

6. Teorema de los residuos. Aplicaciones

1. Obtener los resultados siguientes

$$\begin{aligned} i) \oint_C dz \frac{\sin(\pi z)}{(z^2 - 1)^3} &= \frac{3\pi^2 i}{4} & C : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ ii) \oint_C dz \frac{e^{2z}}{z^3 - 1} &= \frac{2\pi i}{3} e^2 & C : x^2 + y^2 - 2x = 1 \end{aligned}$$

2. Encontrar el valor numérico de $\oint_C dz f'(z)/f(z)$ donde C es la circunferencia $|z| = \pi$ y $f(z)$ las funciones

$$i) \sin(\pi z) \qquad ii) \tan(\pi z)$$

3. Aplicando el teorema de Rouché, encontrar el número de soluciones de las ecuaciones siguientes,

$$\begin{aligned} i) z^3 - 4z^2 + z - 2 - i &= 0 \text{ en } |z| < 2 \\ ii) z^4 - 5z + 1 &= 0 \text{ en } 1 < |z| < 2 \\ iii) z^2 - \cos(z) &= 0 \text{ en } |z| < 2 \end{aligned}$$

4. Probar las igualdades (integrales de Fresnel)

$$\int_0^\infty dx \cos(x^2) = \int_0^\infty dx \sin(x^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

aplicando el teorema de Cauchy a la función e^{-z^2} a lo largo de la frontera del sector circular $0 \leq |z| \leq R \rightarrow \infty$, $0 \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{4}$. Utilizar $\int_0^\infty dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi}/2$

5. Calcular los residuos de

$$\frac{e^z}{1 - 4\sin^2(z)}$$

6. Demostrar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(mx)}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{2 \cosh(m\frac{\pi}{2})}$$

Ayuda: Integrar la función $e^{imz}/(e^z + e^{-z})$ a lo largo del rectángulo con el vértice inferior izquierdo $-R + i0$ y el vértice superior derecho $R + i\pi$.

7. Comprobar que

$$\begin{aligned} i) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} &= \frac{\pi}{ab(a+b)}, \quad a > b > 0 \\ ii) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2} &= \frac{\pi}{4|a|} \quad a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

8. Comprobar que

$$\begin{aligned} i) \int_0^{+\infty} \frac{\cos(mx) dx}{(x^2 + 1)^2} &= \frac{\pi(1+m)}{4e^m}, \quad m > 0 \\ ii) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin(x) dx}{1 + x^2 + x^4} &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \sin\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

9. Comprobar que

$$\begin{aligned} i) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a + b \cos(x))^2} &= \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}, \quad a > b > 0 \\ ii) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b \cos(x) + c \sin(x)} &= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}, \quad a > 0, \quad a^2 > b^2 + c^2 \end{aligned}$$

10. Comprobar que

$$\begin{aligned} i) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^a(1+x)} &= \frac{\pi}{\sin(\pi a)}, \quad 1 > a > 0 \\ ii) \int_0^{+\infty} \frac{\log(x) dx}{x^2 + a^2} &= \frac{\pi \log(|a|)}{2|a|} \end{aligned}$$

11. Calcular las sumas

$$\begin{aligned} i) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} &= \frac{\pi}{a} \coth(\pi a), \quad a > 0 \\ ii) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$