Partículas idénticas

Clásicamente podemos distinguir partículas idénticas por sus trayectorias (midiendo con infinita precisión la posición y el momento)
Cuánticamente no podemos medir x y p con precisión infinita.

Def: Partículas idénticas son aquellas que ningún observable puede distinguir.

Simetría bajo permutaciones. Sean dos partículas idénticas y $\{A, B, \ldots\}$ un CCOC

$$A|a'a''\rangle = (A_1 + A_2)|a'a''\rangle = (a' + a'')|a'a''\rangle$$

$$A|a''a'\rangle = (a' + a'')|a''a'\rangle$$

No podemos distinguir los estados (incuso si son ortogonales)

Postulado de simetrización: Un sistema cuántico de n partículas idénticas es o bien completamente simétrico (bosones) o bien completamente antisimétrico (fermiones) bajo el intercambio de dos partículas cualesquiera.

Conexión Espín-estadística: Partículas de espín entero son bosones y semi-impar fermiones.

Corolario: Principio de exclusión de Pauli. Dos fermiónes idénticos no pueden estar en el mismo estado cuántico.

Partículas idénticas

El intercambio de partículas se formula mediante el grupo de permutaciones de n elementos (grupo simétrico S_n)

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 \dots & n & \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \in S_n \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \equiv (1\ 2\ 3)$$

$$(1\ 2)|a'a''\rangle = |a''a'\rangle \qquad (1\ 2\ 3)|a'a''a'''\rangle = |a'''a'a''\rangle$$

Simetrizador en S_n: $s = \frac{1}{n!}\sum_{p\in S_n} p, \qquad |i_1,\dots,i_n\rangle_s = \frac{s|i_1,\dots,i_n\rangle}{||s|i_1,\dots,i_n\rangle||}$

Antisimetrizador en S_n: $a = \frac{1}{n!}\sum_{p\in S_n} (-1)^p p, \qquad |i_1,\dots,i_n\rangle_a = \frac{a|i_1,\dots,i_n\rangle}{||a|i_1,\dots,i_n\rangle||}$

Actuación sobre función de onda $p\psi\big(x_1,\dots,x_n\big) = \psi\big(p^{-1}(x_1,\dots,x_n)\big)$

Correlación de intercambio. $\psi_\pm(x_1,x_2) = [\omega_A(x_1)\omega_B(x_2) \pm \omega_A(x_2)\omega_B(x_2)]/\sqrt{2}$

$$\langle\psi_\pm|O|\psi_\pm\rangle \approx \langle O\rangle_{\omega_A}\ \langle O\rangle_{\omega_B} \qquad (\omega_{A,B} \text{ localizados en regiones espaciales separadas})$$

Espacio de Fock

Sea un número arbitrario de bosons, cada uno con un espacio de Hilbert con base {|i>}.
Podemos caracterizar los estados por el núm. de ocupación en cada |i>: |N1, N2, …, Nd>

El espacio de Fock para bosones se define como: $\mathcal{H}_B = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}_n \oplus \ldots$

$\mathcal{H}_n = \{|N_1, N_2, \ldots\rangle \ / \ N_i \in \mathbb{N}_0, \ \sum_i N_i = n\}$ Esp. de Hilbert con n bosones idénticos

Operadores creación y destrucción:

$$a_i|N_1, N_2, \ldots, N_i, \ldots\rangle = \sqrt{N_i}|N_1, N_2, \ldots, N_i - 1, \ldots\rangle$$

$$a_i^\dagger|N_1, N_2, \ldots, N_i, \ldots\rangle = \sqrt{N_i + 1}|N_1, N_2, \ldots, N_i + 1, \ldots\rangle$$

$$a_i|0\rangle = 0, \ \forall i \ \text{(vacío)}$$

$$\text{Op número } \mathcal{N}_i = a_i^\dagger a_i \qquad \mathcal{N}_i|N_1, \ldots, N_i, \ldots\rangle = N_i|N_1, \ldots, N_i, \ldots\rangle$$

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0, \quad [a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$$

$$|N_1, \ldots, N_i, \ldots\rangle = [N_1! \ldots N_i! \ldots]^{-\frac{1}{2}} (a_1^\dagger)^{N_1} \ldots (a_i^\dagger)^{N_i} \ldots |0\rangle$$

Espacio de Fock

Para fermiones se puede usar el mismo formalismo con la diferencia de que los operadores creación y destrucción anticonmutan (antisimetría).
La anticonmutación implica que los únicos valores admisibles para Ni son 0 o 1 y la aparición de signos (-)

Operadores creación y destrucción:

$$\eta_i|N_1,\ldots,N_i,\ldots\rangle = (-1)^{\nu_i} N_i |N_1,\ldots,N_i-1,\ldots\rangle$$
$$\eta_i^\dagger|N_1,\ldots,N_i,\ldots\rangle = (-1)^{\nu_i} (1-N_i) |N_1,\ldots,N_i+1,\ldots\rangle$$
$$\nu_i = \sum_{k=1}^{i-1} N_k$$

$$\eta_i|0\rangle = 0,\ \forall i \text{ (vacío)}$$

$$\text{Op número } \mathcal{N}_i = \eta_i^\dagger \eta_i \qquad \mathcal{N}_i|N_1,\ldots,N_i,\ldots\rangle = N_i|N_1,\ldots,N_i,\ldots\rangle$$

$$\{\eta_i,\eta_j\} = \{\eta_i^\dagger,\eta_j^\dagger\} = 0, \quad \{\eta_i,\eta_j^\dagger\} = \delta_{ij} \ \Rightarrow \ (\eta_i^\dagger)^2 = 0 \Rightarrow N_i = 0,1$$

$$|N_1,\ldots,N_i,\ldots\rangle = (\eta_1^\dagger)^{N_1}\ldots(\eta_i^\dagger)^{N_i}\ldots|0\rangle$$