Mecánica Cuántica

- Profesores:
  - José Santiago: Teoría (jsantiago @ugr.es)
    - Tutorías: L (12-13 y 14-16), M (14:00-17:00) despacho A04.
  - Mar Bastero: Problemas (mbg @ugr.es)
    - Tutorías: M (10-12), X y J (15-17) despacho 23
  - Detalles del temario, información, apuntes en:
    - www.ugr.es/~jsantiago/Docencia/MC/
    - PRADO2
    - http://www.ugr.es/~fteorica/Docencia/grado.php

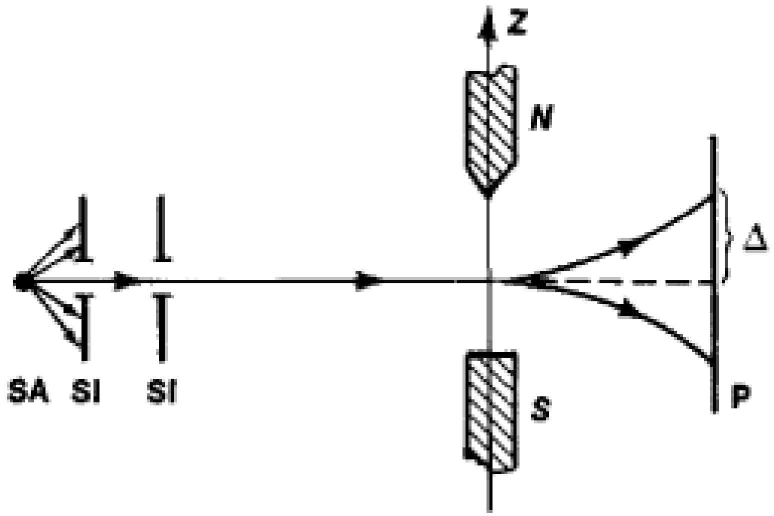
Mecánica Cuántica

- Bibliografía principal:
  - J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*.
  - A. Galindo y P. Pascual, *Mecánica Cuántica.*
  - J.R. Taylor, *Scattering Theory.*
  - P. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics.*
- Notas de clase muy esquemáticas: ejemplos, demostraciones y comentarios <u>importantes</u> en pizarra o de viva voz (tomad apuntes)
- Clases de problemas los jueves (generalmente)

• Experimento Stern-Gerlach

Cuantización

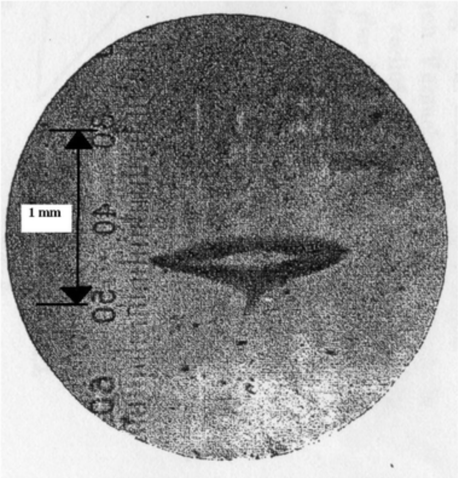
Átomos de plata (46+1 e)



$$\vec{\mu} = -\frac{e}{m_e c}\vec{s}_{e_{47}}$$ Momento magnético del átomo

$$F_z = -\frac{\partial}{\partial z}(-\vec{\mu}\cdot\vec{B}) \approx \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{e}{m_e c}\frac{\partial B_z}{\partial z} s_z$$

$$\Delta \propto s_z$$



Solo se observan <u>dos</u> valores $s_z = \pm\frac{\hbar}{2}$

$$\hbar = 1.05\times 10^{-27}\ \mathrm{erg\ s} = 6.58\times 10^{-16}\ \mathrm{eV\ s}$$

• Experimento Stern-Gerlach

Cuantización

Notación:

$$\begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix}_\alpha$$ SG

$$\begin{pmatrix} + \\ -| \end{pmatrix}_\alpha$$ Filtro

$\langle\psi_1|\psi_2\rangle$ Amplitud de probabilidad de ir de ψ_2 a ψ_1

$|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2$ Probabilidad de ir de ψ_2 a ψ_1

