Teorema de Cauchy y aplicaciones

- Arco simple de Jordan

$$z(t) = x(t) + i\,y(t),\ \ t \in [0,1] \qquad \begin{array}{l} x(t), y(t) \text{ cont.} \\ z(t_1) = z(t_2) \Leftrightarrow t_1 = t_2 \end{array}$$

- Curva cerrada simple de Jordan: arco simple de Jordan / $z(0) = z(1)$
- Son suaves si: $\dot{x}, \dot{y} \text{ conts en } [0,1],\ \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0 \forall t \in [0,1]$
- Contorno (cerrado) simple: arco o curva cerrada simple con derivadas continuas a trozos y $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$
- $S \subset \mathbb{C} \text{ arco-conexo} \Leftrightarrow \forall z_1, z_2 \in S\ \exists z(t) \text{ arco simple } / z(t) \in S, z(0) = z_1, z(1) = z_2$
- Teorema de la curva de Jordan: Toda curva cerrada simple de Jordan divide $\mathbb{C}$ en dos conjuntos disjuntos. La curva es la frontera entre los dos, el interior es acotado y el exterior no acotado.

Teorema de Cauchy y aplicaciones

- S es un dominio si es no vacío, abierto y conexo
- Región: dominio con un nº arbitrario de sus ptos de acumulación.
- S dominio es simplemente conexo si toda curva cerrada simple de Jordan contenida en S tiene su interior dentro de S (si no es simplemente conexo es multiplemente conexo)
- Homotopía: Dos arcos (curvas cerradas) simples, $\gamma_0(t), \gamma_1(t)$, son homotópicas si existe una función continua $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow S$

$$\Gamma(s,0) = \gamma_0(s) \qquad \Gamma \text{ continua}$$
$$\Gamma(s,1) = \gamma_1(s) \qquad \Gamma(0,t) = \Gamma(1,t) \text{ (curvas cerradas)}$$

- Un dominio es simplemente conexo si toda curva cerrada simple en el dominio es homotópica a un punto.

Teorema de Cauchy y aplicaciones

- Integración de funciones complejas de variable real

$$w(t) = u(t) + i\,v(t)$$

$$\dot{w}(t) = \dot{u}(t) + i\,\dot{v}(t)$$

$$\int_a^b w(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + i\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$$

- Teorema fundamental del cálculo

$$w(t), W(t) \text{ continuas en } [a,b] \text{ con } \dot{W}(t) = w(t) \text{ en } [a,b]$$

$$\int_a^b w(t)\,\mathrm{d}t = W(b) - W(a)$$

- Propiedad: $$\left|\int_a^b w(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |w(t)|\,\mathrm{d}t$$

Teorema de Cauchy y aplicaciones

- Integración de funciones complejas sobre un contorno: sea un contorno (cerrado) simple $C = \{z(t) \in \mathbb{C},\ t \in [0,1]\}$

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \equiv \int_0^1 \mathrm{d}t\, f\big(z(t)\big)\dot{z}(t)$$

- Propiedades:
  - $\displaystyle\int_{-C} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$
  - $\displaystyle\int_{C_1+C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z$
  - $\displaystyle\exists M > 0\ /\ |f(z)| \leq M\ \forall z \in C \Rightarrow \left|\int_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq M L_C$

Teorema de Cauchy y aplicaciones

- Antiderivadas: f continua en D (dominio) tiene antiderivada F en D si F'(z)=f(z) para todo z en D (F es analítica en D).
- Teorema. Sea f(z) continua en D dominio. Son equivalentes:

$$i)\ f \text{ tiene antiderivada } F \text{ en } D$$

$$ii)\ \int_C f(z)\,\mathrm{d}z \text{ es indep de } C,\ \forall C \in D, C(0) = z_0, C(1) = z_1$$

$$iii)\ \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \forall C \text{ cerrado} \subset D$$

