Series de Fourier y transformadas integrales

- Serie de Fourier: Sea f(x) definida en [c,c+2L] continua a trozos y con derivada continua a trozos. Entonces

$$\frac{1}{2}[f_P(x^+) + f_P(x^-)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{in\pi x/L}$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\pi n x/L) + b_n \mathrm{sen}(\pi n x/L)]$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2L} \int_c^{c+2L} e^{-in\pi x/L} f(x)\, \mathrm{d}x$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} \cos(\pi n x/L) f(x)\, \mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_c^{c+2L} \mathrm{sen}(\pi n x/L) f(x)\, \mathrm{d}x$$

Series de Fourier y transformadas integrales

- Serie de Fourier: Los siguientes conjuntos de funciones son bases ortonormales

$$\left\{ \frac{e^{in\pi x/L}}{\sqrt{2L}} \right\}_{n=-\infty}^{\infty} \qquad \left\{ \frac{1}{\sqrt{2L}}, \frac{\cos(\pi n x/L)}{\sqrt{L}}, \frac{\mathrm{sen}(\pi n x/L)}{\sqrt{L}} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\int_c^{c+2L} f_n^*(x) f_m(x) = \delta_{n,m}$$

- Identidades de Parseval

$$\int_c^{c+2L} |f(x)|^2 \, dx = 2L \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 = L\Big[\frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)\Big]$$

Series de Fourier y transformadas integrales

- Transformada de Fourier: sea f(x) y k real. Se define la transformada de Fourier a la integral (cuando converge)

$$\hat{f}(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x)\, dx$$

- Definición: sean f y su derivada continuas a trozos y f absolutamente integrable. Se define la transformada inversa de Fourier

$$\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(k)\}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{f}(k)\, dk = \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$$

Series de Fourier y transformadas integrales

- Propiedades de la transformada de Fourier
  - Linealidad: $\mathcal{F}\{a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)\} = a_1 \mathcal{F}\{f_1\} + a_2 \mathcal{F}\{f_2\}$
  - Paridad: $\mathcal{F}\{f(-x)\}(k) = \mathcal{F}\{f(x)\}(-k)$
  - Conjugación: $\mathcal{F}\{(f(x))^*\} = (\hat{f}(-k^*))^*$
  - Traslación: $\mathcal{F}\{e^{iaxf(x)} = \hat{f}(k-a), \quad \mathcal{F}\{f(x-a)\} = e^{-iak}\hat{f}(k)\}$
  - Dilatación: $\mathcal{F}\{f(ax)\} = \hat{f}(k/a)/a, \quad a > 0$
  - Derivada: $\mathcal{F}\{f'(x)\} = ik\hat{f}(k), \quad \mathcal{F}\{xf(x)\} = i\hat{f}'(k)$
  - Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \, dk$$

Series de Fourier y transformadas integrales

- Propiedades de la transformada de Fourier
  - Convolución: $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x)\, dx = f_2(t) * f_1(t)$

    $$\mathcal{F}\{f_1(x) * f_2(x)\} = \hat{f}_1(k)\hat{f}_2(k), \quad \mathcal{F}\{f_1(x) f_2(x)\} = \frac{1}{2\pi}\hat{f}_1(k) * \hat{f}_2(k)$$

  - $\mathcal{F}\{\mathcal{F}\{f(x)\}\} = 2\pi f(-x)$
  - Analiticidad: sea f continua a trozos verificando $\exists K, M > 0,\ a < b\ /$

    $|f(x)| \leq K e^{-bx},\ x \geq 0$

    $|f(x)| \leq M e^{-ax},\ x \leq 0$

    entonces la transformada de fourier existe y es analítica en a< Im(z) < b

Series de Fourier y transformadas integrales

- Propiedades de la transformada de Fourier. Sean f y f' continuas a trozos en todo intervalo finito y supongamos que $\gamma \in \mathbb{R} \ / \ e^{\gamma x} f(x)$ es absolutamente integrable. Entonces:

$$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)] = \frac{1}{2\pi} \mathrm{VP} \int_{-\infty+i\gamma}^{\infty+i\gamma} dz\, e^{izx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izt} f(t)\, dt$$

- Resolución de ecuaciones diferenciales con transf. de Fourier

$$a_n y^{(n)}(x) + \ldots + a_0 y(x) = f(x)$$

$$[a_n (iz)^n + \ldots + a_0] \mathcal{F}\{y(x)\}(z) = P_n(iz) \hat{y}(z) = \hat{f}(z)$$

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{VP} \int_{-\infty+i\gamma}^{\infty+i\gamma} dz\, e^{izx} \frac{\mathcal{F}\{f(x)\}(z)}{P_n(iz)}$$

Series de Fourier y transformadas integrales

- Definición: Transformada de Laplace por los dos lados.

$$\mathcal{H}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st}\, dt = \hat{f}(-is)$$

- Transformada de Laplace clásica (por un lado)

$$\tilde{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \mathcal{F}\{\theta(t) f(t)\}(-is)$$

- Sean f y f' continuas a trozos en todo intervalo finito con $|f(t)| \leq K e^{bt},\ \forall t \geq 0$. Entonces $\tilde{f}(s)$ es analítica en $\mathrm{Re}(s) > b$ y

$$\frac{1}{2}[f(t^+) + f(t^-)] = \frac{1}{2\pi\, i} \mathrm{VP} \int_{\gamma - i\,\infty}^{\gamma + i\,\infty} ds\, e^{st} \tilde{f}(s)$$

Series de Fourier y transformadas integrales

- Propiedades de la transformada de Laplace
  - Linealidad: $\mathcal{L}\{a_1 f_1 + a_2 f_2\} = a_1 \mathcal{L}\{f_1\} + a_2 \mathcal{L}\{f_2\}$
  - Traslación: $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \tilde{f}(s-a)$
  - Derivada: $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \tilde{f}(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0), \; n = 0, 1, \ldots$

    $\tilde{f}^{(n)}(s) = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\}$
  - Integral:

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\} = \tilde{f}(s)/s$$

$$\int_s^\infty \tilde{f}(\sigma)\, d\sigma = \mathcal{L}\{f(t)/t\}$$

Series de Fourier y transformadas integrales

- Resolución de eccs differenciales con transformada de Laplace

$$a_n y^{(n)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = f(t) \qquad y^{(k)}(0) = b_k,\ k = 0, 1, \ldots, n-1$$

$$\mathcal{L}\{y^{(k)}(t)\}(s) = s^k \tilde{y}(s) - b_0 z^{k-1} - \ldots - b_{k-1}$$

$$(a_n z^n + \ldots + a_0)\tilde{y}(s) - P_{n-1}(s) = \tilde{f}(s)$$

$$\tilde{y}(s) = \frac{\tilde{f}(s) + P_{n-1}(s)}{Q_n(s)}$$

Series de Fourier y transformadas integrales

- Resumen:
  - Series de Fourier:
    - Exponencial y trigonométrica
    - Identidad de Parseval, ortonormalidad
  - Transformada de Fourier:
    - Definición y propiedades
    - Resolución de ecuaciones diferenciales
  - Transformada de Laplace
    - Definición y propiedades
    - Resolución de ecuaciones diferenciales