$|\pm\alpha\rangle$ Estado con $s_\alpha = \pm\dfrac{\hbar}{2}$

• Experimento Stern-Gerlach

Cuantización

A

$$\begin{pmatrix} + \\ -| \end{pmatrix}_z \xrightarrow{N} \begin{pmatrix} + \\ -| \end{pmatrix}_z \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} + \\ -| \end{pmatrix}_z \xrightarrow{N} \begin{pmatrix} +| \\ - \end{pmatrix}_z \longrightarrow$$

B

$$\begin{pmatrix} + \\ -| \end{pmatrix}_z \xrightarrow{N} \begin{pmatrix} + \\ -| \end{pmatrix}_x \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} + \\ -| \end{pmatrix}_z \xrightarrow{N} \begin{pmatrix} +| \\ - \end{pmatrix}_x \longrightarrow$$

C

$$\begin{pmatrix} + \\ -| \end{pmatrix}_z \xrightarrow{N} \begin{pmatrix} + \\ -| \end{pmatrix}_x \longrightarrow \begin{pmatrix} +| \\ - \end{pmatrix}_z \longrightarrow$$

D

$$\begin{pmatrix} + \\ -| \end{pmatrix}_z \xrightarrow{N} \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix}_x \longrightarrow \begin{pmatrix} +| \\ - \end{pmatrix}_z \longrightarrow$$

• Experimento Stern-Gerlach

Cuantización

Incompat. Obs.

Interferencia

A

$$\begin{pmatrix} + \\ -| \end{pmatrix}_z \xrightarrow{N} \begin{pmatrix} + \\ -| \end{pmatrix}_z \xrightarrow{N} \qquad |\langle +z | +z \rangle|^2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} + \\ -| \end{pmatrix}_z \xrightarrow{N} \begin{pmatrix} +| \\ - \end{pmatrix}_z \xrightarrow{0} \qquad |\langle -z | +z \rangle|^2 = 0$$

B

$$\begin{pmatrix} + \\ -| \end{pmatrix}_z \xrightarrow{N} \begin{pmatrix} + \\ -| \end{pmatrix}_x \xrightarrow{N/2} \qquad |\langle +x | +z \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle +z | +z \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -z | +z \rangle \right|^2 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} + \\ -| \end{pmatrix}_z \xrightarrow{N} \begin{pmatrix} +| \\ - \end{pmatrix}_x \xrightarrow{N/2} \qquad |\langle -x | +z \rangle|^2 = \left| -\frac{1}{\sqrt{2}} \langle +z | +z \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle -z | +z \rangle \right|^2 = \frac{1}{2}$$

C

$$\begin{pmatrix} + \\ -| \end{pmatrix}_z \xrightarrow{N} \begin{pmatrix} + \\ -| \end{pmatrix}_x \xrightarrow{N/2} \begin{pmatrix} +| \\ - \end{pmatrix}_z \xrightarrow{N/4} \qquad |\langle -z | +x \rangle \langle +x | +z \rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \right|^2 = \frac{1}{4}$$

D

$$\begin{pmatrix} + \\ -| \end{pmatrix}_z \xrightarrow{N} \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix}_x \xrightarrow{N} \begin{pmatrix} +| \\ - \end{pmatrix}_z \xrightarrow{0} \qquad |\langle -z | +x \rangle \langle +x | +z \rangle + \langle -z | -x \rangle \langle -x | +z \rangle|^2$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{-1}{\sqrt{2}} \right|^2 = 0$$

- Experimento Stern-Gerlach

Cuantización

Incompat. Obs.

