Espacios de funciones

Ejercicio 1: Aproximación óptima de funciones

Calcula la distancia de la función $f(x) = x^2$ al subespacio de $L^2[-1,1]$ generado por las funciones $\{\text{sen}(x), \cos(x)\}$.

Ejercicio 2: Aproximación óptima de funciones

Aproxima de manera óptima la función de $L^2[0,\pi]$ $\text{sen}(x)$ en el subespacio de polinomios de grado menor o igual a 1. Estima la mejora en la aproximación cuando aumentamos hasta segundo grado. Compara con la aproximación dada por la serie de Taylor en torno a $x = 0$ cuando te alejas de dicho punto.

Ejercicio 3: Aproximación óptima de funciones

Encuentra la aproximación óptima a $f(x) = \ln(1+x)$ mediante polinomios ortonormales hasta segundo grado en el intervalo $[0,1]$. Compara con el desarrollo de Taylor hasta orden x^2.

Ejercicio 4: Espacios de funciones con producto escalar

Sea $(P_2, ||.||)$ el espacio

$$P_2 = \left\{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, x \in [0,1], a_{0,1,2} \in \mathbb{C}\right\},$$

con norma $||p(x)|| = (|a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2)^{1/2}$. ¿Cumple dicha norma la identidad del paralelogramo? Si la cumple, calcula el producto escalar asociado. ¿Coincide con el producto escalar usual en espacio de funciones (el asociado a L^2)? ¿Por qué?

Ejercicio 5: Proyección ortogonal en espacios de funciones

Sea $H = L^2[-1,1]$. Consideramos el siguiente subconjunto de H

$$M = [\{q_n\}_{n=1}^{\infty}],$$

donde hemos definido los vectores $q_n = n\bar{P}_n(x) - \bar{P}_{n-1}(x)$. ¿Es subespacio vectorial?

(i) Calcula $M^\perp$.

(ii) ¿Existe para toda función de $f \in H$ una sucesión de vectores que converja a f?

(iii) ¿Existe la proyección ortogonal en M de cualquier función f? ¿Y sobre $M^\perp$?

Ejercicio 6: Aproximación óptima

Sea $M = [\{1, \ln x, (\ln x)^2\}] \subset L^2[0,1]$. Aproxima la función x^2 en M y calcula su distancia a M.

Ejercicio 7: Desarrollo de Fourier

Encuentra un desarrollo trigonométrico de Fourier que converja puntualmente en $[-1, 1]$ a la función $f(x) = x$.

Ejercicio 8: Desarrollo de Fourier

Desarrolla en senos en $[-\pi, \pi]$ la función $\operatorname{sen}^3 x$.

Ejercicio 9: Desarrollo de Fourier

Usa el desarrollo trigonométrico de la función $f(x) = x^2$ para encontrar el valor de la suma de las siguientes series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Ejercicio 10: Desarrollo de Fourier (problema a entregar)

Obtén la serie de Fourier de senos y cosenos para la función $f(x) = x^2$ en $L^2([-\pi, +\pi])$ y, utilizando la identidad de Parseval, demuestra que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$