

Series en el plano complejo

- Sucesión convergente de números complejos

$$w_n \rightarrow w \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0 / |w_n - w| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$$

- Sucesión de Cauchy

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 / |w_{n+m} - w_n| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0, m \in \mathbb{N}$$

- Teorema: $\mathbb{C}$ es completo

- Sucesiones de funciones

- Convergencia puntual $\forall \epsilon > 0, \exists n_0(z, \epsilon) / |f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0$
- Conv. Uniforme en D $\forall \epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon) / |f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0, \forall z \in D$
- Suc. de Cauchy $\forall \epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon) / |f_{n+m}(z) - f_n(z)| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0, \forall z \in D, \forall m \in \mathbb{N}$
- Conv. Normal: si hay c. u. en todo compacto contenido en D

Series en el plano complejo

- Teorema $\{f_n\}$ conv unif en $D \Leftrightarrow \{f_n\}$ Cauchy en D
- Teorema f_n continuas conv. unif. a f en $D \Rightarrow f$ continua en D
- Teorema: Sea C contorno y f_n continuas en C
$$\{f_n\} \text{ conv. unif. a } f \text{ en } C \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f_n(z) dz = \int_C f(z) dz$$
- Teorema: sean f_n analíticas en un dominio D
$$\{f_n\} \text{ conv. norm. a } f \text{ en } D \Rightarrow f \text{ analítica en } D, \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z) = f'(z)$$

Series en el plano complejo

- Definición: Series de números complejos $\sum_{k=1}^{\infty} w_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n w_k \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k = S \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ Cauchy}$$

- Criterio necesario (no suficiente) de convergencia

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k \text{ convergente} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} w_k = 0$$

- Definición:

$$\sum_k w_k \text{ absolutamente conv.} \Leftrightarrow \sum_k |w_k| \text{ conv.} \left[\Rightarrow \sum_k w_k \text{ conv.} \right]$$

- Definición: límites superior e inferior

$$\overline{\lim}\{x_n\} = \sup\{ \lim\{x_{\sigma(n)}\} / x_{\sigma(n)} \text{ conv.} \}$$

$$\underline{\lim}\{x_n\} = \inf\{ \lim\{x_{\sigma(n)}\} / x_{\sigma(n)} \text{ conv.} \}$$

Series en el plano complejo

- Criterios de convergencia de series

- Criterio del cociente $M = \overline{\lim} \left| \frac{w_{n+1}}{w_n} \right|$ $M < 1 \Rightarrow$ conv. absoluta
 $m = \underline{\lim} \left| \frac{w_{n+1}}{w_n} \right|$ $m > 1 \Rightarrow$ diverge
 $m \leq 1 \leq M$ no se sabe

- Criterio de la raíz

$$M = \overline{\lim} |w_n|^{1/n}$$

$$M < 1 \Rightarrow \text{conv. abs.}$$

$$M > 1 \Rightarrow \text{diverge}$$

$$M = 1 \Rightarrow \text{no se sabe}$$

- Criterio de sumar por partes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k - a_{k+1}| \text{ conv.} \Rightarrow \sum a_k b_k \text{ conv}$$

$$\left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq M, \quad M > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Series en el plano complejo

- Serie convergente de funciones

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k(z) \text{ conv. unif. a } S(z) \text{ en } D \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon) / |S_n(z) - S(z)| < \epsilon, \forall n \geq n_0, \forall z \in D$$

- Teorema: $\sum w_k(z)$ conv. unif. en $D \Leftrightarrow \sum w_k(z)$ Cauchy en D

- Teorema:

$$\begin{array}{l} \sum w_k(z) \text{ conv. unif. a } S \text{ en } D \\ w_k(z) \text{ cont. en } D \end{array} \Rightarrow S(z) \text{ cont en } D$$

- Teorema

$$\begin{array}{l} \sum w_k(z) \text{ conv. unif. a } S(z) \text{ en } C \text{ cont. simple} \\ w_k(z) \text{ cont. en } C \end{array} \Rightarrow \int_C S(z) = \sum_k \int_C w_k(z)$$

