión convergente

$$\{x_n\}_1^\infty \subset X \text{ converge a } x \text{ en } X,\ x_n \to x,\ \text{ si } \forall r > 0, \exists N / x_n \in B(x,r), \forall n > N$$

$$(\text{equivalentemente la sucesión de núm. reales } \{d(x_n, x)\} \text{ converge a } 0)$$

- Definición: Sucesión de Cauchy

$$\{x_n\}_1^\infty \subset X \text{ es de Cauchy si } \forall r > 0, \exists N / d(x_n, x_m) < r, \forall n, m > N$$

- Propiedad: Toda sucesión convergente es de Cauchy

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x_m, x) \to 0$$

- Definición: Un espacio métrico es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente. Un subespacio $S \subset X$ es completo si toda sucesión de Cauchy en S converge en S

- Propiedades: Sea $S \subset X,\ x \in X$ $\quad x \in \bar{S} \Leftrightarrow \exists \{x_n\}_1^\infty \subset S / x_n \to x$

$$\text{Sea } X \text{ completo: } S \text{ completo} \Leftrightarrow\ S \text{ cerrado}$$

Espacios Métricos

- Resumen resultados:
  - (Sub)espacio métrico: (X,d)
  - Bolas abiertas y cerradas
  - Punto interior: bola abierta centrada en x dentro de A
  - int A= conjunto de ptos interiores de A. Subespacio abierto.
  - Punto de adherencia de A, si toda bola abierta centrada en x tiene intersección no nula con A. Cierre de A. Subespacio cerrado. Subespacio denso en X
  - Sucesión convergente
  - Sucesión de Cauchy
  - Espacio métrico completo: Cauchy $\Rightarrow$ convergente
- Otras propiedades (aplicaciones, continuidad, acotación, …) se pueden definir aquí pero las veremos directamente en espacios de Hilbert.

Espacios Normados

- Definición: Espacio normado, es un par (X,||.||) formado por un espacio lineal X y una aplicación $||.|| : X \to R$(norma) con las siguientes propiedades:

$$(i)\ ||x|| \geq 0$$

$$(ii)\ ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(iii)\ ||\alpha x|| = |\alpha|\, ||x||$$

$$(iv)\ ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||\ \text{(desigualdad triangular)}$$

  - Todo subespacio lineal de X esp. normado, es subespacio normado con la norma de X.
- Relación entre espacios normados y métricos
  - Todo espacio normado es métrico con distancia d(x,y)=||x-y||
  - La distancia asociada satisface $d(x+z, y+z) = d(x,y),\ d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$
  - Todo esp. lineal métrico con estas propiedades es normado con ||x||=d(x,0)
- Definición: Espacio de Banach. Espacio normado completo.

Espacios Normados

- Propiedades: $(X, ||.||)$ espacio normado

$(i)\ \Big| ||x|| - ||y|| \Big| \leq ||x-y||,\ \forall x,y \in X$

$(ii)\ B(x_0,r) = x_0 + B(0,r),\ \forall x_0 \in X,\ r>0$

$(iii)\ X \text{ Banach } \iff \{a_n\}_1^\infty \in X, \sum_n ||a_n|| < \infty \Rightarrow \sum_n a_n \text{ converge en } X$

(iv) Sea X Banach, un subespacio Y es completo $\Leftrightarrow Y$ es cerrado en X

- Teorema de Compleción:
  - Todo espacio lineal normado $L = (L, ||.||)$ admite una compleción $\tilde{L}$, espacio lineal normado completo, única salvo isomorfismos en norma, tal que L es denso en $\tilde{L}$ y $||x||_{\tilde{L}} = ||x||_L$

- Sumas infinitas en espacios normados

$$v_n \in X,\ v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ si } \exists v \in X / \left|\left| \sum_{n=1}^{k} v_n - v \right|\right| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Espacios Normados

- Desigualdad de Hölder (para sumas):

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^q \right)^{1/q}$$

$$p, q > 1, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \{a_j\}_1^{\infty} \in l_{\Lambda}^p \qquad \{b_j\}_1^{\infty} \in l_{\Lambda}^q$$

- Desigualdad de Minkowski (para sumas):

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j + b_j|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^p \right)^{1/p}$$

$$p \geq 1 \qquad \{a_j\}_1^{\infty}, \{b_j\}_1^{\infty} \in l_{\Lambda}^p$$

Espacios Normados

- Resumen resultados:
  - (Sub)espacio normado: (X,||.||)
  - Relación norma $\overset{\longrightarrow}{\not\longleftarrow}$ distancia
  - Espacios de Banach (normado completo)
  - Convergencia absoluta $\Rightarrow$ convergencia en espacios de Banach
  - Subespacio de espacio de Banach es Banach $\Leftrightarrow$ cerrado
  - Teorema de compleción: todo espacio normado es completable de manera única
  - Una suma infinita converge en (X,||.||) a v si la sucesión de sumas parciales converge a v
  - Desigualdades de Hölder y Minkowski

Espacios Hilbert

- Definición: Espacio pre-Hilbert es un espacio lineal con un producto escalar asociado.
  - Producto escalar: $\langle .,. \rangle : X \times X \to \Lambda$ con las siguientes propiedades

$$(i)\ \langle v,v\rangle \geq 0, \langle v,v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

$$(ii)\ \langle v, v_1 + v_2\rangle = \langle v, v_1\rangle + \langle v, v_2\rangle$$

$$(iii)\ \langle v, \lambda w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$$

$$(iv)\ \langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$$

$$\forall v, v_1, v_2, w \in L,\ \forall \lambda \in \Lambda$$

  - En particular se cumple

$$\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, v\rangle = \bar{\lambda}_1\langle v_1, v\rangle + \bar{\lambda}_2\langle v_2, v\rangle$$

$$\langle v, w\rangle = 0\ \forall w \in L \Rightarrow v = 0$$

$$\langle v_1, w\rangle = \langle v_2, w\rangle\ \forall w \in L \Rightarrow v_1 = v_2$$

Espacios Hilbert

- Propiedad: Todo espacio pre-Hilbert es espacio normado con la norma asociada al producto escalar $||v|| = +\sqrt{(v, v)}$
- Definición: Espacio de Hilbert es un espacio pre-Hilbert completo con la norma asociada al producto escalar (propiamente distancia asociada a la norma).
- Propiedades: Sea $(X, \langle ., . \rangle)$espacio pre-Hilbert y $||.||$ la norma asociada:

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2) \text{ (Identidad del paralelogramo)}$$

$$\mathrm{Re}\Big[\langle x, y\rangle\Big] = \frac{1}{4}[||x+y||^2 - ||x-y||^2]$$

$$\text{Identidad de polarización}$$

$$\mathrm{Im}\Big[\langle x, y\rangle\Big] = -\frac{1}{4}[||x+\mathrm{i}y||^2 - ||x-\mathrm{i}y||^2] \text{ (si X complejo)}$$

- Relación producto escalar-norma: Un espacio normado$(X, ||.||)$que satisface la identidad del paralelogramo es espacio pre-Hilbert con un producto escalar que satisface $||x|| = +\sqrt{\langle x, x\rangle}$

Espacios Hilbert

- Propiedades: Sea $(X, \langle .,. \rangle)$espacio pre-Hilbert y $||\cdot||$ la norma asociada:
  - Desigualdad de Schwarz-Cauchy-Buniakowski

$$|\langle v, w\rangle| \leq ||v|| \, ||w||, \ \forall v, w \in X, \ (\text{"="} \Leftrightarrow v, w \text{ lin. dep.})$$

  - Desigualdad triangular

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \ \forall x, y \in X \ (\text{"="} \Leftrightarrow y = 0 \text{ o } x = cy, c \geq 0)$$

  - Continuidad del producto escalar

$$x_n \to x, \ y_n \to y \Rightarrow \langle x_n, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$$

$$\{x_n\}_1^\infty, \ \{y_n\}_1^\infty \text{ son Cauchy en } X \Rightarrow \{\langle x_n, y_n\rangle\}_1^\infty \text{ es Cauchy en } \Lambda$$

