4. Series en $\mathbb{C}$

1. Encontrar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias.

$$i)\ \sum_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n \qquad ii)\ \sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n \qquad iii)\ \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\pi/n} z^n$$
$$iv)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad v)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{4^{n+1}(n+2)^3}$$

2. ¿Para qué valores de z son analíticas las funciones definidas por las series siguientes?

$$i)\ f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nz)}{2^n} \qquad ii)\ g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nz)}{n^2}$$

3. Sea la serie del ejercicio 1 (*iv*)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

   Derivar e integrar término a término la serie. ¿Qué función regular representa?

4. Demostrar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log(n))^k}{n^z}$$

   con $k \in \mathbb{N}$ define una función regular para $\mathrm{Re}\{z\} > 1$.

5. Obtener el desarrollo de Taylor de la función $f(z) = 1/(3-2z)$ en un disco centrado en $z = 3$. Calcular su radio de convergencia.

6. Desarrollar en serie de Taylor la función $f(z) = \mathrm{Log}(z)$ alrededor de $z = i$. ¿Cuál es su región de validez ?

7. Encontrar los diferentes desarrollos de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{z^2}{z^2 - 3z - 4}$$

centrados en el origen y especificar sus regiones de validez.

8. Desarrollar en series de potencias las funciones

$$\begin{aligned} i)\, f(z) &= \frac{1}{(z^2-1)^2} \text{ en el anillo } 0 < |z-1| < 2 \\ ii)\, f(z) &= z^2 \cos(\frac{1}{z}) \text{ en un entorno de } z = 0 \\ iii)\, f(z) &= \frac{1}{z^2(z-3)^2} \text{ alrededor de } z = 3 \end{aligned}$$

9. Clasificar los ceros de las funciones siguientes

$$i)\ z^2 \sin(z) \quad ii)\ 1 + \cosh(z) \quad iii)\ \frac{\sin(z)}{z}$$

10. Clasificar las singularidades de las funciones siguientes

$$i)\ \frac{1-\cos(z)}{z^2} \quad ii)\ e^{2+\frac{1}{z}} \quad iii)\ \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-e^{-z}}$$