

5. Series de Fourier

1. Encuentra un desarrollo trigonométrico de Fourier que converja puntualmente en $[-1, 1]$ a la función $f(x) = x$.
2. Desarrolla en senos en $[-\pi, \pi]$ la función $\sin^3 x$.
3. Usa el desarrollo trigonométrico de la función $f(x) = x^2$ para encontrar el valor de la suma de las siguientes series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

4. Obtén la serie de Fourier de senos y cosenos para la función $f(x) = x^2$ en $L^2([-\pi, +\pi])$ y, utilizando la identidad de Parseval, demuestra que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$