Postulados de la Mecánica Cuántica

Ejercicio 1: Relaciones de incertidumbre

i) Sean A y B dos observables. Demuéstrese la relación de incertidumbre

$$\Delta_\psi A \, \Delta_\psi B \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle|,$$

donde $\langle A \rangle_\psi \equiv \langle \psi | A | \psi \rangle$ es el valor esperado de A en el estado ψ y su *incertidumbre* (dispersión cuadrática media) es $\Delta_\psi A \equiv [\langle \psi | (A - \langle A \rangle_\psi)^2 | \psi \rangle]^{1/2} = [\langle A^2 \rangle_\psi - \langle A \rangle_\psi^2]^{1/2}$.

ii) Utilícese la relación de conmutación canónica $[X, P] = i\hbar I$ y la relación *(i)* para demostrar el famosa *relación de incertidumbre posición–momento* de Heisenberg,

$$\Delta_\psi X \, \Delta_\psi P \geq \frac{\hbar}{2}$$

iii) A partir de la ecuación de la evolución temporal del valor esperado de cualquier observable A que no dependa explícitamente del tiempo y la relación *(i)*, encuéntrese la *relación de incertidumbre energía–tiempo*

$$\tau_\psi \, \Delta_\psi H \geq \frac{\hbar}{2}, \quad \tau_\psi \equiv \frac{\Delta_\psi A}{\left| \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle \right|}$$

donde τ_ψ es el tiempo característico de evolución del observable A, que puede considerarse como un tiempo característico de evolución del sistema, y $\Delta_\psi H$ es la incertidumbre de la energía.

Ejercicio 2: Autovalores, autovectores, valores esperados y matriz densidad

El operador hamiltoniano H de un cierto sistema físico viene dado por la matriz

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y otros dos observables A y B por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & \mu & 0 \end{pmatrix},$$

siendo λ y μ números reales distintos de cero.

i) Encuéntrense los autovalores y autovectores de H, A y B.

ii) Supongamos que el sistema está en un estado descrito por el vector

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Encuéntrese la relación entre las constantes c_1, c_2 y c_3 para que ψ esté normalizado a la unidad.

(b) ¿Qué observables son compatibles? ¿Constituyen un conjunto completo? Hallar su base de autoestados simultáneos, la expresión de los operadores H, A y B en esta nueva base y la matriz de cambio de base.

(c) ¿Qué valores de la energía se pueden obtener al hacer una medida? ¿Con qué probabilidad se encuentran estos valores? ¿En qué estado queda el sistema tras obtener cada uno de esos valores?

(d) Encuéntrense los valores esperados de H, A y B en el estado ψ.

(e) ¿Cuál es la incertidumbre ΔE en la energía del estado ψ?

iii) Consideremos una colectividad de sistemas físicos, todos ellos descritos por el mismo estado ψ.

(a) ¿Qué matriz densidad la describe?

(b) ¿Qué matriz densidad describe a la colectividad *tras la medida* de la energía?

Ejercicio 3: Autovalores, autovectores, valores esperados y matriz densidad (Septiembre 2014

Sea un sistema en un estado $|\psi\rangle$ y los observables A y B, dados en una cierta base por:

$$|\psi\rangle = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donde c es una constante de normalización.

i) Si realizamos una medida de A y justo después una medida de B, cuál es la probabilidad de obtener los valores -1 y -1 en las medidas de A y B.

ii) Encontrar la probabilidad de obterner los mismos valores -1 y -1, pero ahora si medimos primero B y después A.

iii) En una colectividad de sistemas físicos, todos ellos descritos por el estado $|\psi\rangle$, medimos A y B en cualquier orden, y seleccionamos solo los estados para los que obtenemos -1 y -1. Encontrar la matriz de densidad que describe el sistema que hemos seleccinado.

Ejercicio 4: Oscilaciones de neutrinos

Consideremos dos tipos de neutrinos de masa muy pequeña pero no nula. Supongamos que los estados que se generan en interacciones débiles, ν_e y ν_μ, no coinciden con los autoestados de masa, ν_1 y ν_2, sino que son una combinación de ellos dada por

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}.$$

Si en el instante $t = 0$ se produce un neutrino ν_e con energía E (en el Sol, por ejemplo), $|\psi(0)\rangle = |\nu_e\rangle$,

i) Resolver la ecuación de Schrödinger para el estado estacionario $|\psi(t)\rangle$, siendo los estados de masa bien definida los correspondientes a partículas libres relativistas

$$E_i = \sqrt{p^2c^2 + m_i^2c^4} \simeq pc\left(1 + \frac{m_i^2c^2}{2p^2}\right).$$

ii) ¿Cuál es la probabiblidad de observar un neutrino ν_e a una distancia L de la fuente?, ¿y de observar un neutrino ν_μ?

iii) ¿Cuáles son las condiciones para que se produzcan las *oscilaciones* de neutrinos?

Ejercicio 5: El sistema de kaones neutros

Despreciando violación de CP, los estados de interacción de kaones neutros, K^0 y $\bar{K}^0$, pueden expresarse en función de los autoestados de masa y vida media bien definida, K_S y K_L, mediante

$$\begin{aligned} |K^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\ |K_S\rangle + |K_L\rangle), \\ |\bar{K}^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-|K_S\rangle + |K_L\rangle). \end{aligned}$$

El hamiltoniano *efectivo* que describe estos estados metastables no es hermítico y sus autovalores son complejos:

$$E_S = m_S c^2 - \frac{i}{2}\hbar\Gamma_S, \quad E_L = m_L c^2 - \frac{i}{2}\hbar\Gamma_L,$$

donde $m_{S,L}$ son las masas y $\Gamma_{S,L} = 1/\tau_{S,L}$ son las anchuras de desintegración (inversas de las vidas medias) del $K_{S,L}$, respectivamente.
Si en el instante $t = 0$ se produce un mesón en el estado $|\psi(0)\rangle = |K^0\rangle$,

i) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el sistema en el mismo estado K^0 al cabo de un tiempo t?, ¿y de que haya cambiado al estado $\bar{K}^0$?

ii) ¿Se conserva la probabilidad con el tiempo?

iii) Discútanse las similitudes y diferencias entre el sistema de kaones y el de dos neutrinos del ejercicio anterior.