Funcionales lineales y distribuciones

Ejercicio 1: Funcionales lineales continuos

Considera el espacio de las matrices reales 2×2 con producto escalar

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}[A^T B].$$

Encuentra, en el caso que sea posible, los vectores asociados a los funcionales:

(i) $F(A) = \mathrm{Tr}[A]$,

(ii) $F(A) = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22}$.

Ejercicio 2: Funcionales lineales continuos

Sea el espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. Discute cuáles de los siguientes funcionales son lineales y continuos. Para los que lo sean, encontrar los vectores f que los representan:

(a) $F_1(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f\,\mathrm{dx}$.

(b) $F_2(f) = \int_0^1 f^2\,\mathrm{dx}$.

(c) $F_3(f) = 1 + \int_{\mathbb{R}} |f|\,\mathrm{dx}$.

Ejercicio 3: Funcionales lineales continuos

Considera los siguientes funcionales que actúan en $l^2_{\mathbb{R}}$

$$(i)\ F(\{a_n\}_1^\infty) = \sum_1^\infty \frac{a_n}{n}, \qquad (ii)\ F(\{a_n\}_1^\infty) = \sum_1^\infty a_{2n+1}.$$

Comprueba si son continuos y calcula sus normas cuando sea posible. Demuestra que $M = \left\{\{a_n\}_1^\infty / \sum_{k=1}^\infty a_{2k-1} = 0\right\}$, no es cerrado.

Ejercicio 4: Funcionales lineales continuos

Sea $\mathcal{P} \in H = L^2[0, 2\pi]$ el conjunto de polinomios $P(x)$ en $[0, 2\pi]$. Da algún ejemplo, si existe, de un funcional lineal continuo F definido sobre H tal que:

$$(i)\ F(P) = 1,\ \forall P \in \mathcal{P}, \qquad (ii)\ F(P) = 0,\ \forall P \in \mathcal{P}.$$

Ejercicio 5: Formas bilineales

Halla el operador A_j que representa cada una de las siguientes formas bilineales continuas, definidas sobre $H = l^2_{\mathbb{C}}$. $v = \{\alpha_n\}$, $w = \{\beta_n\}$, referidos a una cierta base ortonormal $\{e_j\}$ de H.

$$(i)\ \phi_1(w, v) \equiv \bar{\beta}_2\alpha_1, \qquad (ii)\ \phi_2(w, v) = \sum_1^{10} \bar{\beta}_j\alpha_j, \qquad (iii)\ \phi_3(w, v) = \sum_1^\infty \frac{\bar{\beta}_j\alpha_{j+1}}{j}.$$

Ejercicio 6: Convergencia fuerte y débil

Estudia la convergencia fuerte y débil de las sucesiones de l^2, $v_n = ne_n$ y $w_n = e_n/n$, donde e_n es la base canónica.

Ejercicio 7: Distribuciones

Calcula el límite como distribución de

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \exp(-x^2/\epsilon).$$

Ejercicio 8: Distribuciones

Calcula la derivada tercera de $x^2\theta(x)/2$ en el sentido de distribuciones.

Ejercicio 9: Distribuciones

¿Cómo definirías la conjugación de una distribución?

Ejercicio 10: Distribuciones

Sea una función discontinua en $x = 0$ con salto finito dado por $\sigma = f(0^+) - f(0^-)$ y continua y derivable en el resto de puntos de $\mathbb{R}$. Sea $\{f'\}$ la derivada usual en $x \neq 0$ y 0 en $x = 0$. Demuestra que la derivada en el sentido de distribuciones, f' es

$$f' = \{f'\} + \sigma\delta_0.$$

Ejercicio 11: Funcionales lineales (Problema a entregar)

Sea $H = l^2_{\mathbb{C}}$ y las siguientes aplicaciones:

$$A : H \to \mathbb{C}, \quad A(\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}) = \alpha_1 \sum_{n=1}^{157} \alpha_{3n},$$

$$B : H \to \mathbb{C}, \quad B(\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}) = \alpha_1 + \frac{1}{300}\alpha_{300} + \frac{1}{5}\alpha_{500},$$

$$C : H \times H \to \mathbb{C}, \quad C(\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_{2n+1}\beta_{2n+1}.$$

¿Son A y B formas (funcionales) lineales? Si lo son, ¿son continuas? Encuentra el vector dual asociado cuando se pueda. ¿Es C forma bilineal (sesquilineal) acotada? Encuentra el operador lineal asociado.