

1. Números complejos y topología en $\mathbb{C}$

1. Hallar el módulo y el valor principal del argumento de los siguientes números complejos:

$$\begin{array}{lll} a) \ z = 4 + 3i & b) \ z = -1 - i\sqrt{3} & c) \ z = \sin \frac{\pi}{8} - i \cos \frac{\pi}{8} \\ d) \ z = 4e^{i\pi/4} & e) \ z = \frac{2-3i}{4-i} & f) \ z = \frac{1 + \cos \alpha - i \sin \alpha}{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha} \quad (0 < \alpha < \pi/2) \end{array}$$

2. Hallar la parte real y la parte imaginaria de los siguientes números complejos:

$$\begin{array}{ll} a) \ z = \sqrt{23}e^{-i27\pi/4} & b) \ z = (2-i)e^{-i\pi/2} \\ c) \ z = \frac{2-i}{4+3i} & d) \ z = \left(\frac{2-i}{4+3i} \right)^7 \end{array}$$

3. Demostrar las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} |z_1| + |z_2| &\geq |z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2|| \\ |z_1 \cdot z_2^* + z_2 \cdot z_1^*| &\leq 2|z_1 z_2| \end{aligned}$$

4. Calcular *todas* las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ll} a) \ z^{39} = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} & b) \ (z+3i)^4 = -1 \\ c) \ z^3 = 2 + 2i\sqrt{3} & d) \ z = 2/z^* \end{array}$$

5. Encontrar todos los números complejos que cumplan $z^2 = z^*$.
6. Demostrar que la suma de las n raíces n -simas de un número complejo es cero.
7. Obtener una condición necesaria y suficiente para que se cumpla la igualdad en la desigualdad triangular, y dar una interpretación geométrica.

8. Demostrar las siguientes fórmulas para $\alpha \in \mathbb{R}$ utilizando números complejos:

$$\begin{aligned}\cos(5\alpha) &= \cos^5 \alpha - 10 \cos^3 \alpha \sin^2 \alpha + 5 \cos \alpha \sin^4 \alpha \\ \sin(5\alpha) &= 5 \cos^4 \alpha \sin \alpha - 10 \cos^2 \alpha \sin^3 \alpha + \sin^5 \alpha\end{aligned}$$

9. Sean los siguientes conjuntos de números complejos:

$$\begin{aligned}A_1 &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\} \\ A_2 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| = 1\} \\ A_3 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 1\} \\ A_4 &= \{e^{i\pi}, e^{i\pi/2}, e^{i\pi/3}, \dots\} \\ A_5 &= A_1 \cup \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\} \cup \{0\}\end{aligned}$$

Para todos ellos, determinar los puntos de acumulación, los puntos interiores y exteriores y los puntos frontera, y decidir si son (independientemente) abiertos, cerrados, acotados, compactos y conexos.