- Teorema de Green: sean P(x,y), Q(z,y) y sus primeras derivadas parciales continuas en la región cerrada formada por C (contorno cerrado simple) y su interior (R) entonces

$$\oint_{C^+} (P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y) = \int\int_R (Q_x - P_y)\,\mathrm{d}A$$

Teorema de Cauchy y aplicaciones

- Teorema de Cauchy: Si f(z) es analítica en C (contorno cerrado simple) y su interior y f'(z) es continua en C y su interior:

$$\oint_{C^+} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

- Teorema de Cauchy-Goursat: Si f(z) es analítica en un contorno cerrado simple C y su interior:

$$\oint_{C^+} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Teorema de Cauchy y aplicaciones

- Teorema 1: Sea f analítica en D simplemente conexo

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0,\ \forall C \text{ contorno cerrado en } D$$

- Teorema (generalización de Cauchy-Goursat): f analítica en D región salvo en un número finito de puntos donde es sólo continua:

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0,\ \forall C \text{ homotópico a un pto en } D$$

- Teorema 2: C contorno cerrado simple positivo y C_k contornos cerrados simples negativos en el interior de C y cuyos interiores no tienen puntos en común:

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Teorema de Cauchy y aplicaciones

- Corolario: Principio de deformación de caminos. Sean C1 y C2 dos contornos cerrados simples positivos tales que C2 está en el interior de C1 y f es analítica en C1, C2 y la región entre ambos. Entonces:

$$\int_{C1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C2} f(z)\,\mathrm{d}z$$

- Teorema (Fórmula integral de Cauchy): Sea f analítica en un contorno cerrado simple positivo, C, y su interior y z0 un pto interior a C. Entonces:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z$$

Teorema de Cauchy y aplicaciones

- Teorema (derivadas de una función analítica): Si f es analítica en un punto z0, todas sus derivadas existen y son analíticas en z0
- Teorema: Sea f analítica en C (contorno cerrado simple) y su interior

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}} \, \mathrm{d}s, \ \forall z \in \mathrm{int}(C)$$

- Teorema de Morera: sea f continua en un dominio D cumpliendo

$$\oint_C f(z) \, \mathrm{d}z = 0, \ \forall C \text{ contorno cerrado en } D \Rightarrow f \text{ holomorfa en } D$$

- Indice de un contorno cerrado: Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y C uncontorno cerrado que no pase por z_0 .

$$n(C, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z - z_0} \, \mathrm{d}z$$

Teorema de Cauchy y aplicaciones

- Teorema de Liouville:

$$f \text{ entera y acotada en } \mathbb{C} \Rightarrow f \text{ constante en } \mathbb{C}$$

- Teorema fundamental del álgebra: Todo polinomio de grado mayor o igual que uno tiene al menos un cero.
- Lema: Sea f analítica en un entorno de z0 $(|z - z_0| < \epsilon)$

$$\text{Si } |f(z)| \leq |f(z_0)|, \ \forall |z - z_0| < \epsilon \Rightarrow f(z) = f(z_0), \ \forall |z - z_0| < \epsilon$$

- Teorema del módulo máximo: Sea f analítica y no constante en un dominio D, entonces |f(z)| no tiene máximo en D

Teorema de Cauchy y aplicaciones

- Corolario: sea f continua en una región cerrada y acotada R y analítica y no constante en int(R), entonces |f| alcanza siempre su máximo en R y lo hace siempre en la frontera de R
- Corolario:Teorema del módulo mínimo. Sea f analítica en D dominio acotado con f no nula en D y continua en el cierre de D. Entonces:

Teorema de Cauchy y aplicaciones

- Resumen:
  - Caminos y regiones
  - Antiderivadas e integración sobre caminos
  - Teorema de Cauchy-Goursat
  - Integración sobre contornos cerrados (independencia del camino)
  - Fórmula integral de Cauchy
  - Teorema de Morera
  - Teorema de Liouville
  - Teorema fundamental del álgebra
  - Teorema del módulo máximo