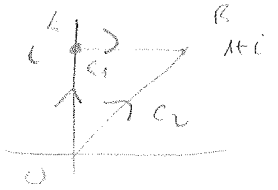
Ejemplos

E1 $I=\int_{C_1} \bar{z}\,dz$, $C_1 = z(\theta) = 2e^{i\theta}$ $\quad -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \underbrace{2e^{-i\theta}}_{f(z(t))} \underbrace{2ie^{i\theta}}_{\dot z(t)} = 4i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 4\pi i$$

Nota: Para C_1 tenemos $|z|^2 = z\bar z = 4 \Rightarrow \bar z = \frac{4}{z} \Rightarrow 4\int_{C_1}\frac{dz}{z} = 4\pi i \Rightarrow \int_{C_1}\frac{dz}{z} = \pi i$

E2



$C_1 = OAB$
$C_2 = OB$. Calcular $I_i = \int_{C_i} f(z)\,dz$ $\quad f(z) = y - x - 3x^2 i$

$$I_1 = \int_{OA} + \int_{AB} = \int_0^1 dt\,\Big[\overbrace{t}^{f(z(t))}\,\overbrace{i}^{\dot z(t)} + (1-t-3t^2 i)\cdot 1\Big] = \int_0^1 dt\,(1-t) + i\int_0^1 dt\,(-3t^2+t)$$

$\hookrightarrow ti$ $\quad \hookrightarrow i+t$ $\quad t\in[0,1]$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right) + i\left(-1+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{1-i}{2}$$

$$I_2 = \int_0^1 dt\,[t - t - 3t^2 i](1+i) = \int_0^1 dt\,[2t^2 - 3t^2 i] = (1-i)\int_0^1 dt\,3t^2 = (1-i)\,1 = 1-i$$

$C_2 = \{z(t) = t(1+i),\ 0\le t\le 1\}$

$$\int_{C_1-C_2} = I_1 - I_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} = \frac{-1+i}{2} \neq 0.$$

$I_1 \neq I_2$ $\quad$ Contorno cerrado

Depende del camino!

E3 Calcula $I = \int_C z\,dz$ con C un contorno arbitrario entre dos puntos z_1 y z_2.

$$I = \int_a^b dt\, z(t)\, z'(t) = \frac{1}{2}\int_a^b dt\,\big(z^2(t)\big)' = \frac{1}{2}\big[z^2(b) - z^2(a)\big] = \frac{z_2^2 - z_1^2}{2}$$

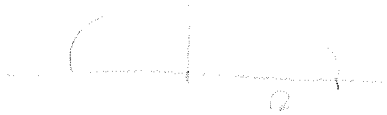
Th. Fundamental del cálculo integral

Independiente del camino. (puede ser suave a trozos).

En particular

$\oint_C z\,dz = 0$ $\quad \forall C$ contorno cerrado. (Esto no pasaba con E2!!)

<u>Ej</u> $C_R = R e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$.



$z^{1/2} \equiv \sqrt{r}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$ $(r>0, 0<\theta<2\pi)$.

Demuestra que $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z^{1/2}}{z^2+1} = 0$

Veamos si $f(z) = \frac{z^{1/2}}{z^2+1}$ está acotada en C_R.

$z \in z_c \Rightarrow f(z) = \frac{\sqrt{R}\, e^{i\theta/2}}{(R^2 e^{2i\theta}+1)}$, $\quad |\sqrt{R}\, e^{i\theta/2}| = \sqrt{R}$

$|R^2 e^{2i\theta}+1| \ge |R^2 e^{2i\theta}| - |1| = |R^2-1| = R^2-1$ (si $R>1$)

$\Rightarrow |f(z)| \le \frac{\sqrt{R}}{R^2-1} = M_R$

$L(C_R) = \pi R$ (semicírculo de radio R).