Espacios Hilbert

- Propiedades: Sea $(X, \langle .,. \rangle)$espacio pre-Hilbert y $||\cdot||$ la norma asociada:
  - $v, w \in X$ son ortogonales si $\langle v, w\rangle = 0$
  - $S = \{v_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset X$ es un conjunto ortogonal si $\langle v_\alpha, v_\beta\rangle = 0 \ \forall \alpha \neq \beta$
  - $S = \{v_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset X$ es un conjunto ortonormal si $\langle v_\alpha, v_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}$
  - Todo conjunto ortogonal de vectores no nules es l.i. (recíproco no cierto)
- Teorema de Pitágoras (generalizado): Sea $\{v_j\}_1^n$ ortonormal en X

$$||v||^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle v_j, v\rangle|^2 + ||v - \sum_{j=1}^{n}\langle v_j, v\rangle v_j||^2, \quad \forall v \in X$$

- Teorema de Pitágoras

$$\left|\left|\sum_{j=1}^{n} v_j\right|\right|^2 = \sum_{j=1}^{n} ||v_j||^2, \text{ si } \langle v_i, v_j\rangle = 0 \quad (i \neq j)$$

Espacios Hilbert

- Propiedades:
  - Desigualdad finita de Bessel: sea $\{v_j\}_1^n$ ortonormal

$$||v||^2 \geq \sum_{j=1}^{n} |\langle v_j, v\rangle|^2,\ \forall v \in X$$

  - Sea $\{v_\alpha\}_{\alpha\in A}$ conjunto ortonormal arbitrario

$$A^{(v)} \equiv \{\alpha \in A / \langle v_\alpha, v\rangle \neq 0\} \text{ es finito o infinito numerable}$$

  - Desigualdad infinita de Bessel: sea $\{v_\alpha\}_{\alpha\in A}$ conjunto ortonormal arbitrario

$$||v||^2 \geq \sum_{\alpha\in A} |\langle v_\alpha, v\rangle|^2,\ \forall v \in X$$

- Teorema de compleción:

> Dado un espacio pre-Hilbert $\big(X, \langle .,. \rangle\big)$, existe un espacio de Hilbert H (único salvo isomorfismos) y un isomorfismo $A : X \to W$ con W denso en H

Espacios Hilbert

- Definición: complemento ortogonal $\text{Sea } H \text{ Hilbert y } M \subset H,\ M \neq \emptyset$

$$M^{\perp} \equiv \{v \in H / v \perp M\} \text{ (también se denota } M^{\perp} = H \ominus M)$$

- Propiedades del complemento ortogonal

$$(i)\ M^{\perp} \text{ es subespacio lineal cerrado } \forall M \subset H,\ H \text{ Hilbert}$$

$$(ii)\ M \cap M^{\perp} \subset \{0\}$$

$$(iii)\ M^{\perp\perp} \equiv (M^{\perp})^{\perp} \supset M$$

$$(iv)\ M^{\perp} = (\overline{M})^{\perp} = [M]^{\perp} = (\overline{[M]})^{\perp}$$

$$(v)\ \{0\}^{\perp} = H,\ \ H^{\perp} = \{0\}$$

Espacios Hilbert

- Teorema de la proyección ortogonal

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } M \text{ es un subespacio lineal cerrado del espacio de Hilbert } H\text{, entonces} \\ \forall v \in H : \exists! v_1 \in M, \exists! v_2 \in M^{\perp} / v = v_1 + v_2 \ (v_1\text{: proyección ortogonal de } v \text{ sobre } M)\end{array}}$$

Enunciado equivalente:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } M \text{ es un subespacio lineal cerrado del espacio de Hilbert } H\text{, entonces} \\ \forall v \in H : \exists! v_1 \in M \ / \ ||v - v_1|| = \inf\{||v - y||, y \in M\}, \ v - v_1 \in M^{\perp}\end{array}}$$

Espacios Hilbert

- Propiedades:
  - Definición: Suma directa ortogonal

    Sean M, N subespacios lineales cerrados de H Hilbert

    $$H = M \oplus N \text{ si } H = M\vec{\oplus}N \text{ y } M \perp N$$

  - $H = M \oplus M^{\perp}, \forall$ subespacio lineal cerrado $M \subset H$
  - Proyector ortogonal sobre M: $P_M : H \to M$

    $$P_M v = v_1,\ v = v_1 + v_2 \text{ con } v_1 \in M,\ v_2 \in M^{\perp}$$

    $$P_M + P_{M^{\perp}} = 1_H, \quad P_M P_{M^{\perp}} = P_{M^{\perp}} P_M = 0, \quad P_M^2 = P_M, \quad P_{M^{\perp}}^2 = P_{M^{\perp}}$$

  - $S^{\perp\perp} = \overline{[S]}\ \forall S \subset H,\ S \neq \emptyset$ (S subesp. cerrado $\Rightarrow$ $S^{\perp\perp}$=S)
  - S subespacio lineal de H es denso en H $\Leftrightarrow S^{\perp} = \{0\}$

Espacios Hilbert

- Teorema: Sea $\{x_n\}_1^\infty$ conjunto ortonormal en H (Hilbert) y $\{\lambda_n\}_1^\infty \subset \Lambda$, entonces:

$$\sum_1^\infty \lambda_n x_n \text{ converge } \Leftrightarrow \sum_1^\infty |\lambda_n|^2 < \infty$$

- Teorema: Sea $S = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ conjunto ortonormal en H (Hilbert). Sea $M \equiv \overline{[S]}$

$$(i)\ x_M \equiv \sum_{\alpha \in A} \langle x_\alpha, x \rangle x_\alpha \in M$$

(ii) x_M es el único vector que satisface $x - x_M \perp M$

$$(iii)\ x \in M \Rightarrow x = x_M$$

$$(iv)\ d(x, M) \equiv \inf_{y \in M} ||x - y|| = d(x, x_M)$$

$$\boxed{\text{La aproximación óptima de un vector } x \text{ por elementos de } M = \overline{[\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}]} \text{ ortonormal viene dada por } P_M x}$$

Espacios Hilbert

- Teorema de ortogonalización de Gram-Schmidt:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Sea } \{v_j\}_{j\in J} \subset H \text{ un conjunto l.i., con } J \text{ finito o infinito numerable } (\mathbb{N}) \\ \exists \{u_j\}_{j\in J} \text{ ortonormal tal que:} \\ (i)\ u_i \in \left[\{v_j\}_{j\in J}\right],\ v_i \in \left[\{u_j\}_{j\in J}\right] \qquad (ii)\ \overline{\left[\{u_j\}_{j\in J}\right]} = \overline{\left[\{v_j\}_{j\in J}\right]}\end{array}}$$

Solución:

$$u_m \equiv \frac{w_m}{||w_m||},\ \text{con } w_m \equiv v_m - \sum_{k=1}^{m-1} \langle u_k, v_m \rangle u_k$$

- Definición: Base ortonormal

Conjunto ortonormal $S = \{v_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset H$ maximal (o completo)

- Teorema: Existencia de bases ortonormales

Todo espacio de Hilbert $\neq \{0\}$ posee alguna base ortonormal

Espacios Hilbert

- Teorema: Caracterización de bases ortonormales:

Sea $S = \{v_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset H \neq \{0\}$ un conjunto ortonormal. Son equivalentes dos a dos:

(i) S es base ortonormal de H

(ii) $\overline{[S]} = H$

(iii) $v \perp v_\alpha,\ \forall \alpha \in A \Rightarrow v = 0 \quad S^\perp = \{0\}$

(iv) $\forall v \in H \Rightarrow v = \sum_\alpha \langle v_\alpha, v \rangle v_\alpha$ (desarrollo en serie de Fourier)

(v) $\forall v, w \in H \Rightarrow \langle v, w \rangle = \sum_\alpha \langle v, v_\alpha \rangle \langle v_\alpha, w \rangle$ (identidad de Parseval)

(vi) $\forall v \in H \Rightarrow ||v||^2 = \sum_\alpha |\langle v_\alpha, v \rangle|^2$ (identidad de Parseval)

Espacios Hilbert

- Definición: Espacios topológicos (y métricos) separables:
  - Un espacio topológico X se dice separable si posee algún subconjunto numerable denso en X.
  - Un espacio métrico M es separable si y sólo si posee una base numerable de abiertos.
- Criterio de separabilidad en espacios de Hilbert

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \text{Un espacio de Hilbert } H \neq \{0\} & & \text{admite una base ortonormal numerable} \\ \text{es separable} & \Leftrightarrow & \text{(finita o infinita numerable)} \end{array}}$$

- Proposición:
  - Todas las bases ortonormales de un espacio de Hilbert H tienen el mismo cardinal (dimensión Hilbertiana de H).