Series en el plano complejo

- Teorema

$$\sum w_k(z) \text{ conv. normalm. a } S(z) \text{ en } D \text{ dominio} \Rightarrow S(z) \text{ holomorfa en } D$$
$$w_k(z) \text{ holomorfas en } D \Rightarrow S'(z) = \sum w'_k(z) \text{ conv normal}$$

- Teorema: criterio de la mayorante o test M de Weierstrass

$$w_k(z) \text{ definidas en } D \quad \exists M_k \in \mathbb{R} / |w_k(z)| \leq M_k, \forall z \in D$$

$$\sum_k M_k \text{ conv.} \Rightarrow \sum_k w_k(z) \text{ conv. absoluta y unif.}$$

Series en el plano complejo

- Definición: series de potencias, en torno z_0 :
$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$
- Definición: Radio de convergencia

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} |a_k|^{\frac{1}{k}}}$$

- Teorema: Sea una serie de potencias con radio de convergencia R

$$\sum_k a_k z^k \text{ conv. norm. en } |z| < R \text{ a } f(z) \text{ holomorfa en } |z| < R \text{ con } f^{(k)}(z) = a_k k!$$

- Teorema: Desarrollo de Taylor. Sea $f(z)$ holomorfa en $z=0$, entonces

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \text{ conv. a } f(z) \text{ en } |z| < R$$

R =distancia de $z=0$ al pto en que f deja de ser holomorfa

Series en el plano complejo

- Definición: f holomorfa en z_0 tiene un cero de orden n en z_0 si

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0$$

- Teorema: si f tiene un cero de orden n en z_0 entonces

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) \quad g(z) \text{ holomorfa en } z_0$$

$$\exists \delta > 0 / g(z) \neq 0, \quad \forall |z - z_0| < \delta$$

- Teorema: sea f analítica en un dominio D

$$\left. \begin{array}{l} \exists \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D / z_n = z_m \Leftrightarrow n = m \\ \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \in D, f(z_n) = 0, n \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow f(z) = 0, \quad \forall z \in D$$

Series en el plano complejo

- Definición: Elemento de función analítica (f,D) es un par formado por una función analítica y su dominio de definición.
- Definición: (f_2,D_2) es prolongación analítica de (f_1,D_1) si
$$D_1 \cap D_2 \neq \emptyset, \quad f_1 = f_2, \quad \forall z \in D_1 \cap D_2$$
- Teorema: Sean (f_2,D_2) y (f_3,D_3) prolongaciones analíticas de (f_1,D_1) tales que $D_2 \cap D_3 \neq \emptyset$ es conexo y $D_1 \cap D_2 \cap D_3 \neq \emptyset$ entonces
$$f_2 = f_3, \quad \forall z \in D_2 \cap D_3$$
- Definición: Una función analítica completa es la colección de todos los posibles elementos de función analítica que se generan a partir de uno dado por prolongación analítica.

Series en el plano complejo

- Definición: singularidad de función analítica completa es un pto que es pto límite del dominio de uno o más elementos sin estar en el dominio de ningún otro elemento.
- Teorema de Monodromía: Sean z_1 y z_2 dos ptos distintos y C_1 y C_2 dos curvas simples de Jordan uniendo z_1 y z_2 tales que C_1-C_2 es una curva cerrada simple de Jordan. Sea (f,D) un elemento de función analítica con z_1 en D . Si prolongamos (f,D) analíticamente mediante series de potencias hasta z_2 con elementos cuyo centro está respectivamente en C_1 y C_2 y la función analítica completa a partir de (f,D) no tiene singularidades en el interior de C_1-C_2 entonces $f_{C_1}(z_2) = f_{C_2}(z_2)$
- Teorema: principio de reflexión de Schwarz. Sea $f(z)$ analítica en dominio D_1 acotado en parte por el intervalo real $I=(a,b)$. Si f es continua en $D_1 \cup I$ y $f(x)$ es real entonces $\overline{f}(\overline{z})$ es la prolongación analítica de f a $D_2 = \overline{D_1}$

Series en el plano complejo

- Teorema de la función inversa: Sea $w=f(z)$ analítica en z_0 con $f'(z_0) \neq 0$ entonces existe un entorno de $w_0=f(z_0)$ en el que la función inversa $z=g(w)$ existe y es analítica y $g'(w_0) = 1/f'(z_0)$
- Teorema: desarrollo en serie de Laurent.