$\Rightarrow$

$$\left|\int \right| \le M_R L = \frac{\sqrt{R}}{R^2-1}\pi R = \pi \frac{R^{3/2}}{R^2-1} \to 0 \quad (R\to\infty)$$

Antiderivadas

Hemos visto ejemplos de funciones cuya integral no depende del contorno y otras que sí ($\Leftrightarrow$ integrales en contornos cerrados son o no cero). Veremos una propiedad muy útil que caracteriza cuándo esto ocurre y está relacionada con el concepto de antiderivada

Una función continua f en D dominio tiene antiderivada F en D si $F'(z)=f(z)$ $\forall z\in D$. F es analítica por definición y única salvo constante. ($F'=G' \Rightarrow F=G+cte.$)

Th. Sea $f(z)$ continua en D. Son equivalentes:

i) f tiene antiderivada F en D

ii) $\int_C f(z)dz$ es indep C, $\forall C\subset D$ con $C(0)=z_1$, $C(1)=z_2$

iii) $\oint_C f(z)dz=0$ $\forall C$ cerrado $\subset D$. (Nota: El contorno tiene que estar en D - no su interior!!)

Nota: No hace falta que los contornos sean simples.

Dem:

$i \Rightarrow ii)$. $F'(z)=f(z)$, $\forall z\in D$.

$$\frac{d}{dt}F(z(t)) = F'(z)\frac{dz}{dt} = f(z(t))\dot{z}(t). \Rightarrow \boxed{\int_C f(z)dz \overset{C \text{ en } D}{=} \int_a^b dt\, f(z(t))\dot{z}(t) = \int_a^b dt\, \dot{F}(z(t))}$$

Th fundamental del cálculo $= \boxed{F(z(b)) - F(z(a))}$ ← depende sólo del pto inicial y final (no del camino).

Válido para un contorno (suave a trozos).

$ii \Rightarrow iii)$ Sea $C \equiv \{z(t)\in D \,/\, 0\le t\le 1,\ z(0)=z(1)\}$ contorno cerrado en D.

Sean $C_1(t) = C(\frac{t}{2})$, $C_2(t) = C(\frac{1}{2}+\frac{t}{2}) \Rightarrow C = C_1+C_2$

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz - \int_{-C_2} f(z)dz \underset{\substack{\downarrow \\ \text{integral indep del camino} \\ (ii)}}{=} I - I = 0$$

iii) $\Rightarrow$ ii) Sea C_i $i=1,2$ contornos / $C_i(0)=z_1$, $C_i(1)=z_2$. $C_i \subset D$. $\Rightarrow$ C_1-C_2 es contorno cerrado.

$$0=\int_{C_1-C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} - \int_{C_2} \Rightarrow \int_{C_1} = \int_{C_2}$$ $\Rightarrow$ la integración es indep. del contorno.

ii) $\Rightarrow$ i) Como la integración es indep del camino definimos

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(w)\,dw$$ con z_0 en D (y el contorno que me z_0 con z).

veamos que $F'(z)=f(z)$. $\forall z \in D$.

$$\int_{z_1}^{z_2} dz = \int_a^b \dot{z}(t)\,dt = z(b)-z(a) = z_2-z_1$$

$$F(z+\Delta z)-F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} - \int_{z_0}^{z} = \int_{z}^{z+\Delta z} f(w)\,dw$$

por otro lado $\int_z^{z+\Delta z} dw = \Delta z \Rightarrow f(z)=\frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} f(z)\,dw$

~~Ejercicio (podemos tomar un contorno rectangular)~~ $z \to z+\Delta z$

$$\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z) = \int_z^{z+\Delta z} \frac{f(w)\,dw}{\Delta z} - \int_z^{z+\Delta z} \frac{f(z)\,dw}{\Delta z} = \int_z^{z+\Delta z} dw\, \frac{f(w)-f(z)}{\Delta z}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int_z^{z+\Delta z} dw\,[f(w)-f(z)]\right| \leq \cancel{\frac{1}{|\Delta z|}\int_z^{z+\Delta z} dw\,|f(w)-f(z)|} \leq$$

f cont en z $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 \,/\, |z-w|<\delta \Rightarrow |f(z)-f(w)|<\varepsilon$ $\Rightarrow$ si $|\Delta z|<\delta$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow |f(w)-f(z)|<\varepsilon$

$$\leq \frac{1}{|\Delta z|}\,\underbrace{\varepsilon}_{M}\,\underbrace{|\Delta z|}_{L} = \varepsilon \qquad \forall \varepsilon>0 \Rightarrow \lim_{\Delta z\to 0} \frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = F'(z)=f(z)$$