Funciones de Variable Compleja

- $f \,:\, D(f) \subset \mathbb{C}^{(*)} \longrightarrow R(f) \subset \mathbb{C}^{(*)}$

$$z = x + i\,y \longrightarrow f(z) = u(z) + i\,v(z)$$

- f es univaluada (multivaluada) si f(z) es único (múltiple)
- Función inversa: $f^{-1} \,:\, R(f) \longrightarrow D(f)$

$$f^{-1}(w) = z,\ w = f(z)$$

- Límite de una función: z_0 pto acumulación de $D(f)$

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \left\{ \begin{array}{l} L \\ \infty \end{array} \right. \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\, \exists\delta > 0 \,/\, \forall z \in D(f), 0 < |z - z_0| < \delta \left\{ \begin{array}{l} |f(z) - L| < \epsilon \\ \rho(z - \infty) < \epsilon \end{array} \right.$$

∞ pto acumulación de $D(f)$

$$\lim_{z\to \infty} f(z) = \left\{ \begin{array}{l} L \\ \infty \end{array} \right. \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0\, \exists\delta > 0 \,/\, \forall z \in D(f), 0 < \rho(z, \infty) < \delta \left\{ \begin{array}{l} |f(z) - L| < \epsilon \\ \rho(f(z), \infty) < \epsilon \end{array} \right.$$

Funciones de Variable Compleja

- Lema 1 $\lim_{z\to 0} \frac{1}{z} = \infty \qquad \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z} = 0$
- Lema 2 $\lim_{z\to z_1} h(z) = z_0, \quad \lim_{z\to z_0} f(z) = L \Rightarrow \lim_{z\to z_1} f\big(h(z)\big) = L$

- Caracterización de límites infinitos

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = L \Leftrightarrow \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = L$$

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \Leftrightarrow \lim_{z\to 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0$$

Funciones de Variable Compleja

- Propiedades involucrando límites:

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

$$z_0 = x_0 + i\,y_0 \qquad w = u_0 + i\,v_0$$

- $$\lim_{z\to z_0} f(z) = w \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0 \end{cases}$$

- $$\begin{array}{l} \lim_{z\to z_0} f_1(z) = w_1 \\ \lim_{z\to z_0} f_2(z) = w_2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \lim_{z\to z_0} (f_1 \pm f_2)(z) = w_1 \pm w_2 \\ \lim_{z\to z_0} (f_1 \cdot f_2)(z) = w_1 \cdot w_2 \\ \lim_{z\to z_0} \frac{f_1}{f_2}(z) = \frac{w_1}{w_2} \ (\text{ si } w_2 \neq 0 \end{array}$$

- Unicidad del límite: el límite de una función, si existe, es único.

Funciones de Variable Compleja

- Definición: f es continua en $z_0 \in D(f)$ si

$$f(z_0) \neq \infty$$

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, / \, \forall z \in D(f) \cap B(z_0, \delta) \Rightarrow f(z) \in B\big(f(z_0), \epsilon\big)$$

- Caracterización cuando z_0 es pto de acumulación de $D(f)$

$$f \text{ cont en } z_0 \Leftrightarrow \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \neq \infty$$

- f es continua en $S \subset D(f)$ si es continua $\forall z \in S$
- La suma, resta, producto, cociente y composición de funciones continuas es continua (donde no se anule el denominador)
- Definición: f es uniformemente continua en $S \subset D(f)$ si

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta(\epsilon) > 0 \, / \, \forall z_1, z_2 \in S, |z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$$

Funciones de Variable Compleja

- Definición: f es derivable en $z_0 \in \operatorname{int} D(f),\ z_0 \neq \infty$ si

$$f(z_0) \neq \infty \qquad \exists \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \equiv f'(z_0)$$

- Teorema: f derivable en $z_0 \Rightarrow f$ continua en z_0
- Reglas de derivación:
  - $(c)' = 0 \quad (c \text{ constante})$
  - $(f \pm g)'(z) = f'(z) \pm g'(z)$
  - $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
  - $\left(\frac{1}{f}\right)'(z) = -\frac{f'(z)}{f^2(z)}$
  - $F(z) = f\big(g(z)\big), \quad F'(z) = f'\big(g(z)\big)g'(z)$

