Métodos Matemáticos de la Física I (Variable Compleja)

- Profesores:
  - José Santiago: Teoría (jsantiago @ugr.es)
    - Tutorías: X y J (14:00-17:00) despacho A03.
  - Juan Antonio Aguilar-Saavedra: Problemas (jaas @ugr.es)
    - Tutorías: L, M (16:00-19:00) despacho 20
  - Detalles del temario, información, apuntes en:
    - www.ugr.es/~jsantiago/Docencia/MMI/

Métodos Matemáticos de la Física I (Variable Compleja)

- Bibliografía principal:
  - J.W. Dettman, Applied Complex Variables. McMillan Company N.Y., 1984.
  - R.A. Silverman, Complex Analysis with Applications. Dover Publications Inc. N.Y., 1984.
  - N. Levinson, R.M. Redheffer, Curso de Variable Compleja. Reverté, 1990.
  - A.D. Wunsch, Variable compleja con aplicaciones. Addison-Wesley Iberoamericana, 1997.
  - M.J. Ablowitz, A.S. Fokas, Complex Variable: Introduction and Applications. Cambridge University Press, 2003.
  - E.T. Whittaker, G.N. Watson, A Course of Modern Analysis. Cambridge University Press, 1996.
  - J.W. Brown, R.V. Churchill, Variable Compleja y Aplicaciones. McGraw-Hill, 2004.
  - A.K. Boiarchuk, Variable compleja: funciones de variable compleja. Moscú, 2002.
  - A.K. Boiarchuk, Variable compleja: integración y series. Moscú, 2002.
  - A.K. Boiarchuk, Variable compleja: residuos y temas especiales. Moscú, 2002.
  - M.R. Spiegel, Variable Compleja. Serie Schaum, McGraw-Hill, 2011.
  - David Sánchez, Métodos de variable compleja, Ediciones UIB 2015.
- Notas de clase muy esquemáticas: ejemplos, demostraciones y comentarios <u>importantes</u> en pizarra o de viva voz (tomad apuntes)

Esquema del curso

- Números complejos y topología del plano complejo
- Funciones de variable compleja
- Teorema de Cauchy y aplicaciones
- Series en el plano complejo
- Series de Fourier y transformadas integrales
- Teorema de los residuos y aplicaciones

¿Por qué números complejos?

- Surgen de forma natural como soluciones a ciertas ecuaciones

$$x^2 + 1 = 0$$

- Tienen propiedades esenciales para entender mejor algunos fenómenos físicos: fenómenos cuánticos de interferencia, partículas fermiónicas, …
- Los inversos de las operaciones "naturales" en $\mathbb{N}$ requieren extenderlos:
  - $x + 2 = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$
  - $2x = 1 \Rightarrow x \in \mathbb{Q}$
  - $x^2 = 2 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $x^2 = -2 \Rightarrow x \in \mathbb{C}$

Números complejos

- Sea i un número que cumple $i^2 = -1$. Llamamos número imaginario a cualquier múltiplo real de i y número complejo a la suma de un número real y uno imaginario

$$z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

- Suma y producto de números complejos:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

- Con estas operaciones $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo

Números complejos

- Existe un isomorfismo entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$, compatible con las operaciones que hemos definido ($\{1, i\}$ son la base euclidea)

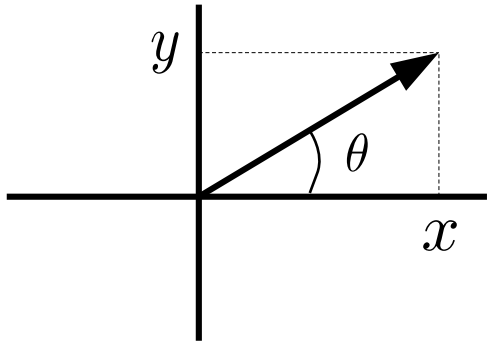
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & & \mathbb{R}^2 \\ z = x + iy & \rightarrow & (x, y) \end{array}$$

  - $\mathbb{R} \in \mathbb{C}$ pero en $\mathbb{C}$ <u>NO HAY RELACIÓN DE ORDEN</u>
  - Producto por escalares de $\mathbb{R}^2$ compatible con producto en $\mathbb{C}$

Forma polar de números complejos

- $\mathbb{C}$ hereda la topología y propiedades de espacio métrico y vectorial de $\mathbb{R}^2$
- Módulo de z (es norma) $|z| = |(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2}$
  - Propiedades:
    - $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
    - $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$
- Argumento de z (forma polar)

$$z = |z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$$



- Un nº completo tiene infinitos argumentos

$$\arg(z) = \{\theta + 2\pi n, n\mathbb{Z}\}$$

- Argumento principal: $\mathrm{Arg}(z) \in \arg(z) \cap]-\pi, \pi]$

Operaciones en $\mathbb{C}$

- Conjugación compleja: $\bar{z} = x - iy$
- Propiedades:
  - $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 \quad \Rightarrow \quad z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)}{|z|}$
  - $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
  - $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- Producto y cociente en forma polar:
  - $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|\big(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2)\big)$
  - $z_1/z_2 = |z_1|/|z_2|\big(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 - \theta_2)\big)$

