

3. Integrales de contorno y teorema de Cauchy.

1. Sea $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq -2, |z| \neq 1\}$. Considérense las curvas cerradas siguientes:

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= \sqrt{2}e^{i\pi t}, \quad t \in [-1, 1] & \gamma_2(t) &= \sqrt{2}e^{i\pi t}, \quad t \in [-1, 3], \\ \gamma_3(t) &= \sqrt{2}e^{-i\pi t}, \quad t \in [-1, 1] & \gamma_4(t) &= \sqrt{3}e^{i\pi t}, \quad t \in [-1, 1] \\ \gamma_5(t) &= \frac{2}{3}e^{i\pi t}, \quad t \in [-1, 1] & \gamma_6(t) &= -2 + \frac{1}{3}e^{i\pi t}, \quad t \in [-1, 1] \\ \gamma_7(t) &= 2765\pi e^{i\pi t}, \quad t \in [-1, 1]\end{aligned}$$

Determinar cuáles de ellas son homotópicas entre sí en A , y cuáles son homotópicas a un punto en A .

2. Considérese el plano complejo extendido, $\bar{\mathbb{C}}$ (con su topología).
- a) Dar un ejemplo de un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ que tenga el punto del infinito, ∞ , como punto de acumulación y tal que $A \cup \{\infty\}$ sea compacto en $\bar{\mathbb{C}}$.
 - b) Sea $B = \{z \in \bar{\mathbb{C}} \mid |z| > 1\}$. Determinar si es acotado y si es simplemente conexo en $\bar{\mathbb{C}}$.
3. Calcular $\int_{\gamma} z^* dz$ para los siguientes caminos:
- i) γ : Segmento entre $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = 2 + 4i$.
 - ii) γ : Arco $z(t) = t + it^2$ entre los z_1 y z_2 anterior.
4. Calcular $\int_{\gamma} z dz$ donde γ es un camino entre $z_0 = 1$ y $z_1 = i$ para
- i) γ : lados derecho y superior paralelos a los ejes de un cuadrado.
 - ii) γ : Recta entre z_0 y z_1 .
5. Demostrar que el conjunto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ no es simplemente conexo usando el teorema de Cauchy.
6. Sean $\gamma_1(t) = e^{it}$ y $\gamma_2(t) = e^{-it}$, con $0 \leq t \leq \pi$. Calcular $\int_{\gamma_1} f dz$ y $\int_{\gamma_2} f dz$ para: i) $f(z) = \frac{1}{z^2}$, ii) $f(z) = \log(z)$, iii) $f(z) = \sqrt{z}$.
7. Considerar la función $f(z) = z \arg(z)$. Calcular $\int_{\gamma} f dz$ a lo largo de los caminos con extremos $z_0 = 1$ y $z_1 = i$: i) a lo largo de los ejes x e y . ii) a lo largo del arco de circunferencia $|z| = 1$.

8. Calcular $\oint_{|z|=1} \frac{\log(z)}{z} dz$ en los casos i) $\gamma(t) = e^{it}$, $-\pi \leq t \leq \pi$, ii) $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Comentar los resultados.

9. Utilizando el teorema de Cauchy, calcular la siguiente integral:

$$\int_0^{2\pi} e^{-\sin \theta} \cos(\theta + \cos \theta) d\theta$$

Ayuda: Relacionadla con la integral de camino a lo largo de $|z| = 1$.

10. Considérese la función $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Calcular $\oint_{\gamma} f$, donde γ es una circunferencia de radio 1 y centro en $(0, 1)$.

11. Calcular las siguientes integrales aplicando la fórmula integral de Cauchy.

$$\oint_{\gamma} \frac{e^{z^2} dz}{z^2 - 6z}, \quad \gamma : |z - 2| = 3, \quad \oint_{\gamma} \frac{dz}{(z^2 + 9)(z + 9)}, \quad \gamma : |z| = 4$$

12. Utilizando la fórmula de las derivadas sucesivas, calcular las siguientes integrales,

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cosh(z) dz}{(z+1)^3(z-1)}, \quad \oint_{|z|=1} \frac{\cos(z) dz}{z^3}.$$

13. Calcular

$$\oint_{\gamma} \frac{\cos(z) dz}{z^2(z-1)} \text{ con } \left| z + \frac{1}{3} \right| = 1.$$

14. Sea f holomorfa en $|z| < 1$ y con $|f(z)| \leq 1$. Encontrar una cota superior (lo mejor posible) para $|f'(0)|$.

15. Sea f entera y con $|f(z)| \geq 1$. ¿Podemos afirmar que f es constante?

16. Siendo γ el cicuito $|z| = 2$, calculad la integral siguiente:

$$\oint_{\gamma} \frac{|z| e^z}{z^2} dz.$$

17. Integrando la función $f(z) = (z + 1/z)^{2n}/z$ a lo largo de $|z| = 1$, demostrar la fórmula de Wallis:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(\theta) d\theta = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$