

Operadores

Ejercicio 1: Operadores Acotados

Sea el operador en \mathbb{R}^2 definido por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix},$$

sobre una base ortonormal. ¿Es Acotado? Si lo es calcula su norma.

Ejercicio 2: Operadores Acotados

Sea el operador en \mathbb{R}^3 con matriz representativa

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

en una base ortonormal. Calcula su norma.

Ejercicio 3: Operadores acotados

Sea $H = L^2[a, b]$ y $A : H \rightarrow H$ el operador definido por

$$Af(x) = \cos(x)f(x).$$

¿Para qué valores de a y b es A acotado? Calcula su norma.

Ejercicio 4: Operadores continuos y acotados

Sea $H = \mathbb{R}$ y los siguientes operadores

i) $A(x) = x^2$

ii) $B(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| > 1 \\ 0, & \text{si } |x| \leq 1 \end{cases}$

¿Son continuos? ¿Y acotados?

Ejercicio 5: Operadores lineales

Discute cuáles de los siguientes operadores son lineales:

i) $A(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = (\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots) \in l_{\mathbb{C}}^2$.

ii) $A(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^n$.

iii) $A(v) = v + v_0 \in \mathbb{R}^3$, con v_0 un vector fijo, no nulo, de \mathbb{R}^3 .

iv) $A(f) = \chi_{[0,2]}(x)\chi_{[1,6]}(x)f(x) \in L^2$.

v) $A(f) = f(x+1) \in L^2(\mathbb{R})$.

Ejercicio 6: Conmutador de operadores

Calcula el conmutador de los siguientes operadores

$$\begin{aligned} A &: f(x) \in \mathcal{S} \in L^2(\mathbb{R}) \rightarrow xf'(x), \\ B &: f(x) \in \mathcal{S} \in L^2(\mathbb{R}) \rightarrow xf(x) + 3f''(x), \end{aligned}$$

Ejercicio 7: Operador inverso

Discute si los siguientes operadores son acotados en su dominio, si existe el operador inverso y si éste es acotado.

- i) a, a^+, N en $l^2_{\mathbb{A}}$.
- ii) R operador rotación en $L^2(\mathbb{R}^3)$.
- iii) $Q: f(x) \rightarrow xf(x)$ en $L^2[a, b]$.
- iv) $Q: f(x) \rightarrow xf(x)$ en $L^2(\mathbb{R})$.

Ejercicio 8: Operador adjunto

Sea el espacio de Hilbert $H = L^2[-1, 1]$ y el operador

$$(Tf)(x) = \int_{-1}^1 dy (x^2 + y^3 + 3ixy)f(y).$$

Demuestra que es un operador lineal continuo y obtén su adjunto.

Ejercicio 9: Operador Paridad

Sea el espacio de Hilbert $H = L^2(\mathbb{R})$ y el operador paridad definido por

$$(Pf)(x) = f(-x).$$

Demuestra que es un operador lineal acotado y calcula su norma. ¿Es proyector en alguna dirección? ¿Es Unitario? ¿Es autoadjunto? Obtén su espectro.

Ejercicio 10: Espectro de Operadores

Sea un espacio de Hilbert de dimensión 2 y el operador lineal T definido en una cierta base ortonormal

$$T|e_1\rangle = |e_1\rangle, \quad T|e_2\rangle = |e_1\rangle + |e_2\rangle.$$

¿Es un operador acotado? Calcula su norma si lo es. Calcula su adjunto y su espectro y resolvente.

Ejercicio 11: Operador Adjunto

Considera el operador $A \in \mathcal{A}(l_{\mathbb{C}}^2)$ definido por

$$Ax = A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_{2n}, \dots) = (0, \alpha_1, 0, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots).$$

Calcula:

- i) $\|A\|$, A^+ , A^{++} y $\|A^+\|$.
- ii) Si los siguientes puntos $\lambda = 2$, $\lambda = 0$, $\lambda = i/2$ y $\lambda = 1$ pertenecen o no al espectro (y a cuál).