Espacios Hilbert

- Teorema del Isomorfismo:

Definición: Dos espacios de Hilbert, H_1, H_2 sobre Λ se dicen isomorfos si

$$\exists\, U : H_1 \to H_2,\ U \text{ isomorfismo lineal } / \langle Ux, Uy\rangle_{H_2} = \langle x, y\rangle_{H_1},\ \forall x, y \in H_1$$

Teorema:

Todo espacio de Hilbert $H \neq \{0\}$ es isomorfo a $l^2_\Lambda(A)$
donde el cardinal de $A =$ dimensión Hilbertiana de H

Corolarios:

- Todo espacio de Hilbert de dimensión Hilbertiana finita es isomorfo a $\mathbb{C}^n$
- Todo espacio de Hilbert separable de dim. Hilbert. infinita es isomorfo a $l^2_\Lambda(\mathbb{N})$
- Sea H espacio de Hilbert separable de dimensión Hilbertiana h y dimensión lineal l
  - $h < \infty \Rightarrow l = h$ y toda base ortonormal es base de Hamel
  - $h = \infty \Rightarrow l > h$ y ninguna base ortonormal es base de Hamel

Espacios Hilbert

- Resumen de resultados:
  - Espacio (pre-)Hilbert: Espacio lineal con producto escalar completo
  - Hilbert $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ Normado
  - Identidades del paralelogramo y de polarización
  - Desigualdades de Schwarz y Triangular, continuidad producto escalar
  - Ortonormalidad. Teorema de Pitágoras y desigualdad de Bessel
  - Teorema de compleción
  - Complemento y proyector ortogonal. Aproximación óptima a un vector.
  - Ortogonalización de Gram-Schmidt
  - Bases ortonormales. Espacios separables
  - Teorema del isomorfismo

Espacios de funciones

- Algunos de los casos más importantes de espacios de Hilbert.
  - Ejemplos:

$$\big(C_\Lambda[a,b], ||.||_\infty\big) \text{ completo, no pre-Hilbert}$$

$$\big(C_\Lambda[a,b], ||.||_p\big),\ p \geq 1 \text{ no completo } (p=2 \text{ pre-Hilbert})$$

$$\big(B(\mathbb{R}), ||.||_\infty\big) \text{ completo, no pre-Hilbert}$$

$$\big(R^p(\mathbb{R}), ||.||_p\big),\ p \geq 1 \text{ no completo } (p=2 \text{ pre-Hilbert})$$

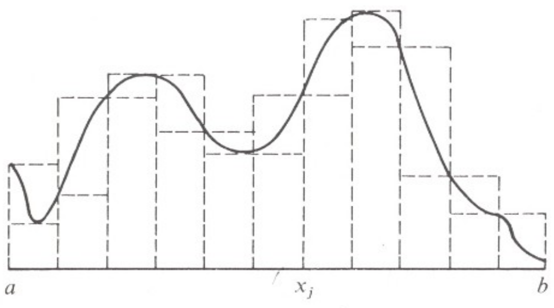
  - Ejemplo de no completitud de $\big(C_\Lambda[a,b], ||.||_2\big)$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \\ nx - \frac{n}{2} + 1, & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x, \end{cases} \quad \text{es Cauchy pero no converge en } (C_\mathbb{R}[0,1], ||.||_2)$$

  - Podemos aumentar el espacio de funciones con los límites de sucesiones de Cauchy para completarlo. Necesitaremos un nuevo concepto de integral.

Espacios de funciones

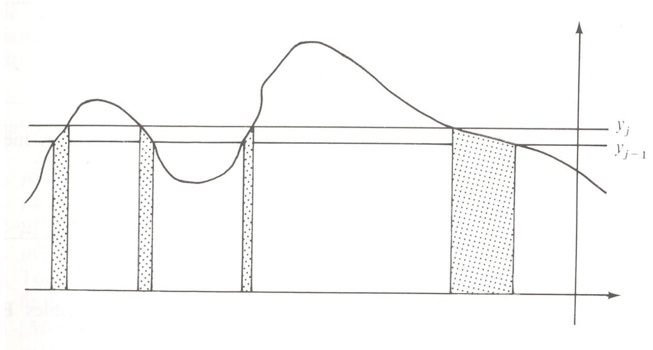
- Integral de Riemann:
    - Partición del "eje x" y convergencia común de integrales superior e inferior



$$\int_a^b f(x)dx = I$$

$$\text{si } I = \lim_{|\pi|\to 0} \sum_1^n R_k^{\inf} = \lim_{|\pi|\to 0} \sum_1^n R_k^{\sup} < \infty$$

- Integral de Lebesgue:
    - Partición del "eje y" y medida de subconjuntos del "eje x"



$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx \equiv \lim_{|\pi|\to 0} \Sigma_\pi(f)$$

$$\Sigma_\pi(f) \equiv \sum_{j=1}^n y_{j-1}\mu\{f^{-1}([y_{j-1}, y_j]\}$$

Espacios de funciones

- Necesitamos desarrollar un nuevo concepto de medida
  - Boreliano: Elemento de $\mathcal{B}$, familia mínima de subconjuntos de $\mathbb{R}$ que contiene todos los intervalos abiertos (a,b) y cumple:

$$(i)\ \{B_j\}_1^\infty \subset \mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \subset \mathcal{B} \qquad (ii)\ B \subset \mathcal{B} \Rightarrow \mathbb{R} - B \subset \mathcal{B}$$

  - Medida Borel-Lebesgue (de un boreliano B): $\mu(B) \equiv \inf_{I \supset B} l(I)$

$$I = \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j) \text{ (uniones de intervalos abiertos disjuntos)} \quad l(I) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} |b_j - a_j|$$

    - Propiedades:

$$B \in \mathcal{B} \Rightarrow \mu(B) = \inf\{\mu(A), A \text{ abierto} \supset B\} = \sup\{\mu(C), C \text{ compacto} \subset B\}$$

$$B_n \in \mathcal{B},\ n \geq 1, \text{ disjuntos dos a dos} \Rightarrow \mu\left(\cup_1^\infty B_n\right) = \sum_1^\infty \mu(B_n)$$

Espacios de funciones

- Necesitamos desarrollar un nuevo concepto de medida
  - Función medible Borel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible Borel si $f^{-1}(B) \in \mathcal{B},\ \forall B \in \mathcal{B}$
  - f compleja es Borel si su parte real e imaginaria lo son
  - Si f, g, reales: $f+g, \lambda f (\lambda \in \mathbb{R}), fg, |f|$ son borel
  - Caracterización de funciones medibles Borel:

$a)\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es Borel $\Leftrightarrow f^{-1}\{(a,b)\} \in \mathcal{B},\ \forall a, b$

$b)\ f_n(x) \to f(x),\ \forall x,\ f_n$ Borel $\Rightarrow f$ Borel

$c)\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es Borel $\Leftrightarrow \{x / f(x) < b\} \in \mathcal{B},\ \forall b$

- Integral de Lebesgue sea $f \geq 0$, acotada y medible Borel. Se define su integral

$$\int_{\mathbb{R}} f\, dx \equiv \lim_{|\pi| \to 0} \Sigma_\pi(f)$$

$\pi : 0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = \sup f$ partición del recorrido de f

$$\Sigma_\pi(f) \equiv \sum_{j=1}^{n} y_{j-1} \mu\{f^{-1}([y_{j-1}, y_j])\}$$

Fácil de extender a funciones más generales

Espacios de funciones

- Funciones integrables Lebesgue

$$f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \text{ si} \int_{\mathbb{R}} |f|\, dx < +\infty, \quad \int_{\mathbb{R}} f\, dx \equiv \int_{\mathbb{R}} \frac{|f|+f}{2}\, dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{|f|-f}{2}\, dx$$

$$f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}) \text{ si} \int_{\mathbb{R}} |f|\, dx < +\infty, \quad \int_{\mathbb{R}} f\, dx \equiv \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Re}(f)\, dx + \mathrm{i} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(f)\, dx$$

- Propiedades casi por doquier (c.d.).

