Espacios lineales, métricos y normados

Ejercicio 1: Suma directa

Demuestra que $\dim(M_1 \vec{\oplus} M_1 \vec{\oplus} \ldots \vec{\oplus} M_n) = \dim(M_1) + \dim(M_2) + \ldots \dim(M_n)$.

Ejercicio 2: Subespacios lineales

Sea $M \subset l^2_{\mathbb{C}}$. $M = \{v = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in l^2_{\mathbb{C}} / |\alpha_1| \geq |\alpha_2| \geq \ldots\}$. ¿Es subespacio lineal de $l^2_{\mathbb{C}}$?

Ejercicio 3: Propiedades de la distancia

Sea d métrica en X. ¿Para qué valores de la constante κ son κd y $\kappa + d$ métricas?

Ejercicio 4: Propiedades de la distancia

Sea $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $d(x, y) = |x^2 - y^2|$. ¿Es distancia? Si no lo es, existe un subconjunto de $\mathbb{R}$ para el que lo sea? Determinar el más grande de tales subconjuntos.

Ejercicio 5: Relación norma-distancia

Sea d la métrica euclídea. Considera la función $\hat{d} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\hat{d}(x, y) \equiv \begin{cases} d(x, y), & \text{si } y = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}, \\ d(x, 0) + d(0, y), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Prueba que $\hat{d}$ es una distancia y que no proviene de ninguna norma.

Ejercicio 6: Relación norma-distancia

Demuestra que la aplicación $\hat{d} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\hat{d}(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

es una métrica. ¿Viene de una norma?

Ejercicio 7: Propiedades de la métrica

Sea la aplicación $\rho : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} d(x, O) + d(O, y), & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$$

donde O es el origen de $\mathbb{R}^2$ y d es la métrica euclídea. ¿Es métrica en $\mathbb{R}^2$? ¿Viene de una norma? Demuestra que todos los puntos (salvo O son abiertos). Demuestra también que todas las bolas abiertas $B(0, r)$ son, a la vez, cerradas.

Ejercicio 8: Sucesiones

Da un ejemplo de sucesión en $\mathbb{R}$ que sea de Cauchy en alguna métrica pero no lo sea en la métrica euclídea.

Ejercicio 9: Sucesiones

Estudia la convergencia de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $l^1 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) / \sum_n |\alpha_n| < \infty\}$, donde

$$x_n = \left\{ \frac{1}{k^{\frac{n+1}{n}}} \right\}_{k=1}^{\infty} = \left(1, \frac{1}{2^{\frac{n+1}{n}}}, \frac{1}{3^{\frac{n+1}{n}}}, \ldots \right).$$

Ejercicio 10: Sucesiones

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio métrico X. Demuestra que:

- Si $x_n \to x$, entonces toda sub-sucesión $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.
- Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y tiene alguna sub-sucesión convergente, entonces $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge al mismo límite que dicha sub-sucesión.
- Da un ejemplo de una sucesión no convergente que tenga sub-sucesiones convergentes.

Ejercicio 11: Cerrados en espacios métricos

Demuestra que si X es espacio métrico, $A \subset X$ y $r > 0$, entonces $V_r(A) = \{x \in X / d(x, A) \leq r\}$ es cerrado.

Ejercicio 12: Continuidad de la métrica

Demuestra que si $v_n \to v$, $w_n \to w$ se cumple $d(v_n, w_n) \to d(v, w)$.

Ejercicio 13: Bolas cerradas en espacios normados

Demuestra que, en todo espacio normado, $\overline{B}(x, r) = \overline{B(x, r)}$. ¿Y en espacios métricos?

Ejercicio 14: Subespacios cerrados en espacios normados

Sea $(X, ||.||)$ espacio normado y S un subespacio de X. Demuestra que:

- $\bar{S}$ es subespacio de X.
- Si X es completo, $\bar{S}$ es también completo.
- Si $S \neq X$, int $S = \emptyset$.