Interferencia

Complejos

$$|\pm x\rangle = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}|+z\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-z\rangle$$

Qué pasa con s_y?

$$|\pm y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+z\rangle \pm \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}|-z\rangle$$

Postulados de la Mecánica Cuántica

Postulado I: A cada sistema físico corresponde un espacio de Hilbert complejo separable y cada estado puro está descrito por un rayo unidad $|\psi\rangle$ en dicho espacio

Postulado II: A cada observable de un sistema corresponde un operador lineal autoadjunto en el espacio de Hilbert

Postulado III: La probabilidad de que al medir un observable (A) sobre un estado puro ($|\psi\rangle$) se obtenga un valor (a) perteneciente a un Boreliano $\Delta \subset \mathbb{R}$ es $\langle\Psi|P_{A,\Delta}|\Psi\rangle$, con $P_{A,\Delta}$ el proyector al subespacio propio de autovalores generalizados en Δ

Postulado IV: Si al medir un observable A en un estado puro $|\psi\rangle$ obtenemos valores en el conjunto Δ, el sistema queda tras la medida en el estado $\dfrac{P_{A,\Delta}|\Psi\rangle}{||P_{A,\Delta}|\Psi\rangle||}$

Postulado V: Entre dos medidas consecutivas los estados puros se mantienen puros y su evolución temporal viene dada por la Ec. de Schrödinger

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$$

Postulados de la Mecánica Cuántica

Postulado I: A cada sistema físico corresponde un espacio de Hilbert complejo separable y cada estado puro está descrito por un rayo unidad $|\psi\rangle$ en dicho espacio

Recordatorio: Un esp de Hilbert complejo separable es un esp vectorial sobre los complejos con un producto escalar $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$ de dim. Hilbertiana a lo sumo infinito numerable y completo con la métrica inducida

$$\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2 \in H \qquad ||\psi|| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} \quad \text{norma inducida}$$

$$\alpha_{1,2} \in \mathbb{C},\ \psi_{1,2} \in H \qquad d(\psi_1,\psi_2) = ||\psi_1 - \psi_2|| \quad \text{métrica inducida}$$

Base ortonormal $\{e_n\}$ b.o.n. $\Leftrightarrow \{e_n\}$ conj. ortonormal maximal $\Leftrightarrow |\psi\rangle = \sum_n \langle e_n|\psi\rangle|e_n\rangle$

Th. isomorfismo: Todo esp. Hilbert $H \neq \{0\}$ es isomorfo a $l^2_{\mathbb{C}}(A)$, con cardinal(A)=dim H

Espacio dual $H^* = \{F : H \to \mathbb{C} \;/\; F \text{ lineal y cont.}\}$

Th Riesz-Frechet H^* es isomorfo a H $\qquad R : H \to H^* \quad R(|x\rangle) = F_x \equiv \langle x|$

$$\{|e_n\rangle\} \text{ b.o.n. de } H \Leftrightarrow \{\langle e_n|\} \text{ b.o.n. de } H^*$$

$$\langle\psi|\phi\rangle = \sum_n \langle\psi|e_n\rangle\langle e_n|\phi\rangle = \sum_n \langle e_n|\psi\rangle^*\langle e_n|\phi\rangle = \sum_n \psi_n^*\phi_n$$

$$\boxed{I = \sum_n |e_n\rangle\langle e_n|}$$

Descomposición espectral de la identidad

Postulados de la Mecánica Cuántica

Postulado II: `A cada observable de un sistema corresponde un operador lineal autoadjunto en el espacio de Hilbert`

Repaso: Operadores lineales $A : H \to H \quad A(\alpha_1|\psi_1\rangle + \alpha_2|\psi_2\rangle) = \alpha_1 A(|\psi_1\rangle) + \alpha_2 A(|\psi_2\rangle)$

$$A = B \Leftrightarrow D(A) = D(B),\ A(|\psi\rangle) = B(|\psi\rangle)\ \forall|\psi\rangle \in D(A)$$

Se puede caracterizar a un operador por su acción sobre una b.o.n. $A_{ij} = \langle e_i|A|e_j\rangle$

$$(A+B)|\psi\rangle = A|\psi\rangle + B|\psi\rangle$$

$$(AB)|\psi\rangle = A(B|\psi\rangle)$$

Conmutador de operadores: $[A, B] = AB - BA \neq 0$ en general

Operador ajunto: A op. lineal en $H \ \Rightarrow\ \exists! A^\dagger \ / \ \langle A^\dagger\psi|\phi\rangle = \langle\psi|A\phi\rangle$