Una propiedad $P(x),\ x \in \mathbb{R}$ se cumple casi por doquier (c.d.)
si el conjunto $\{x/P(x) \text{ falsa}\}$ tiene medida nula
En particular $f_1 = f_2$ c.d. $\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}} |f_1 - f_2| dx = 0$

- Espacios L^1.

$L^1(\mathbb{R})$ es el conjunto de clases de equivalencia de funciones de $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$
bajo la relación de equivalencia: $f_1 = f_2$ c.d.

Espacios de funciones

- Espacios L^p:

$$f \in \mathcal{L}^p(B) \text{ si } ||f||_p \equiv \left| \int_B |f|^p dx \right|^{1/p} < +\infty, \quad 1 \leq p < +\infty$$

- Definición: $L^p(B)$ conjunto de clases de equivalencia de funciones $f \in \mathcal{L}^p(B)$ con relación de equivalencia $f = g$ c.d.

- Propiedades:

(i) $(L^p(\mathbb{R}), ||.||_p)$, $(L^p(B), ||.||_p)$, son Banach

(ii) $C[a,b]$ es denso en $(L^p([a,b]), ||.||_p)$

(iii) $(L^p([a,b]), ||.||_p)$ es la compleción de $C[a,b]$ $\big($idem $[a,b] \to \mathbb{R}\big)$

(iv) $L^2(\mathbb{R})$ es Hilbert con el producto escalar

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x) g(x)\, dx, \text{ (análogamente para } [a,b])$$

Espacios de funciones

- Desigualdades (integrales) de Hölder y Minkowski

$$\text{Sean } f, h \in L^p(X),\; g \in L^q(X),\; 1 < p < \infty,\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Desigualdad de Hölder

$$\boxed{\int_X |fg|\, dx \leq \left\{\int_X |f|^p\, dx\right\}^{1/p} \cdot \left\{\int_X |g|^q\, dx\right\}^{1/q}}$$

Desigualdad de Minkowski

$$\boxed{\left\{\int_X |f+h|^p\, dx\right\}^{1/p} \leq \left\{\int_X |f|^p\, dx\right\}^{1/p} + \left\{\int_X |h|^p\, dx\right\}^{1/p}}$$

Espacios de funciones

- Algunas bases ortonormales importantes en L^2:
  - Base de Legendre

$$P_n(x) \equiv \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \text{ (Polinomios de Legendre)}$$

$$\left\{\sqrt{n+1/2}P_n\right\}_0^\infty \text{ es base ortonormal de } L^2[-1,1]$$

$$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0,\ n = 0,1,\ldots \text{ (Eq. de Legendre)}$$

  - Base de Hermite

$$H_n(x) \equiv (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} \text{ (Polinomios de Hermite)}$$

$$\left\{(\sqrt{\pi}2^n n!)^{-1/2}e^{-x^2/2}H_n\right\}_0^\infty \text{ es base ortonormal de } L^2(\mathbb{R})$$

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0,\ n = 0,1,\ldots \text{ (Eq. de Hermite)}$$

Espacios de funciones

- Algunas bases ortonormales importantes en L^2:
  - Base de Laguerre

$$L_n(x) \equiv \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n) \text{ (Polinomios de Laguerre)}$$

$$\left\{ e^{-x/2} L_n \right\}_0^\infty \text{ es base ortonormal de } L^2[0,\infty)$$

$$xL_n'' + (1-x)L_n' + nL_n = 0,\ n = 0, 1, \ldots \text{ (Eq. de Laguerre)}$$

  - Bases ortonormales de polinomios asociados a función peso

Sea $0 \neq \rho \in L^1(R)$, no negativa / $\exists \alpha > 0$, para el que $\int_{\mathbb{R}} e^{|\alpha| t} \rho(t)\, dt < \infty$

Si $\{p_n(t)\}_0^\infty$ son los polinomios ortonormales respecto al producto escalar

$\langle f, g \rangle_\rho \equiv \int_{\mathbb{R}} \bar{f} g \rho$, obtenidos de $\{t^n\}_0^\infty$ por Gram-Schmidt, entonces

$\{p_n(t)\rho^{1/2}(t)\}_0^\infty$ son base ortonormal de $L^2(\text{sop } \rho)$

Espacios de funciones

- Algunas bases ortonormales importantes en L²:
  - Bases de Fourier

$$\{e^{\mathrm{i}2\pi nx/L}/\sqrt{L}\}_{-\infty}^{+\infty} \text{ es base ortonormal en } L^2[a,a+L]$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{L}}, \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right), \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right),\right\} \ (n=1,2,\ldots) \text{ es base ortonormal en } L^2[a,a+L]$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{i}\frac{2\pi nx}{L}} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[2a_n\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) + 2b_n\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\right]$$

$$c_n = \frac{1}{L}\int_a^{a+L} e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi nx}{L}} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_a^{a+L}\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) f(x)\,dx, \quad b_n = \frac{1}{L}\int_a^{a+L}\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) f(x)\,dx$$

Espacios de funciones

- Algunas bases ortonormales importantes en L^2:
  - Bases de Fourier $\text{Convergencia en } L^2 \text{ (c.d.)}$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{i}\frac{2\pi n x}{L}} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[2a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + 2b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \right]$$

  - Criterio de convergencia de Jordan (convergencia en media)

$\text{Sea } f \in L^2_{\mathbb{C}}[a,b] \text{ de variación acotada en } (a,b)\text{, la serie de Fourier}$

$$\text{converge puntualmente a } \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon)+f(x-\epsilon)}{2}$$

  - Bases solo en senos o cosenos

$f \in L^2_{\mathbb{C}}[a,b]$ se puede desarrollar en serie de Fourier de solo cosenos o solo senos desarrollando una extensión simétrica o antisimétrica

Espacios de funciones

- Desarrollos en autofunciones
  - Sea el operador diferencial

$$\mathcal{O} \equiv \frac{d^2}{dx^2}$$

toda función $f \in L^2[a, a+L]$ se puede desarrollar en autofunciones de $\mathcal{O}$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n f_n(x)$$

con

$$f_n(x) = e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi n x}{L}}, \quad \mathcal{O} f_n = -\underbrace{\left(\frac{2\pi n}{L}\right)^2}_{\text{Autovalor}} f_n$$

Espacios de funciones

- Resumen de resultados:
  - Borelianos. Medida de Borel-Lebesgue. Funciones medibles Borel.
  - Integral de Lebesgue.
  - Funciones integrables Lebesgue. Espacios $\mathcal{L}^1$
  - Propiedades casi por doquier. Espacios L^p
  - $L^2(B)$ es espacio de Hilbert (compleción de $C(B)$)
  - Desigualdades integrales de Hölder y Minkowski
  - Bases de polinomios ortonormales en $L^2(B)$
  - Bases de Fourier. Desarrollo en serie de Fourier.
  - Desarrollo en autofunciones.