Funciones de Variable Compleja

- Ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$z = x + i\,y$$
$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

$$\exists f'(z_0) \Rightarrow \begin{array}{l} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0) \end{array} \qquad f'(z_0) = u_x(z_0) + i\,v_x(z_0) = v_y(z_0) - i\,u_y(z_0)$$

- Teorema (condición suficiente de derivabilidad)

sea $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ definida en un entorno de $z_0 = x_0 + i\,y_0$

$$\left.\begin{array}{l} \exists u_x, u_y, v_x, v_y \text{ continuas en un entorno de } z_0 \\ \\ u_x(z_0) = v_y(z_0) \\ u_y(z_0) = -v_x(z_0) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists f'(z_0) = u_x(z_0) + i\,v_x(z_0)$$

Funciones de Variable Compleja

- Definición (función holomorfa):

  f holomorfa en $z_0 \Leftrightarrow \exists r > 0 \,/\, f$ derivable en $z,\ \forall z \in B(z_0, r)$

- f holomorfa en $S \subset D(f)$ si lo es $\forall z \in S$
- f entera si es holomorfa en $\mathbb{C}$
- f holomorfa en $\infty \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{z}\right)$ holomorfa en 0
- f holomorfa $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$
- Sea f holomorfa en S dominio (abierto y conexo)
  - $f'(z) = 0\ \forall z \in S \Rightarrow f(z) = \text{cte}$
  - Son equivalentes:

$a)\ Re(f) = \text{cte en } S$
$b)\ Im(f) = \text{cte en } S$
$c)\ \bar{f}$ holomorfa en S
$d)\ f = \text{cte en } S$
$e)\ |f| = \text{cte en } S$

Funciones de Variable Compleja

- Definición (función harmónica): H(x,y) función real de dos variables reales es harmónica si tiene derivadas parciales hasta segundo orden continuas y satisface $H_{xx} + H_{yy} = 0$
- Teorema:

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y) \text{ holomorfa en } D \text{ dominio} \Rightarrow u, v \text{ armónicas en } D$$

- Definición: v es armónica conjugada de u en D (dominio) si

$$u, v \text{ armónicas}, \; u_x = v_y, \; u_y = -v_x$$

- Teorema: $f = u + i\,v$ holomorfa $\Leftrightarrow v$ armón. conj. de u
- Teorema: familias de curvas ortogonales $f = u + i\,v$

$$\text{Las curvas } \begin{matrix} u(x,y) = c_1 \\ v(x,y) = c_2 \end{matrix} \text{ son ortogonales } \forall z \,/\, f'(z) \neq 0$$

Funciones de Variable Compleja

- Punto de ramificación: Puntos especiales en los que una función multivaluada no vuelve al mismo valor al rodearlos con un contorno cerrado
- Rama de una función multivaluada: restricción de la función de manera que sea univaluada en su dominio
- Corte de rama: curva en el plano complejo que separa las distintas ramas de una función multivaluada
- Hojas de Riemann: extensión del dominio de una función multivaluada para que sea continua y univaluada en su dominio

Funciones de Variable Compleja

- Función exponencial: $f(z) = e^z$ función entera que satisface

  $f(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$

  $f'(z) = f(z), \forall z \in \mathbb{C}$

- Propiedades:
  - $e^z \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$
  - $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$
  - $e^{z_1-z_2} = e^{z_1} / e^{z_2}$
  - $1/e^z = e^{-z}$
  - $(e^z)^k = e^{kz}, \forall z \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{Z}$
  - $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow z_1 = z_2 + 2\pi k i, \ k \in \mathbb{Z}$
  - $(e^z)^* = e^{z^*}$

Funciones de Variable Compleja

- Funciones trigonométricas

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Enteras

- Propiedades:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

$$\sin(-z) = -\sin(z)$$

$$\cos(-z) = \cos(z)$$

$$(\cos z)' = -\sin z$$

$$(\sin z)' = \cos z$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

$$\sin(z + 2\pi) = \sin(z)$$

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z$$

$$\sin(z + \pi) = -\sin z$$

$$\cos(z + \pi) = -\cos z$$

$$\sin(z \pm \pi/2) = \pm \cos z$$

Funciones de Variable Compleja

- Propiedades:

$$\cos z = \cos x \, \cosh y - i \, \sin x \, \sinh y$$

$$\sin z = \sin x \, \cosh y + i \, \cos x \, \sinh y$$

$$(\cos z)^* = \cos(z^*)$$

$$(\sin z)^* = \sin(z^*)$$

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow z = (k + 1/2)\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

