Espacios con producto escalar y de Hilbert

Ejercicio 1: Espacios de dimensión finita

Sea X un espacio lineal de dimensión finita y $\{e_i\}_1^n$ una base de Hamel. Demuestra que cualquier producto interior sobre X está completamente determinado por los valores $\gamma_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$, $i, j = 1, \ldots, n$. ¿Es posible elegir arbitrariamente γ_{ij}?.

Ejercicio 2: Teorema de Pitágoras

Sea H un espacio de Hilbert sobre cuerpo Λ. Demuestra que dos vectores ortogonales satisfacen $x_1 \perp x_2 \Rightarrow ||x_1 + x_2|| = ||x_1 - x_2||$.
¿Es cierto el recíproco del teorema de Pitágoras? Es decir, ¿son necesariamente ortogonales un número arbitrario de vectores que cumplen $||\sum_i x_i||^2 = \sum_i ||x_i||^2$?

Ejercicio 3: Espacios pre-Hilbert y normados

Sea X un espacio pre-Hilbert. Demuestra que

$$||\lambda x + (1-\lambda)y|| = ||x||, \ \forall \lambda \in [0,1] \Rightarrow x = y.$$

¿Es cierto si el espacio es normado?

Ejercicio 4: Norma y producto escalar

Sea L el conjunto de matrices 2×2 hermíticas (iguales a la compleja de su traspuesta) y de traza nula sobre $\mathbb{C}$. Sabiendo que es espacio lineal normado con la norma

$$||A||^2 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A \cdot A),$$

comprueba si dicha norma deriva de un producto escalar y calcúlalo en caso afirmativo. Encuentra una base ortonormal.

Ejercicio 5: Norma y producto escalar

Sea $\mathcal{M}_{n\times n}$ el conjunto de matrices complejas con la suma y producto por escalares usuales. Construye un espacio pre-Hilbert a partir de la norma

$$||A|| = \frac{1}{n}\left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}.$$

Encuentra una base ortonormal para $n = 2$ que contenga a la matrix

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y determina la proyección de la matriz identidad en el subespacio ortogonal a $[S]$.

Ejercicio 6: Norma en espacios de Hilbert

Sea H un espacio de Hilbert y v un vector de H. Demuestra que

$$||v|| = \sup_{||w||=1} |\langle v, w\rangle|.$$

Ejercicio 7: Espacios pre-Hilbert y suma directa ortogonal

Muestra que el expacio $C[-1,1]$ con producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} dt \bar{f}(t) g(t),$$

es pre-Hilbert. ¿Es Hilbert? Demuestra que se puede escribir como suma directa ortogonal de los conjuntos de funciones pares e impares en $[-1,1]$.

Ejercicio 8: Espacios pre-Hilbert y suma directa ortogonal

Sea X el subespacio de l^2 de sucesiones con soporte finito (es decir, que sólo tienen un número finito de elementos distinto de cero). Muestra que X no es completo. Sea M el siguiente subespacio de X

$$M = \{y \in X / y \perp x_0\}, \quad x_0 = \left\{\frac{1}{n}\right\}_1^\infty .$$

Muestra que M es cerrado pero que $X \neq M \oplus M^\perp$. ¿Qué ocurriría si X fuese completo?

Ejercicio 9: Suma directa ortogonal

Muestra que $Y = \{\{\xi_n\}_1^\infty \in l^2 / \xi_{2n} = 0\}$ es subespacio cerrado de l^2 y encuentra $Y^\perp$. ¿Es $l^2 = Y \oplus Y^\perp$?

Ejercicio 10: Aproximación óptima

Sea el espacio de Hilbert $H = \mathbb{C}^4$. Obtén la distancia del vector $v = (1, 2, 1 + \mathrm{i}, -4)$ al subespacio generado por los vectores $\{(0,1,0,0), (0,0,0,1)\}$.

Ejercicio 11: Espacio $l^2_\mathbb{C}$

Estudia si las siguientes sucesiones pertenecen a $l^2_\mathbb{C}$:

a) $x = (1, 2 - 1/2, 2 - 1/3, \ldots, 2 - 1/n, \ldots)$,

b) $y = (1/\mathrm{i}, 0, 3/2\mathrm{i}, \ldots, (2n-1)/(n\mathrm{i}), \ldots)$

Ejercicio 12: Espacio $l^2_{\mathbb{C}}$

Sea M el siguiente subespacio de l^2

$$M = \left\{ \{x_k\}_1^\infty / x_{2k-1} = a_k + b_k \cos\frac{1}{k}, x_{2k} = b_k \mathrm{sen}\frac{1}{k}, \{a_k\}, \{b_k\} \in l^2 \right\},$$

Demuestra que no es cerrado mostrando que $\overline{M} = l^2$ y que el siguiente vector de l^2

$$z = \left\{ \{z_k\}_1^\infty / z_{2k-1} = 0, z_{2k} = \mathrm{sen}\frac{1}{k} \right\}$$

no pertenece a M.

Ejercicio 13: Subespacios densos

Sea $\{e_k\}_1^\infty$ una base ortonormal de un espacio de Hilbert. Sean los siguientes subespacios

$$M_1 = [\{x_k\}_1^\infty], \quad M_2 = [\{u_k\}_1^\infty], \quad M_3 = [\{w_k\}_2^\infty], \quad M_4 = [\{y_k\}_1^\infty],$$

donde hemos definido los vectores

$$x_k = e_k + e_{k+1}, \quad v_k = \sum_{j=1}^{k} e_j, \quad w_k = (-1)^k e_k - e_1, \quad y_k = e_k/(k+1) - e_{k+1}.$$

¿Son densos en H? ¿Son cerrados? ¿ Se puede definir la aproximación óptima a cualquier vector de H sobre M_i?

Ejercicio 14: Proyectores ortogonales

Muestra que las siguientes proposiciones son equivalentes en un espacio de Hilbert

i) P es una proyección ortogonal.

ii) P es idempotente, es decir $P^2 = P$, y cumple $R(P) \perp R(I - P)$ (R representa el recorrido o imagen del proyector).

iii) P es idempotente y $\big(R(P)\big)^\perp = \{x \in H / P(x) = 0\}$.

Ejercicio 15: Bases ortonormales

Sea $\{e_n\}$ una base ortonormal de un espacio de Hilbert complejo separable H de dimensión N (puede ser infinito numerable). Demuestra que

$$N \text{ finito } \Leftrightarrow \exists v \in H,\ v \neq 0 / \{e_j - v\} \text{ es ortonormal.}$$

Ejercicio 16: Aproximación óptima (Problema a entregar)

Sea $H = l^2_{\mathbb{C}}$ y $B = \{e_1, e_2 + e_3, e_1 + e_2 - e_3\}$, con $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ la base canónica de H. ¿Cuál es el menor subespacio M que contiene a B? ¿Es B base ortonormal de M? Si no lo es encuentra una base ortonormal de M. Calcula la distancia de los siguientes vectores a M:

$$\begin{aligned} x_1 &= (1, 1, 1, 1, 0, \ldots), \\ x_2 &= (0, 0, 0, 1, 0, \ldots), \\ x_3 &= (1, 0, 0, 0, 0, \ldots). \end{aligned}$$

Ejercicio 17: Aproximación óptima (Problema a entregar)

Sea el espacio de Hilbert de matrices reales 2×2 con producto escalar

$$\langle A, B \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(A^T B).$$

Encuentra la distancia de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

al subespacio generado por las matrices

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$