

2. Funciones de variable compleja.

1. Demostrar que no existen los límites siguientes

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{(z^*)^2}; \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z + z^*}{z - z^*}; \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^*}{z}.$$

2. Calcular los límites

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z^6 + 1}; \quad \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2 + z + i + 1}{z^2 + 3iz - 2}; \quad \lim_{z \rightarrow 2e^{\frac{4\pi}{3}}} \frac{z^3 + 8}{z^4 + 4z^2 + 16}.$$

3. Encontrar las funciones complejas analíticas cuyas partes reales son las siguientes: i) xy , ii) $\sin x \cosh y$, iii) $\log(x^2 + y^2)$.
4. Demostrar que la función

$$f(z) = \begin{cases} (z^*)^3/|z|^2, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

cumple las condiciones de Cauchy-Riemann en $z = 0$ pero no existe $f'(0)$.

5. Demostrar que las condiciones de Cauchy-Riemann sobre $f(z)$ son equivalentes a

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \text{y también a} \quad \frac{\partial f}{\partial z^*} = 0.$$

6. Demostrar que las condiciones de Cauchy-Riemann sobre $f(z) = u + iv$ en coordenadas polares (r, θ) , definidas por $z = re^{i\theta}$, pueden escribirse como sigue

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = r \frac{\partial u}{\partial r} \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r \frac{\partial v}{\partial r}$$

7. Encontrar los dominios de analiticidad de las funciones

$$i) \arg(z); \quad ii) \frac{1}{z}; \quad iii) \log(z); \quad iv) z^\alpha, \alpha \in \mathbb{C}.$$

8. Demostrar que si $f(z) = u + iv$ es analítica en $\mathbb{C}$ y $f(z)^* = u - iv$ es analítica en $\mathbb{C}$ entonces $f(z)$ es una constante.

9. Describir las superficies de Riemann de las funciones

$$i) z^{-\frac{1}{2}}; \quad ii) z^{-\frac{1}{2}}(z-1)^{\frac{1}{2}}; \quad iii) (z^2+1)^{\frac{1}{3}}$$

10. Determinar el dominio de analiticidad y calcular la derivada (donde exista) de las funciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} i) \frac{1}{z-i}; & ii) |z|; \\ iii) z^{1/2}; & iv) f(z) = \begin{cases} \frac{z^2+1}{z+i} & z \neq -i \\ -2i & z = -i \end{cases} \end{array}$$

11. Definir y calcular

$$i) \log(i); \quad ii) \log(1+i); \quad iii) \log_{-i}(i); \quad iv) i^i; \quad v) \log \left[\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right]^i$$

12. Encontrar *todas* las soluciones de las ecuaciones siguientes:

$$\begin{array}{lll} i) z^i = 1+i; & ii) \sinh(iz) = -i; & iii) \sin(z) = 2; \\ iv) \log(i-z) = 1 & & \end{array}$$

13. Verificar que la función $\phi(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$ es armónica. Encontrar su armónico conjugado y determinar la familia de curvas ortogonales a las curvas $\phi(x, y) = \alpha$.