La función de onda

Ejercicio 1: Función de onda

La transformada de fourier lleva una función del espacio de posiciones al de momentos y viceversa:

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \mathrm{e}^{ipx/\hbar} \Rightarrow \begin{cases} \langle x|\psi\rangle \equiv \psi(x) = \dfrac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \, \mathrm{e}^{ipx/\hbar} \, \hat{\psi}(p) \\ \langle p|\psi\rangle \equiv \hat{\psi}(p) = \dfrac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{-ipx/\hbar} \, \psi(x). \end{cases}$$

Si la función de onda tiene momento p_0 bien definido, su transformada viene dada por una onda plana:

$$\hat{\psi}(p) = \delta(p - p_0), \quad \psi(x) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}} \mathrm{e}^{ip_0x/\hbar}.$$

Supongamos que a $t = 0$ el estado de una partícula que se mueve libremente sobre una recta viene dado por:

$$\xi(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}\sqrt{d}} \mathrm{e}^{ikx - \frac{x^2}{2d^2}}.$$

i) Normalizar la función de onda ξ.

ii) Escribir la función de onda en la representación de momentos.

iii) Encontrar los valores esperados de la posición y el momento, $\hat{x}$ y $\hat{p}$. Mostrar que el producto de las incertidumbres es mínimo.

Ejercicio 2: Función de onda, probabilidad y evolución temporal

Una partícula de masa m se encuentra en un pozo de potencial unidimensional de longitud a ($0 \leq x \leq a$). Su función de onda en $t = 0$ viene dada por:

$$\psi(x, t = 0) = \sqrt{\frac{8}{5a}} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\right] \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right).$$

i) Resolver la ecuación de Shcroedinger y encontrar los autoestados de energía y los autovalores.

ii) Cúal es la función de onda en un instante posterior t.

iii) Cúal es la probabilidad de encontrar la partícula en la mitad izquierda de la caja transcurrido un tiempo t.

Ejercicio 3: Densidad de probabilidad y corriente de densidad

i) Demostrar que para un estado estacionario en un nivel no degenerado la densidad de probabilidad $\vec{J}(x)$ es nula.

ii) Consideremos como ejemplo el siguiente estado degenerado, que es propio del oscilador armónico tridimensional de frecuencia ω y masa M:

$$\psi(x) = \pi^{-3/4}\alpha^{5/2}(x+iy)\exp(-\alpha^2 r^2/2), \quad \alpha = (M\omega/\hbar)^{1/2}.$$

Comprobar que la densidad de corriente no es nula.

iii)

Ejercicio 4: Teorema del virial

El *teorema del virial* establece que $2\langle K\rangle_\psi = \langle \vec{x}\cdot\nabla V(\vec{x})\rangle_\psi$ siendo K la energía cinética de un estado estacionario ψ con energía potencial V. Pruébese:

i) El teorema del virial para un potencial $V(x) = kx^n$: $\quad 2\langle K\rangle = n\langle V\rangle$.

ii) Si $V(\vec{x})$ decrece radialmente $\forall x \neq 0, \quad H$ carece de estados propios.

iii) Si $\vec{x}\cdot\nabla V(\vec{x}) \leq -\gamma V(\vec{x})$, $\forall\vec{x} \neq 0$, $0 < \gamma < 2, \quad H$ no tiene autovalores $E \geq 0$.

iv) Si $V(r) = -g\mathrm{e}^{-kr}/r, \quad \vec{x}\cdot\nabla V(r) \leq -V(r) + gk$ y todo autovalor de la energía $E < gk$.