Propiedades

$$(A^\dagger)^\dagger = A \qquad (AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

$$(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)^\dagger = \alpha_1^* A_1^\dagger + \alpha_2^* A_2^\dagger$$

En dim. finita $(A^\dagger)_{ij} = A^*_{ji} = (A^{*\,T})_{ij}$

Cambio de b.o.n. (operador unitario) $\{e_n\} \to \{\tilde{e}_n\}$ 2 b.o.n.

$$|\tilde{e}_n\rangle = U|e_n\rangle = \sum_m |\tilde{e}_m\rangle\langle e_m|e_n\rangle, \qquad UU^\dagger = U^\dagger U = I$$

$$|\tilde{e}_n\rangle = \sum_m |e_m\rangle U_{mn}, \quad \langle\tilde{e}_n| = \sum_m U^\dagger_{nm}\langle e_m|$$

Cambio de coordenadas?

Postulados de la Mecánica Cuántica

Postulado II: A cada observable de un sistema corresponde un operador lineal autoadjunto en el espacio de Hilbert

Repaso: Operadores autoadjuntos $A = A^\dagger, \quad [D(A) = D(A^\dagger)]$

$\sigma(A) \subset \mathbb{R}, \quad \sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$ $\qquad \lambda \in \sigma_p(A) \Leftrightarrow \exists\ |\lambda\rangle \in D(A)\ /\ A|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$

$\lambda \in \sigma_c(A) \Leftrightarrow \exists (A - \lambda I)^{-1}$ con dom. NO denso en H

Subespacio asociado a autovalor $\lambda \in \sigma_p(A)$: $H_\lambda \equiv \{|\lambda\rangle \in H\ /\ A|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle\} = [\{|\lambda, \alpha\rangle\}]$

$A = A^\dagger$ compacto

$\{|\lambda, \alpha\rangle,\ \lambda \in \sigma_p(A)\}$ es b.o.n. de H $\qquad |\psi\rangle = \sum_{\lambda,\alpha} |\lambda, \alpha\rangle\langle\lambda, \alpha|\psi\rangle$

Proyector ortogonal sobre H_λ: $P_\lambda = \sum_\alpha |\lambda, \alpha\rangle\langle\lambda, \alpha|$ $\qquad P_\lambda^2 = P_\lambda,\ P_\lambda = P_\lambda^\dagger$

Descomposición espectral de operadores: $A = \sum_\lambda \lambda P_\lambda, \qquad f(A) = \sum_\lambda f(\lambda) P_\lambda$

Postulados de la Mecánica Cuántica

Postulado II: `A cada observable de un sistema corresponde un operador lineal autoadjunto en el espacio de Hilbert`

Repaso: Operadores autoadjuntos $A = A^\dagger, \quad [D(A) = D(A^\dagger)]$

$\sigma(A) \subset \mathbb{R}, \quad \sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$

$\lambda \in \sigma_p(A) \Leftrightarrow \exists\ |\lambda\rangle \in D(A)\ /\ A|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$

$\lambda \in \sigma_c(A) \Leftrightarrow \exists (A - \lambda I)^{-1}$ con dom. NO denso en H

Subespacio asociado a autovalor $\lambda \in \sigma_p(A)$: $H_\lambda \equiv \{|\lambda\rangle \in H\ /\ A|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle\} = [\{|\lambda, \alpha\rangle\}]$

$A = A^\dagger$ NO compacto: Definimos autovalores y autovectores generalizados -fuera de H-

$\lambda \in \sigma_c(A), \quad A|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle, \quad |\lambda\rangle \notin H$