Sea f analítica en $R_1 < |z - z_0| < R_2$, entonces

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall R_1 < |z - z_0| < R_2$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^+} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Series en el plano complejo

- Definición: singularidad aislada. f tiene una singularidad aislada en z_0 si no es analítica en z_0 pero $\exists \delta > 0$, / f es analítica en $0 < |z - z_0| < \delta$
- Definición: parte principal del desarrollo de Laurent. Términos del desarrollo con potencias negativas de $(z - z_0)$.
- Definición: clasificación de singularidades aisladas
 - Singularidad evitable: $a_k = 0, \forall k < 0$
 - Polo orden m : $\exists m < 0 / a_m \neq 0, a_n = 0, \forall n < m$
 - Singularidad esencial: $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m > n / a_{-m} \neq 0$
- Teorema: caracterización de singularidad evitable. Sea f con singularidad aislada en z_0 . La singularidad es evitable si y solo si $\exists R, M > 0 / |f(z)| \leq M, \forall 0 < |z - z_0| < R$

Series en el plano complejo

- Teorema: Si $f(z)$ tiene un polo de orden m en z_0 entonces

$1/f(z)$ tiene un cero de orden m en z_0 y

$$\exists \epsilon, A, B > 0 / \frac{A}{|z - z_0|^m} \leq |f(z)| \leq \frac{B}{|z - z_0|^m}, \forall 0 < |z - z_0| < \epsilon$$

- Teorema: Sea $f(z)$ con singularidad aislada en z_0

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \Rightarrow f(z) \text{ tiene polo en } z_0$$

- Teorema: Si $f(z)$ tiene una singularidad esencial en z_0 entonces

$$\forall \delta, \epsilon > 0, \forall w \in \mathbb{C}, \exists z \in \mathbb{C} / |z - z_0| < \delta, |f(z) - w| < \epsilon$$

- Teorema (pequeño de Picard): Si f tiene una singularidad esencial en z_0 , la función toma en todo entorno de z_0 todos los valores complejos con la posible excepción de uno.

Series en el plano complejo

- Descomposición del cociente de polinomios en fracciones simples.

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ cociente de polinomios sin raíces comunes, $n \geq m$

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-m} z^{n-m} + \frac{R_p(z)}{Q_m(x)}, \quad p \leq m-1 < m$$

- Teorema de descomposición en fracciones simples

$$\frac{R_p(z)}{Q_m(z)} = \frac{a_{11}}{z - z_1} + \frac{a_{12}}{(z - z_1)^2} + \dots + \frac{a_{1\alpha_1}}{(z - z_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{a_{k1}}{z - z_k} + \dots + \frac{a_{k\alpha_k}}{(z - z_k)^{\alpha_k}}$$

$$Q_m(z) = (z - z_1)^{\alpha_1} \dots (z - z_k)^{\alpha_k}, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_k = m$$

$$a_{i(\alpha_i - j)} = \frac{1}{j!} \lim_{z \rightarrow z_i} \frac{d^j}{dz^j} \left(\frac{(z - r_i)^{\alpha_i} R_p(z)}{Q_m(z)} \right)$$

Series en el plano complejo

- Resumen:
 - Sucesiones y series de funciones
 - Convergencia de series y continuidad, integración, analiticidad
 - Series de potencias, radio de convergencia
 - Desarrollo de Taylor (Holomorfa=Analítica)
 - Ceros de funciones analíticas
 - Prolongación analítica
 - Singularidades: teoremas de monodromía y reflexión Schwarz
 - Teorema función inversa y desarrollo de Laurent
 - Singularidades aisladas: evitables, polos, esenciales
 - Descomposición en fracciones simples