Momento Angular

Ejercicio 1: Representaciones del operador rotación: Matrices de rotación

i) Encuéntrense las generadores de las rotaciones de la representación con $j = 2$.

ii) Escríbase las matriz de las rotaciones entorno al eje $\hat{z}$.

iii) ¿Qué ángulo hay que rotar un objeto con momento angular j en torno a un eje cualquiera para que éste recupere su posición original?

Ejercicio 2: Generador de las rotaciones en torno a un eje arbitrario

i) Consideremos el estado $|+\rangle \equiv \left|j = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{2}\right\rangle$. Escríbase el estado rotado $|+\rangle_{\hat{n}}$ que se obtiene a partir de dos rotaciones sucesivas respecto a los ejes cartesianos $\hat{y}$ y $\hat{z}$,

$$|+\rangle_{\hat{n}} \equiv R_{\hat{z}}(\varphi) R_{\hat{y}}(\theta) |+\rangle , \quad R_{\hat{k}}(\alpha) = \exp\left(-i J_k \alpha / \hbar\right), \quad J_k = \frac{\hbar}{2} \sigma_k .$$

ii) Muéstrese que $\vec{J} \cdot \hat{n}$ es el generador de las rotaciones entorno al eje $\hat{n}(\theta, \varphi)$, probando que deja invariante al estado polarizado en la dirección $\hat{n}$:

$$\frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \, |+\rangle_{\hat{n}} = \frac{\hbar}{2} \, |+\rangle_{\hat{n}}$$

Ejercicio 3: Rotaciones y el operador de posición

Sea el autoestado del operador de posición $|\vec{x}\rangle$. Demostrar que después de una rotación arbitraria sigue siendo un autoestado del operador de posición.

$$|\vec{x}\rangle \to \exp\left(-i \hat{n} \cdot \vec{L} \theta / \hbar\right) |\vec{x}\rangle .$$

Ejercicio 4: Examen Septiembre 2009

Sean dos partículas distintas de espín 1/2 que se encuentran en onda s. Encontrar los posible valores del espín total del sistema. Si aplicamos un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\vec{k}$ a lo largo del eje z, el Hamiltoniano que describe la interación viene dado por

$$H = -\alpha \, \vec{B} \, (\vec{S}_1 + \vec{S}_2).$$

Encontrar la máxima variación de energía del sistema.

Ejercicio 5: Autofunciones del Momento Angular: Armónicos esféricos

i) Sea un partícula escalar con función de onda orbital:

$$\psi(\vec{x}) = K(x + y + 2z)\mathrm{e}^{-\alpha r},$$

donde K y α son constantes, y $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

ii) (a) Escribir $\psi(\vec{x})$ en la base de armónicos esféricos. Cuál es el momento angular total de la partícula?

iii) Cuál es el valor esperado de L_z?.

iv) Si medimos L_z, cuál es la probabilidad de encontrar $+\hbar$?

v) Cuál es la probabilidad de encontrar la partícula en un ángulo sólido $\mathrm{d}\Omega$?.

$$Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta \mathrm{e}^{\pm i\varphi}.$$