Funcionales Lineales

- Definiciones: Sea L un espacio lineal sobre el cuerpo Λ
  - Se llama funcional (o forma lineal) a toda aplicación lineal $F : L \to \Lambda$

$$F(x+y) = F(x) + F(y), \quad F(\alpha x) = \alpha F(x), \ \forall x, y \in L, \ \forall \alpha \in \Lambda$$

  - Un funcional sobre un espacio normado es continuo si

$$\forall \{x_n\} \to x \Rightarrow \{F(x_n)\} \to F(x), \ \forall x \in L$$

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 / ||x - y|| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(y)| < \epsilon$$

  - Un funcional sobre un espacio normado es acotado si

$$\exists M \geq 0 / |F(x)| \leq M||x||, \ \forall x \in L$$

$$||F|| = \sup_{x \neq 0} \frac{|F(x)|}{||x||} = \sup_{||x||=1} |F(x)| = \inf\{M \geq 0 / |F(x)| \leq M||x||\}$$

- Teorema: Sea F un funcional sobre un espacio normado

$$F \text{ es acotado} \Leftrightarrow F \text{ es continuo}$$

Funcionales Lineales

- Definición: Espacio dual de un espacio de Hilbert (H,<,>) es el conjunto de funcionales continuos sobre H.

$$\tilde{H} = \{F : H \to \Lambda / F \text{ lineal y continua}\} \equiv \mathcal{A}(H, \Lambda)$$

  Tiene estructura de espacio de Hilbert (como veremos)

- Proposición: Sea (H,<,>) espacio de Hilbert de dimensión finita:
  - Todo funcional lineal en H es continuo
  - $\dim \tilde{H} = \dim H$

- Teorema de Riesz-Fréchet: Sea (H,<,>) espacio de Hilbert (separable o no)

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall F : H \to \Lambda \text{ lineal continuo} \\ \exists ! f \in H / F(g) = \langle f, g \rangle, \ \forall g \in H \end{array}}$$

Funcionales Lineales

- Propiedades:
  - si $F \neq 0 \;\Rightarrow \dim(M_0^{\perp}) = 1 \qquad (M_0 \equiv \{h \in H / F(h) = 0\})$
  - Sea $\{e_j\}_1^n$ base ortonormal de Λ^n, $\forall \phi : H \to \Lambda^n$ lineal y continua
  $$\exists x_1, \ldots, x_n \in H / \phi(y) = \sum_1^n \langle x_j, y \rangle e_j$$
  - $||F_x||_{\mathcal{A}(H,\Lambda)} = ||x||_H$
  - F funcional de un espacio de Hilbert es continuo $\Leftrightarrow$ su núcleo M_0 es cerrado en H
  - $\tilde{H}$ es espacio de Hilbert con el producto escalar asociado a H
  $$\langle .,. \rangle : \tilde{H} \times \tilde{H} \to \Lambda$$
  $$F_f,\; F_g \to \langle F_f, F_g \rangle \equiv \langle g, f \rangle$$
  - La aplicación $f \in H \to F_f \in \tilde{H}$ con $F_f(g) = \langle f, g \rangle$,
  es una biyección isométrica antilineal

Funcionales Lineales

- Formas Bilineales: sea $(H, \langle ., . \rangle)$ espacio de Hilbert sobre Λ
  - Forma bilineal (propiamente sesquilineal): aplicación $\phi : H \times H \to \Lambda$ tal que

$$(i)\ \phi(\alpha x, \beta y) = \bar{\alpha}\beta\phi(x, y),\ \forall \alpha, \beta \in \Lambda,\ \forall x, y \in H$$
$$(ii)\ \phi(x_1 + x_2, y) = \phi(x_1, y) + \phi(x_2, y)$$
$$(iii)\ \phi(x, y_1 + y_2) = \phi(x, y_1) + \phi(x, y_2)$$

  - Una forma bilineal es acotada si $\exists k \geq 0 / |\phi(x, y)| \leq k||x||\,||y||,\ \forall x, y \in H$

$$||\phi|| = \sup_{x \neq 0 \neq y} \frac{|\phi(x, y)|}{||x||\,||y||} \text{ (es norma)}$$

  - Teorema: sea $\phi : H \times H \to \Lambda$, forma bilineal acotada sobre H (Hilbert).

$\exists! A \in \mathcal{A}(H)$ (aplicación lineal $A : H \to H$ acotada) tal que

$$\phi(x, y) = \langle x, Ay \rangle,\ \forall x, y \in H$$
$$\text{además } ||\phi|| = ||A|| \equiv \sup_{0 \neq x \in H} \frac{||Ax||}{||x||} < +\infty$$

Funcionales Lineales

- Convergencia fuerte $x_n \stackrel{f}{\to} n \Leftrightarrow ||x_n - x|| \to 0$
- Convergencia débil $x_n \stackrel{d}{\to} n \Leftrightarrow F(x_n) \to F(x),\ \forall F \in \tilde{H}$
- Teoremas:

$$x_n \stackrel{f}{\to} x \Rightarrow x_n \stackrel{d}{\to} x$$

$$\left.\begin{array}{c} x_n \stackrel{d}{\to} x \\ ||x_n|| \to ||x|| \end{array}\right\} \Leftrightarrow x_n \stackrel{f}{\to} x$$

$$\left.\begin{array}{c} x_n \stackrel{d}{\to} x \\ x_n \stackrel{f}{\to} x' \end{array}\right\} \Rightarrow x_n \stackrel{d}{\to} x'$$

Teoría de distribuciones

- Espacios de funciones prueba:
  - Espacio de funciones de soporte acotado

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) / \mathrm{sop}(f) \text{ acotado de } \mathbb{R}\}, \quad (\mathrm{sop}(f) = \{x / f(x) \neq 0\})$$

es espacio lineal y álgebra de funciones.

    - Convergencia

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f \text{ si } \begin{cases} i) \ \mathrm{sop}(f_n) \subset K \text{ acotado e independiente de } n \\ ii) \ \|f_n^{(p)} - f^{(p)}\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \ \forall p \geq 0 \end{cases}$$

  - Espacio de funciones de decrecimiento rápido

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) / \sup_{k,m\in\mathbb{N}} \|x^k f^{(m)}\|_\infty < \infty\}$$

es espacio seminormado $(\|f\|_{km} = \|x^k f^{(m)}\|_\infty$ es seminorma)

    - Convergencia

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f \text{ si } \|x^k f_n^{(m)}(x) - x^k f^{(m)}(x)\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \ \forall k, m \in \mathbb{N}$$

  - Propiedades

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f, \quad \mathcal{D} \text{ es denso en } \mathcal{S}$$

Teoría de distribuciones

- Definiciones y propiedades:
  - Distribución: $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \Lambda$ lineal y continua (en sentido de $\mathcal{D}$)

    $$T(\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2) = \alpha_1 T(\phi_1) + \alpha_2 T(\phi_2), \ \forall \alpha_{1,2} \in \Lambda, \ \forall \phi_{1,2} \in \mathcal{D}$$

    $$\phi_n \stackrel{\mathcal{D}}{\to} \phi \Rightarrow T(\phi_n) \to T(\phi)$$

  - Espacio de distribuciones: $\widetilde{\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \{T/T \text{ distribución}\}$
  - Condición suficiente de T continua

    $\exists M > 0$ indep. de $\phi / |T(\phi)| \leq M ||\phi||_\infty, \ \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \Rightarrow T$ continua en sentido de $\mathcal{D}$

  - Distribución temperada: $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \Lambda$ lineal y continua (en sentido de $\mathcal{S}$)
  - Espacio de distribuciones temperadas: $\widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$
  - La condición suficiente de continuidad aplica igual.
  - Propiedad:

    $$\widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})} \subset \widetilde{\mathcal{D}(\mathbb{R})}$$

Teoría de distribuciones

- Operaciones con distribuciones
  - Producto por una función:

$$\rho T : \phi \to T(\rho\phi) \text{ es elemento de } \widetilde{\mathcal{D}(\mathbb{R})},\ \forall \rho \in C^\infty$$

$$\text{es elemento de } \widetilde{\mathcal{S}(\mathbb{R})},\ \forall \rho \in C^\infty \text{ de crecimiento lento}$$

  - Derivada de una distribución:

$$\forall m, \exists N_m / ||\rho^{(m)}/(1+|x|^2)^{N_m}||_\infty < \infty$$

$$T^{(m)} : \phi \to T\big((-1)^m \phi^{(m)}\big)$$

  - Traslación:

$$T_a : \phi \to T(\phi_{-a}) \text{ con } \phi_a(x) \equiv \phi(x-a)$$

- Estas operaciones son continuas respecto a la siguiente definición de convergencia de distribuciones

$$T_n \to T \Leftrightarrow T_n(\phi) \to T(\phi),\ \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{S})$$