Funciones de Variable Compleja

- Otras funciones trigonométricas:

$f(z)$		$f'(z)$
$\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$	Holomorfa en $z \neq (k+1/2)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$\sec^2 z$
$\cot z = \dfrac{1}{\tan z}$	Holomorfa en $z \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$-\csc^2 z$
$\sec z = \dfrac{1}{\cos z}$	Holomorfa en $z \neq (k+1/2)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$\dfrac{\sin z}{\cos^2 z}$
$\csc z = \dfrac{1}{\sin z}$	Holomorfa en $z \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$	$-\dfrac{\cos z}{\sin^2 z}$

Funciones de Variable Compleja

- Funciones hiperbólicas:

Enteras

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -\sinh(-z) \qquad (\sinh z)' = \cosh z$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh(-z) \qquad (\cosh z)' = \sinh z$$

$$\sinh z = -i\,\sin(iz) = \cos y\,\sinh x + i\,\sin y\,\cosh x$$

$$\cosh z = \cos y\,\cosh x + i\,\sin y\,\sinh x$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1\,\cosh z_2 + \cosh z_1\,\sinh z_2$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1\,\cosh z_2 + \sinh z_1\,\sinh z_2$$

$$(\sinh z)^* = \sinh(z^*) \qquad (\cosh z)^* = \cosh(z^*)$$

Funciones de Variable Compleja

$$\sinh z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi i,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\cosh z = 0 \Leftrightarrow z = (k + 1/2)\pi i,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

- Otras funciones hiperbólicas

$f(z)$	$f'(z)$
$\tanh z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z}$	$\operatorname{sech}^2 z$
$\coth z = \dfrac{1}{\tanh z}$	$-\operatorname{csch}^2 z$
$\operatorname{sech}\ z = \dfrac{1}{\cosh z}$	$-\dfrac{\sinh z}{\cosh^2 z}$
$\operatorname{csch}\ z = \dfrac{1}{\sinh z}$	$-\dfrac{\cosh z}{\sinh^2 z}$

Holomorfas excepto en los ceros de los denominadores

Funciones de Variable Compleja

- Logaritmo: $\ln z = \{w \in \mathbb{C} \,/\, z = e^w\}$

$$\ln z = \ln |z| + i \arg\, z$$

- Valor principal del logaritmo: $\mathrm{Ln}\, z = \ln |z| + i\, \mathrm{Arg}\, z$
- ln z es (infinitamente)-multivaluada
  - Ptos de ramificación en: $z = 0, \infty$
  - Holomorfa salvo en ptos de ramificación y cortes de rama
  - $\ln z_1 z_2 = \ln z_1 + \ln z_2$
  - $\ln \dfrac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2$

Cuidado con el significado de estas igualdades !!!

Funciones de Variable Compleja

- Exponentes complejos $z^c \equiv e^{c \ln z},\ z \in \mathbb{C} - \{0\},\ c \in \mathbb{C}$
- Multivaluada (como el logaritmo)
- Propiedades:

$$z^{-c} = 1/z^c$$

$$(z^c)' = cz^{c-1},\ (|z| > 0, \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi)$$

$$z^c = \begin{cases} e^{c \ln z}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0,\ \mathrm{Re}\, c > 0, \\ \infty, & z = 0,\ \mathrm{Re}\, c < 0 \end{cases}$$

- Exponencial base c: $c^z = e^{z \ln c}$ entera para c fijo (fijada una rama del ln)

Funciones de Variable Compleja

- Funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas

$$\arccos z = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\arcsin z = -i \ln(i z + \sqrt{1 - z^2})$$

$$\arctan z = \frac{i}{2} \ln \frac{i + z}{i - z}$$

$$\operatorname{arccosh} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

$$\operatorname{arcsinh} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1})$$

$$\operatorname{arctanh} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + z}{1 - z}$$

Funciones de Variable Compleja

- Resumen:
  - Función multivaluada: corte de rama, pto ramificación
  - Límites de funciones complejas
  - Continuidad de funciones
  - Diferenciabilidad: funciones holomorfas y condiciones de Cauchy-Riemann, funciones armónicas
  - Funciones trascendentes:
    - Exponencial
    - Funciones trigonométricas
    - Funciones hiperbólicas
    - Logaritmo
    - Funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas