Sistemas de partículas idénticas

Ejercicio 1: Estados de espín de dos partículas idénticas

Encuéntrense los estados posibles de un sistema de dos partículas idénticas de espín 1, dependiendo del momento angular orbital.

Ejercicio 2: El isoespín del deuterón

Recordemos que un *nucleón* es un estado de isoespín $T = 1/2$, que corresponde a un protón (neutrón) cuando $T_3 = +1/2$ ($T_3 = -1/2$). Las interacciones fuertes conservan isoespín, de modo que, para ellas, el protón y el neutrón son dos partículas idénticas.

i) Encuéntrense los autovalores y autovectores del operador isoespín para un sistema de dos nucleones.

ii) Sabiendo que el estado fundamental de un *deuterón* (núcleo de deuterio, estado ligado de un protón y un neutrón) es una combinación de los estados $^3S_1$ y $^3D_1$,* dedúzcase que el isoespín del deuterón es 0.

Ejercicio 3: Simetrización de 3 partículas idénticas de espín $1/2$

Consideremos tres partículas idénticas de espín 1/2 moviéndose en 1 dimensión con Hamiltoniano:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) - \frac{g^2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}}.$$

Los niveles más bajos de energía y sus correspondientes funciones de onda vienen dados por:

$$E_0 = -\frac{Mg^4}{2\hbar^2} \quad \text{(non degenerate)} \qquad \xi(x_1, x_2, x_3) = \frac{\mathrm{e}^{-r/a}}{\sqrt{\pi a^3}}$$

$$E_1 = -\frac{Mg^4}{8\hbar^2} \quad \text{(degeneracy 4)} \qquad \begin{cases} \phi(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{(1 - r/2a)\,\mathrm{e}^{-r/2a}}{\sqrt{8\pi a^3}} \\[2ex] \psi_i(x_1, x_2, x_3) = \dfrac{x_i \mathrm{e}^{-r/2a}}{\sqrt{32\pi a^5}}, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

donde $a \equiv \dfrac{\hbar^2}{Mg^2}$ and $r \equiv (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$. Determinar la energía, degeneración y la función de onda del estado fundamental.

*En notación espectroscópica, $^{2S+1}L_J$ indica un estado de espín S, momento angular orbital L y momento angular total J. Para $L = 0, 1, 2$, etc. se escribe S, P, D, etc.

Ejercicio 4: Sistema de 3 partículas idénticas en el plano

Sean tres partículas idénticas moviéndose en el plano con potencial $V = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$. La parte orbital viene dada por dos enteros $n_x, n_y \geq 0$ tal que:

$$\mathcal{H}^{\text{orb}} \ni |\phi^{\text{orb}}_{n_x n_y}\rangle \to E_{n_x n_y} = (n_x + n_y + 1)\hbar\omega\,.$$

Encontrar el estado fundamental $|\Phi\rangle \in \mathcal{H}^{\text{orb}} \otimes \mathcal{H}^{\text{spin}}$ del sistema de las 3 partículas y su energía: *(i)* si tienen espín 0; *(ii)* si son fermiones con espín $1/2$.

Ejercicio 5: Estados coherentes

Definimos un *estado coherente* de bosones como el autoestado del operador de aniquilación a, i.e., $a\,|z\rangle = z\,|z\rangle$, donde z es un número complejo.

i) Encontrar el estado normalizado $|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,|n\rangle$, donde $|n\rangle \equiv \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}\,|0\rangle$.

ii) Determinar el valor de expectación del operador número para el estado coherente normalizado, y su desviación, $(\Delta N)^2 = \langle z|N^2|z\rangle - \langle z|N|z\rangle^2$.

Ejercicio 6: Momento angular en función de operadores de creación y aniquilaci%'on

Sea un bosón con dos estados posibles $|+\rangle$ y $|-\rangle$. Demuéstrese que los operadores

$$J_3 = \frac{1}{2}(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-), \quad J_\pm = a_\pm^\dagger a_\mp\,,$$

satisfacen el álgebra de momento angular, siendo $a_\pm$ los operadores de aniquilación de $|\pm\rangle$ respectivamente.

i) Escríbase J^2 en función del operador número $N = N_+ + N_-$.

ii) Escríbase el estado normalizado $|jm\rangle$ en función de los números de ocupación $n_\pm$ de $|\pm\rangle$, respectivamente.