Con esta noción de convergencia $\tilde{D}$ y $\tilde{S}$ son completos y $\tilde{S}$ es denso en $\tilde{D}$

Teoría de distribuciones

- Ejemplos de distribuciones:
  - Delta de Dirac $\delta_{x_0} : \phi \to \phi(x_0)$ (distribución temperada)

Suele representarse como una función: $\delta_{x_0}(\phi) = \int \delta(x-x_0)\phi(x)\,dx$

$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} \infty, & x = x_0 \\ 0, & x \neq x_0 \end{cases}$$

y como sucesión límite de sucesiones de funciones

$$\delta_0 = \lim_{\lambda\to\infty} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} e^{-\lambda x^2} = \lim_{\epsilon\downarrow 0} (\pi \mathrm{i}\epsilon)^{-1/2} e^{\mathrm{i}x^2/\epsilon} = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\sin\lambda x}{\pi x}$$

$$\delta(x-x_0) = \frac{d}{dx}\theta(x-x_0), \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \text{(función paso de Heaviside)}$$

Sea $f(x)$ con un número finito de ceros (todos simples) entonces

$$\delta\big(f(x)\big) = \sum_1^n \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}, \quad f(x_i) = 0$$

Teoría de distribuciones

- Ejemplos de distribuciones:
  - Valor principal de $\frac{1}{x}$ (distribución temperada) $\mathrm{VP}\frac{1}{x}(\phi) = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{|x|\geq\epsilon} dx\, \frac{\phi}{x}$

$$\text{Se cumple que } \mathrm{VP}\frac{1}{x} = \frac{d}{dx}\ln|x|$$

$$\text{Derivando la expresión } \lim_{\epsilon\downarrow 0}\ln(\epsilon + \mathrm{i}x) = \ln|x| - \mathrm{i}\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\pi\theta(x), \text{ se tiene}$$

$$\frac{1}{x \mp i0} \equiv \lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{x \mp \mathrm{i}\epsilon} = \mathrm{VP}\frac{1}{x} \pm \mathrm{i}\pi\delta(x)$$

  - Distribución característica (distribución) Sea $X \subset \mathbb{R}$

$$\chi_X : \phi \to \chi_X(\phi) = \int_X \phi(x)\, dx$$

$$\text{Se suele representar por la “función” } \chi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin X, \\ 1, & x \in X \end{cases}$$

Teoría de distribuciones

- Teorema de la regularidad

$$\forall T \in \widetilde{\mathcal{D}(\mathbb{R})},\ \exists f \text{ continua en } \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N} / T = T_f^{(n)}$$

$$\text{donde } T_f(\phi) \equiv \int_{\mathbb{R}} \bar{f}(x)\phi(x)\,dx$$

- Transformada de Fourier

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}kx} f(x)\,dx,\ \text{(transformada directa)}$$

$$\check{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\mathrm{i}kx} f(y)\,dy,\ \text{(transformada inversa)}$$

$$\text{se cumple } \check{\hat{f}} = \hat{\check{f}} = f$$

- Transformada de Fourier de distribuciones

$$\hat{T}(\phi) \equiv T(\check{\phi}),\ \forall T \in \widetilde{\mathcal{D}(\mathbb{R})}$$

Teoría de distribuciones

- Resumen de resultados:
  - Funcionales lineales $T : H \to \Lambda$, acotados y continuos
  - Espacio dual: funcionales lineales acotados
  - Teorema de Riesz-Fréchet: representación de funcionales en esp de Hilbert
  - Formas bilineales y su representación en espacios de Hilbert
  - Espacios de funciones prueba (de soporte acotado y de decrecimiento rápido)
  - Distribución (temperada): funcional lineal sobre espacio de funciones prueba
  - Operaciones con distribuciones: producto por función, derivada, traslación
  - Ejemplos de distribuciones: delta, escalón, VP(1/x), distribución característica
  - Teorema de la regularidad
  - Transformada de Fourier (de distribuciones).

Operadores en espacios de Hilbert

- Definición:

Operador (anti)lineal. Aplicación (anti)lineal univaluada entre espacios de Hilbert

$$T : D(T) \subset H_1 \to R(T) \subset H_2$$

$$T(\alpha x + \beta y) = \begin{cases} \alpha T(x) + \beta T(y), & \text{(lineal)} \\ \bar{\alpha} T(x) + \bar{\beta} T(y), & \text{(anti-lineal)} \end{cases} \qquad \forall x, y \in D(T),\ \forall \alpha, \beta \in \Lambda$$

- Propiedades:
  - $D(T),\ R(T)$, $\mathrm{Ker}(T)$ son subespacios lineales
  - M subesp. lineal de $H_1 \Rightarrow TM \equiv \{Tx/x \in M\}$ es subesp. lineal de H_2
  - $\mathcal{L}(H_1, H_2) \equiv \{T : D(T) \subset H_1 \to H_2/T \text{ lineal}\}$ es espacio lineal con

    $$(T_1 + T_2)x = T_1 x + T_2 x, \quad (\alpha T)x = \alpha(Tx)$$

  - $\mathcal{L}(H) \equiv \mathcal{L}(H, H)$

Operadores en espacios de Hilbert

- Definición: Operador acotado. Sea $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2),\ D(T) = H_1$

$$T \text{ es acotado si } \exists M \geq 0 / ||Tx||_{H_2} \leq M||x||_{H_1},\ \forall x \in H_1$$

  - $\mathcal{A}(H_1, H_2) = \{T : H_1 \to H_2 / T \text{ lineal acotado}\}$ es espacio normado

$$\text{con la norma } ||T|| \equiv \sup_{x \neq 0} \frac{||Tx||}{||x||}$$

- Definición: Operador continuo.

  $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ es continuo en $x \in H_1$ si

$$\forall \{x_n\} \to x \Rightarrow \{Tx_n\} \to Tx,\ \left[||x_n - x|| \to 0 \Rightarrow ||Tx_n - Tx|| \to 0\right]$$

- $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ es continuo si lo es $\forall x \in H_1$ $T\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} Tx_n$
- Teorema: $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2),\ H_{1,2}$ espacios de Hilbert

$$T \in \mathcal{A}(H_1, H_2) \Leftrightarrow T \text{ continuo } \Leftrightarrow T \text{ continuo en algún pto. de } H_1$$

- Espacio dual: $\tilde{H} = \mathcal{A}(H, \Lambda)$

Operadores en espacios de Hilbert

- Propiedad: $T \in \mathcal{A}(H_1, H_2) \Rightarrow \mathrm{Ker}(T)$ es cerrado
- Definición: $T : D(T) \neq H_1 \to H_2$ es acotado en su dominio si

$$\exists M \geq 0 / ||Tx|| \leq M||x||, \ \forall x \in D(T), \quad ||T|| = \sup_{0 \neq x \in D(T)} \frac{||Tx||}{||x||}$$

- Teorema (de extensión de operadores acotados en dominio denso):

  Sea $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ acotado en su dominio, denso en H_1 $(\overline{D(T)} = H_1)$

  $\exists! \tilde{T} \in \mathcal{A}(H_1, H_2)$ que extiende T a todo H_1 y además $||\tilde{T}|| = ||T||$

  solución $\quad \tilde{T}x = \begin{cases} Tx, & x \in D(T), \\ \lim\limits_{n\to\infty} Tx_n, & x_n \in D(T), \ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \notin D(T) \end{cases}$

- Propiedades:
  - $\mathcal{A}(H)$ es espacio de Banach y álgebra de funciones con $ST(x) = S\big(T(x)\big)$
  - $||ST|| \leq ||S|| \, ||T||$
  - Conmutador de operadores: $[S, T] = ST - TS \neq 0$ en general

Operadores en espacios de Hilbert

- Definición: Sea $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, se define el operador inverso (si existe)

$$T^{-1} : R(T) \subset H_2 \to D(T) \subset H_1 \text{ tal que } \begin{array}{l} T^{-1}Tx = x,\ \forall x \in D(T) = R(T^{-1}) \\ TT^{-1}y = y,\ \forall y \in R(T) = D(T^{-1}) \end{array}$$