Operaciones en $\mathbb{C}$

- Potencias: $|z^{\pm n}| = |z|^{\pm n}, \quad \arg(z^{\pm n}) = \pm n \arg(z)$
- Raíces (sean p y q enteros sin divisores comunes)

$$w = z^{p/q} \Leftrightarrow w^q = z^p \Leftrightarrow \begin{cases} |w|^q = |z|^p, \\ q \arg(w) = p \arg(z), \end{cases}$$

$$|z^{p/q}| = |z|^{p/q}$$

$$\arg(z^{p/q}) = \frac{p}{q}\mathrm{Arg}(z) + \frac{p}{q}2\pi k, \quad k = 0, 1, \ldots, q-1$$

Distintos valores de k corresponden a distintos números complejos (un número complejo tiene q raíces q-ésimas diferentes)

Propiedades topológicas de $\mathbb{C}$

- Idénticas a las de $\mathbb{R}^2$

$$B(z_0,\epsilon) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - z_0| < \epsilon\}$$

$$\overline{B}(z_0,\epsilon) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - z_0| \leq \epsilon\}$$

z_0 pto interior de $S \Leftrightarrow \exists \epsilon > 0 \ / \ B(z_0,\epsilon) \subset S$

z_0 pto de acumulación de $S \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \exists z \neq z_0 \ / \ z \in B(z_0,\epsilon) \cap S$

z_0 pto de adherencia de $S \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ B(z_0,\epsilon) \cap S \neq \emptyset$

z_0 pto frontera de $S \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \ B(z_0,\epsilon) \cap S \neq \emptyset$ y $B(z_0,\epsilon) \cap S^c \neq \emptyset$

Interior de$S$: $\operatorname{int} S = \{z \in \mathbb{C} \ / \ z$ interior de $S\}$

Cierre de S : $\overline{S} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ z$ pto de adherencia de $S\}$

Propiedades topológicas de $\mathbb{C}$

- Idénticas a las de $\mathbb{R}^2$

$$B(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - z_0| < \epsilon\}$$

$$\overline{B}(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z - z_0| \leq \epsilon\}$$

$$S \text{ es abierto } \Leftrightarrow \ S = \text{int} S$$

$$S \text{ es cerrado } \Leftrightarrow \ S = \overline{S} \qquad S \text{ cerrado } \Leftrightarrow S^c \text{ abierto}$$

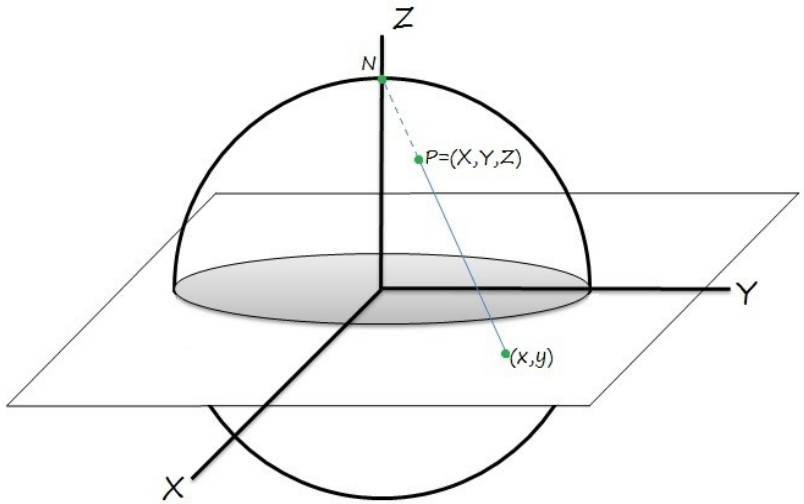
$$S \text{ acotado} \Leftrightarrow \exists \epsilon > 0 \ / \ S \subset B(0, \epsilon)$$

$$S \text{ compacto} \Leftrightarrow S \text{ cerrado y acotado (en } \mathbb{R}^n)$$

S es compacto si todo subconjunto de S con un número infinito de puntos tiene al menos un punto de acumulación en S.

Plano complejo extendido

- $\mathbb{C}$ no es acotado y por tanto no es compacto, pero podemos cambiar de métrica y compactificar $\mathbb{C}$
- Proyección estereográfica (esfera de Riemann) $r^2 = x^2 + y^2$



$$x = \frac{X}{1-Z} \qquad X = \frac{2x}{1+r^2}$$

$$y = \frac{Y}{1-Z} \qquad Y = \frac{2y}{1+r^2}$$

$$Z = \frac{r^2-1}{r^2+1}$$

$$\rho(z_1, z_2) = 2\frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}$$

Plano complejo extendido

- El plano complejo extendido, $\mathbb{C}^*$, es el plano complejo más el punto del infinito (el polo norte de la esfera de Riemann)
- $\rho(z_1, z_2)$ es métrica en $\mathbb{C}^*$ (compacto con dicha métrica)
- $\rho(z, \infty) = \dfrac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$
- Sea S un subconjunto acotado de $\mathbb{C}$ y M su cota. Entonces

$$\rho(z_1, z_2) \leq 2|z_1 - z_2| \leq (1 + M^2)\rho(z_1, z_2), \quad \forall z_1, z_2 \in S$$

Todas las propiedades topológicas en S son idénticas con ambas métricas

- Usando la métrica cordal podemos caracterizar el infinito como el inverso del zero.

Resumen

- Números complejos: definición y representaciones
- Operaciones en $\mathbb{C}$: suma, producto, conjugado, módulo
- Potencias y raíces en $\mathbb{C}$
- Propiedades topológicas en $\mathbb{C}$: plano complejo extendido $\mathbb{C}^*$