

Teorema de Residuos y aplicaciones

- Definición: Residuo de f en z_0 . Sea una función analítica en C (contorno cerrado) y su interior salvo un punto z_0 .

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ (Serie de Laurent)}$$

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1} \equiv 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$$

- Teorema de Cauchy de los residuos: sea $f(z)$ analítica sobre C (contorno cerrado simple) y su interior salvo un núm. finito de singularidades aisladas $z_1, \dots, z_n$. Entonces:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$$

Teorema de Residuos y aplicaciones

- Cálculo de residuos:
 - Singularidad evitable: $\text{Res}_{z=z_0} f(z) = 0$
 - Polo orden m : $\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right]$
- Regla de L'Hopital. Sean f, g analíticas en z_0 con ceros de orden m y n en z_0 , respectivamente. Entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \begin{cases} 0, & m > n, \\ \frac{f^{(m)}(z_0)}{g^{(m)}(z_0)}, & m = n, \\ \infty, & m < n, \end{cases}$$

Teorema de Residuos y aplicaciones

- Residuo en infinito:

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname{Res}_{z=0} \left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) \right]$$

- Teorema (de dentro/fuera): Sea C un contorno cerrado simple y f analítica salvo por un número finito de singularidades aisladas, z_i en el interior de C y z_j en el exterior de C (incluyendo el infinito).

Entonces:

$$\int_C f(z) = 2\pi i \sum_i \operatorname{Res} \left[f(z) \right]_{z=z_i} = -2\pi i \sum_j \operatorname{Res} \left[f(z) \right]_{z=z_j}$$

Cálculo de integrales reales

- Lemas:
 - Sea $G(x)$ un cociente de polinomios tal que el grado del denominador es d unidades superior al del numerador:

$$\exists R_0, M > 0 / |f(z)| \leq \frac{M}{|z|^d}, \quad \forall z / |z| \geq R_0$$

- Sea f una función que cumple $|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}, \quad \forall z / |z| = R$

$$k > 1 \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$$

$$k > 0, \quad m > 0 \Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) e^{imz} dz = 0$$

Cálculo de integrales reales

- Cálculo definidas reales:
 - Sea $G(x,y)$ una función racional de dos variables reales

$$\int_0^{2\pi} G(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = -i \int_C G\left(\frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz}\right) \frac{dz}{z} \quad C \equiv \{z/|z| = 1\}$$

- Sea $G(x)$ un cociente de polinomios cuyo denominador no tiene raíces reales

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x) \cos(mx) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} G(x) \sin(mx) dx$$

Cálculo de integrales reales

- Valor principal de Cauchy: sea f continua en $a \leq x \leq b$ excepto en x_0 con $a < x_0 < b$. Se define el VP de Cauchy de la integral

$$\text{VP} \left[\int_a^b f(x) \right] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{x_0 - \epsilon} + \int_{x_0 + \epsilon}^b \right) f(x)$$

- (VP) Integral con polos en el simples en el intervalo de integración
 - Lema: Sea $f(z)$ con polo simple en z_0 con residuo a_{-1}
$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\rho} f(z) dz = i\theta a_{-1}$$
- Integrales de funciones multivaluadas
- Otros ejemplos de integrales

Suma de Series

- Bajo ciertas restricciones sobre $f(z)$, que generalmente se cumplen cuando las series son convergentes, y llamando z_i a los polos de $f(z)$, se tiene:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_i \operatorname{Res}[\pi \cot(\pi z) f(z)]_{z=z_i}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = \sum_i \operatorname{Res}[\pi \csc(\pi z) f(z)]_{z=z_i}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sum_i \operatorname{Res}[\pi \tan(\pi z) f(z)]_{z=z_i}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f\left(n + \frac{1}{2}\right) = \sum_i \operatorname{Res}[\pi \sec(\pi z) f(z)]_{z=z_i}$$

Principio del Argumento

- Teorema: Sea $f(z)$ analítica en C (contorno cerrado simple) y su interior salvo un número finito de polos en el interior con f distinta de cero en C :

$$\Delta_{C+} [\arg (f(z))] = 2\pi(\#\text{ceros} - \#\text{polos})$$

- Teorema (de Rouché): Sean $f(z)$ y $g(z)$ analíticas en C (contorno cerrado simple) y su interior tales que $|g(z)| < |f(z)|$ en C (donde $f(z)$ es distinta de cero). Entonces

$f(z)$ y $f(z)+g(z)$ tienen igual número de ceros en el interior de C

Teorema de Residuos y aplicaciones

- Resumen:
 - Teorema de Cauchy de los residuos
 - Cálculo de residuos, residuo en el infinito
 - Teorema de dentro/fuera
 - Cálculo de integrales por residuos, lemas de integración
 - Uso de residuos para suma de series
 - Teorema del argumento y de Rouché