- Criterio de existencia de operador inverso Sea $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$

$$\exists\, T^{-1} \in \mathcal{L}(H_2, H_1) \Leftrightarrow T \text{ es inyectivo } \Leftrightarrow Tx = 0 \Rightarrow x = 0$$

Nota: Sea $T \in \mathcal{A}(H_1, H_2),\ R(T) = H_2,\ T$ inyectivo $\not\Rightarrow T^{-1} \in \mathcal{A}(H_2, H_1)$

- Teorema (criterio de inversión manteniendo acotación):

Sea $T \in \mathcal{A}(H_1, H_2),\ R(T) = H_2,\ H_{1,2} \neq \{0\}$ entonces

$$T^{-1} \in \mathcal{A}(H_2, H_1) \Leftrightarrow \exists k > 0 \ / \ ||Tv|| \geq k||v||,\ \forall v \in H_1$$

- Corolario: Sea $T \in \mathcal{A}(H)$ biyectivo, con $H \neq \{0\}$. Entonces

$$T^{-1} \in \mathcal{A}(H) \Leftrightarrow \exists k > 0 \ / \ ||Tv|| \geq k||v||,\ \forall v \in H$$

Operadores en espacios de Hilbert

- Topologías en $\mathcal{A}(H)$: $\text{sea } \{A_n \in \mathcal{A}(H)\}_1^\infty$
  - Topología uniforme o de la norma

$$A_n \xrightarrow{u} A \Leftrightarrow ||A_n - A|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

  - Topología fuerte

$$A_n \xrightarrow{f} A \Leftrightarrow A_n v \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Av, \ \forall v \in H$$

  - Topología débil

$$A_n \xrightarrow{d} A \Leftrightarrow \langle w, A_n v\rangle \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle w, Av\rangle, \ \forall v, w \in H$$

- En dimensión finita (dim H finita) son todas equivalentes
- En dimensión infinita

$$\text{Top. uniforme} \underset{\neq}{>} \ \text{Top. fuerte} \underset{\neq}{>} \ \text{Top. débil}$$

Operadores en espacios de Hilbert

- Algunos operadores interesantes
  - Operadores en dimensión finita

$$T \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow \text{ matriz en } \Lambda^n$$

$$\mathcal{A}(H_n) = \mathcal{L}(H_n) \text{ [todo operador lineal es acotado)]}$$

  - Operadores destrucción, creación y número (en l^2_Λ)

$$\begin{aligned} a \quad &: (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots) \to (\alpha_1, \sqrt{2}\alpha_2, \ldots, \sqrt{n+1}\alpha_{n+1}, \ldots) \\ a^+ &: (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots) \to (0, \alpha_0, \sqrt{2}\alpha_1, \ldots, \sqrt{n}\alpha_{n-1}, \ldots) \\ N \quad &: (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots) \to (0, \alpha_1, 2\alpha_2, \ldots, n\alpha_n, \ldots) \end{aligned}$$

  - Operador rotación (en $L^2(\mathbb{R}^3)$). Sea R una rotación en $\mathbb{R}^3$ alrededor del origen

$$U(R) : f(x) \to f(R^{-1}x)$$

  - Operador traslación (en $L^2(\mathbb{R}^n)$). Sea $a \in \mathbb{R}^n$ fijo

$$U_a : f(x) \to f(x-a)$$

Operadores en espacios de Hilbert

- Algunos operadores interesantes
  - Operador posición (en $L^2(B)$).

$$Q : f(x) \to x f(x)$$

  - Operador derivación. Sea $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f \text{ de decrecimiento rápido}\}$, denso en $L^2(\mathbb{R})$

$$P : f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to -\mathrm{i}\frac{d}{dx} f(x)$$

  - Propiedades: definamos los operadores posición y momento en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$Q_j : f(x) \to x_j f(x)$$

$$(j, k = 1, 2, \ldots, n)$$

$$P_k : f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to -\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_k} f(x)$$

se cumple

$$Q_j,\ P_k \text{ no son acotados y cumplen } [Q_j, P_k] = i\delta_{jk} 1_{\mathcal{S}}$$

Operadores en espacios de Hilbert

- Operador adjunto

Dado $A \in \mathcal{A}(H)$ con H espacio de Hilbert, se define su operador adjunto como el único operador $A^\dagger$ $(\in \mathcal{A}(H))$ que satisface

$$\boxed{\langle w, Av \rangle = \langle A^\dagger w, v \rangle} \qquad \forall v, w \in H$$

- Propiedades:

$i)$ La aplicación $A \to A^\dagger$ es una biyección antilineal isométrica de $\mathcal{A}(H)$

$$\left[||A^\dagger|| = ||A||, \ (\alpha A + \beta B)^\dagger = \bar{\alpha} A^\dagger + \bar{b} B^\dagger \right]$$

$ii)$ $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$

$iii)$ $(A^\dagger)^\dagger = A$

$iv)$ $A, A^{-1} \in \mathcal{A}(H) \Rightarrow (A^\dagger)^{-1} = (A^{-1})^\dagger$

$v)$ $||A^\dagger A|| = ||A||^2$

$vi)$ $A^\dagger = (A^{\mathrm{T}})^*$ en dimensión finita

Operadores en espacios de Hilbert

- Igualdad de operadores

$$A = B \text{ si } D(A) = D(B) = D, \; Ax = Bx, \; \forall x \in D$$

$$(\text{equiv. si } D(A) = D(B) = D, \; \langle y, Ax \rangle = \langle y, Bx \rangle \; \forall x \in D, \; \forall y \in H)$$

- Tipos especiales de operadores: $\text{Sea } T : D(T) \text{ denso en } H \to H$
  - Operador simétrico o hermítico

$$T \subset T^\dagger \quad \left[D(T) \underset{\neq}{\subset} D(T^\dagger), \; \langle x, Ty \rangle = \langle Tx, y \rangle, \; \forall x, y \in D(T) \right]$$

  - Operador autoadjunto

$$T = T^\dagger \quad \left[D(T) = D(T^\dagger), \; \langle x, Ty \rangle = \langle Tx, y \rangle, \; \forall x, y \in D(T) \right]$$

  - Operador autoadjunto acotado

$$A \in \mathcal{A}(H) \; / \; A = A^\dagger \qquad \left[A = A^\dagger \Leftrightarrow \langle x, Ax \rangle \in \mathbb{R}, \; \forall x \in H \right]$$

Operadores en espacios de Hilbert

- Propiedades de operadores autoadjuntos acotados

$$\text{Sean } A, B \in \mathcal{A}(H),\ A = A^\dagger,\ B = B^\dagger$$

$$i)\ ||A|| = \sup_{x\neq 0} \frac{|\langle x, Ax\rangle|}{||x||^2}$$

$$ii)\ \alpha A + \beta B \text{ es autoadjunto acotado } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$iii)\ AB \text{ es autoadjunto acotado } \Leftrightarrow [A, B] = 0$$

$$iv)\ ||A^n|| = ||A||^n$$

- Operador isométrico

$$T : D(T) \subset H \to H / ||Tx|| = ||x||,\ \forall x \in D(T)$$

propiedad

$$\boxed{T \text{ isométrico}} \quad \begin{array}{c}\Rightarrow \\ \not\Leftarrow\end{array} \quad \boxed{T \text{ acotado en su dominio con } ||T|| = 1}$$

Operadores en espacios de Hilbert

- Operador unitario

$$U \in \mathcal{A}(H) \ / \ U^\dagger = U^{-1}$$

Nota:

$$U \in \mathcal{A}(H) \text{ isométrico} \Leftrightarrow U^\dagger U = 1 \quad \left[UU^\dagger = 1 \Leftrightarrow R(U) = H \right]$$

$$U \in \mathcal{A}(H) \text{ unitario} \Leftrightarrow U^\dagger U = UU^\dagger = 1$$

- Caracterización de operador unitario. Sea $U \in \mathcal{A}(H)$. Son equivalentes

$$i) \ U \text{ unitario}$$

$$ii) \ R(U) = H, \langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle, \ \forall x, y \in H$$

$$iii) \ R(U) = H, ||Ux|| = ||x||, \ \forall x \in H$$

$$iv) \ \{e_\alpha\}_{\alpha \in A} \text{ base ortonormal de } H \Rightarrow \{Ue_\alpha\}_{\alpha \in A} \text{ base ortonormal de } H$$

$$v) \ U^\dagger \text{ es unitario}$$

Operadores en espacios de Hilbert

- Proyector ortogonal

$$P \in \mathcal{A} \text{ es proyector ortogonal si } P^2 = P = P^\dagger$$

- Teorema: $\text{Sea } P \text{ proyector ortogonal, entonces}$

$$\exists\, M \text{ subesp. lin. cerrado en } H \text{ tal que } P \text{ es el proyector ortogonal sobre } M$$

- Operador normal

$$A : D(A) \text{ denso en } H \to H \ / \ D(AA^\dagger) = D(A^\dagger A),\ [A, A^\dagger] = 0$$

Nota: $A \in \mathcal{A}(H) \Rightarrow A^\dagger \in \mathcal{A}(H) \Rightarrow D(AA^\dagger) = D(A^\dagger A) = H$

$$A \in \mathcal{A}(H) \text{ normal} \Leftrightarrow ||Av|| = ||A^\dagger v||,\ \forall v \in H$$

- Propiedades: $A \text{ autoadjunto } \Rightarrow A \text{ normal } (AA^\dagger = A^\dagger A = A^2)$

$$A \text{ hermítico } \not\Rightarrow A \text{ normal } (D(AA^\dagger) \neq D(A^\dagger A))$$
$$A \text{ unitario } \Rightarrow A \text{ normal } (AA^\dagger = A^\dagger A = 1)$$
$$A \text{ isométrico } \not\Rightarrow A \text{ normal } (D(AA^\dagger) \neq D(A^\dagger A))$$

Operadores en espacios de Hilbert

- Resumen de resultados
  - Operador $\mathcal{L}(H_1, H_2)$, acotado $\mathcal{A}(H_1, H_2)$ y acotado en su dominio
  - Operador continuo $\Leftrightarrow$ acotado
  - Teorema de extensión de ops acotados con dominio denso
  - Operador inverso. Existencia del operador inverso (manteniendo acotación)
  - Topologías uniforme, fuerte y débil en $\mathcal{A}(H)$
  - Ejemplos de operadores (dim. finita, creación, destrucción, número, posición, derivada)
  - Operador adjunto
  - Operador hermítico, autoadjunto, isométrico, unitario, normal
  - Proyector ortogonal

Teoría espectral de operadores

- Definición: Espectro y resolvente de operadores lineales

  Sea $A \in \mathcal{L}(H)$, con dominio denso en H, espacio de Hilbert separable sobre $\mathbb{C}$

  - $\mathbb{C}$ se puede separar en los siguientes subconjuntos, según el comportamiento del operador $(A - \lambda I)^{-1}$

$$\mathbb{C} = \rho \cup \sigma \equiv \rho \cup \sigma_p \cup \sigma_r \cup \sigma_c, \text{ disjuntos dos a dos}$$

$\lambda \in \mathbb{C}$	$(A - \lambda I)^{-1}$	$R(A - \lambda I)$	$(A - \lambda I)^{-1}$
$\sigma_p(A)$	no existe	-	-
$\sigma_r(A)$	existe	no denso en H	-
$\sigma_c(A)$	existe	denso en H	no acotado en su dominio
$\rho(A)$	existe	denso en H	acotado en su dominio

Teoría espectral de operadores

- Propiedades:
  - Autovectores y autovalores $\lambda \in \sigma_p(A) \Leftrightarrow \exists v_\lambda \neq \text{ en } D(A)/Av_\lambda = \lambda v_\lambda$
  - Independencia lineal de autovectores con autovalores distintos

$$\{\lambda_i\}_1^n \subset \sigma_p(A),\ Av_i = \lambda_i v_i,\ \lambda_i \neq \lambda_j\ (i \neq j) \Rightarrow \{v_i\} \text{ l.i.}$$

  - Propiedades topológicas de espectro y resolvente

$$\forall A \in \mathcal{L}(H) \Rightarrow \rho(A) \text{ abierto},\ \sigma(A) \text{ cerrado en } \mathbb{R}^2$$

  - Espectro del operador adjunto: $\text{sea } A \in \mathcal{A}(H)$

$$\boxed{\begin{array}{l} i)\ \lambda \in \rho(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \rho(A^\dagger) \\ ii)\ \lambda \in \sigma_p(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_p(A^\dagger) \cup \sigma_r(A^\dagger) \\ iii)\ \lambda \in \sigma_r(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_p(A^\dagger) \\ iv)\ \lambda \in \sigma_c(A) \Leftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_c(A^\dagger) \end{array}}$$

Teoría espectral de operadores

- Propiedades:
  - Espectro operadores normales: $\text{sea } A \in \mathcal{A}(H) \text{ normal}$

$$a) Av = \lambda v \Leftrightarrow A^{\dagger} v = \bar{\lambda} v$$

$$b) Av_i = \lambda_i v_i, \; \lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow v_i \perp v_j$$

$$c) \sigma_r(A) = \emptyset$$

  - Espectro operadores unitarios (en particular normales):

$$U \text{ unitario} \Rightarrow \sigma(U) = \sigma_p(U) \cup \sigma_c(U) \subset \{\lambda / |\lambda| = 1\}$$

  - Espectro operadores isométricos (en general no normales):

$$A \text{ isométrico} \Rightarrow \sigma_p(A) \subset \{\lambda / |\lambda| = 1\}, \; \left[\text{en general } \sigma(A) \not\subset \{|\lambda| = 1\}, \; \sigma_r \neq \emptyset\right]$$

Teoría espectral de operadores

- Propiedades:
  - Espectro proyectores ortogonales:

$$\sigma(0) = \{0\}, \quad \sigma(1) = \{1\}, \text{ todos los demás proyectores ortogonales satisfacen}$$

$$P \in \mathcal{A}(H), P^2 = P = P^\dagger,\ 0 \neq P \neq 1, \Rightarrow \sigma(P) = \sigma_p(P) = \{0, 1\}$$

  - Espectro operadores autoadjuntos: sea $A \in \mathcal{A}(H)$ autoadjunto

$$1)\ \sigma(A) \subset \mathbb{R},\ \sigma_r(A) = \emptyset$$

$$2)\ \sigma(A) \subset \left[\inf_{||v||=1} \langle v, Av\rangle, \sup_{||v||=1} \langle v, Av\rangle\right]$$

$$3)\ M_\lambda(A) = \{v \in H / Av = \lambda v\} \text{ subespacio lineal cerrado}$$

$$4)\ \forall A \in \mathcal{A}(H),\ A = A^\dagger \Rightarrow \exists\{v_i\} \text{ ortonormal, maximal } / Av_i = \lambda_i v_i$$

$$\text{(no necesariamente completo en } H)$$

Teoría espectral de operadores

- Definición: $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ es compacto $\big(A \in \mathcal{C}(H_1, H_2)\big)$

  si $\overline{A(X)}$ es compacto en $H_1,\ \forall X \subset H_1,\ X$ acotado (es decir $\sup\limits_{x \in X} ||x|| < \infty$)

  - Si $\dim(H) < \infty \rightarrow \mathcal{L}(H) = \mathcal{A}(H) = \mathcal{C}(H)$

- Teorema: $\forall A \in \mathcal{C}(H)$

  1) $\sum\limits_{\lambda \in \sigma_p / |\lambda| > k} \dim M_\lambda(A) < +\infty,\ \forall k > 0$

  2) $\sigma_p(A)$ es a lo sumo numerable, con 0 como único pto de acumulación posible

  3) $\mathbb{C} - \{0\} \subset \sigma_p(A) \cup \rho(A)$

  4) $0 \in \sigma(A)$

  5) $\sigma_r(A) \cup \sigma_c(A) \subset \{0\}$