$\{|\lambda_n, \alpha\rangle,\ \lambda_n \in \sigma_p(A)\} \cup \{|\lambda, \alpha\rangle,\ \lambda \in \sigma_c(A)\}$ es b.o.n. generalizada de H

$$\langle \lambda_n, \alpha | \lambda_m, \beta\rangle = \delta_{nm}\delta_{\alpha\beta}$$

$$\langle \lambda, \alpha | \lambda', \beta\rangle = \delta(\lambda - \lambda')\delta_{\alpha\beta}$$

$$\langle \lambda, \alpha | \lambda_n, \beta\rangle = 0$$

$$|\psi\rangle = \sum_{\lambda_n \in \sigma_p(A)} \sum_\alpha |\lambda_n, \alpha\rangle\langle\lambda_n, \alpha|\psi\rangle + \int_{\sigma_c(A)} \mathrm{d}\lambda \sum_\alpha |\lambda, \alpha\rangle\langle\lambda, \alpha|\psi\rangle$$

$$P_A(\Delta) = \sum_{\lambda_n \in \sigma_p(A)\cap\Delta} \sum_\alpha |\lambda_n, \alpha\rangle\langle\lambda_n, \alpha| + \int_{\sigma_c(A)\cap\Delta} \mathrm{d}\lambda \sum_\alpha |\lambda, \alpha\rangle\langle\lambda, \alpha|$$

$$F(A) = \sum_{\lambda_n \in \sigma_p(A)} f(\lambda_n) \sum_\alpha |\lambda_n, \alpha\rangle\langle\lambda_n, \alpha| + \int_{\sigma_c(A)} \mathrm{d}\lambda\, f(\lambda) \sum_\alpha |\lambda, \alpha\rangle\langle\lambda, \alpha|$$

Postulados de la Mecánica Cuántica

Postulado III: La probabilidad de que al medir un observable (A) sobre un estado puro ($|\psi\rangle$) se obtenga un valor (a) perteneciente a un Boreliano $\Delta \subset \mathbb{R}$ es $\langle\Psi|P_{A,\Delta}|\Psi\rangle$, con $P_{A,\Delta}$ el proyector al subespacio propio de autovalores generalizados en Δ

$$P_{A,\psi}(\Delta) = \sum_{\lambda_n \in \sigma_p(A)\cap\Delta} \sum_{\alpha} |\langle\lambda_n,\alpha|\psi\rangle|^2 + \int_{\sigma_c(A)\cap\Delta} \mathrm{d}\lambda \sum_{\alpha} |\langle\lambda,\alpha|\psi\rangle|^2$$

Postulado VI: Si al medir un observable A en un estado puro $|\psi\rangle$ obtenemos valores en el conjunto Δ, el sistema queda tras la medida en el estado $\dfrac{P_{A,\Delta}|\Psi\rangle}{||P_{A,\Delta}|\Psi\rangle||}$

Valor medio (o esperado):

$$\langle A\rangle_\psi = \sum_{\lambda_n \in \sigma_p(A)} \sum_{\alpha} \lambda_n |\langle\lambda_n,\alpha|\psi\rangle|^2 + \int_{\sigma_c(A)} \mathrm{d}\lambda\, \lambda \sum_{\alpha} |\langle\lambda,\alpha|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|A|\psi\rangle$$

Indeterminación

$$\Delta_\psi A = \sqrt{\langle(A - \langle A\rangle_\psi)^2\rangle_\psi} = \sqrt{\langle A^2\rangle_\psi - \langle A\rangle_\psi^2}$$

Relación de indeterminación

$$\Delta_\psi A \Delta_\psi B \geq \frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle_\psi|$$

CCOC: conjunto de observables cuyos operadores

Son compatibles (conmutan)

La b.o.n. de vectores propios simultáneos es única salvo fases

El sistema es no redundante

Postulados de la Mecánica Cuántica

Operador densidad: descripción de una colectividad (colección estadística).

$$\rho = \sum_n p_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|, \quad \sum_n p_n = 1,\ p_n \geq 0. \qquad \rho = \rho^\dagger, \quad ||\rho|| \leq 1$$

$$\mathrm{Tr}\rho = \sum_n \langle\psi_n|\rho|\psi_n\rangle = 1 \qquad \mathrm{Tr}\rho A = \sum_n p_n \langle A\rangle_{\psi_n} = \langle A\rangle_\rho$$

Un estado general siempre puede escribirse como un operador densidad

Probabilidad de obtener un resultado en una colectividad: Tomamos un elemente al azar de la colectividad, ¿cuál es la probabilidad de obtener a al medir A?

$$P_{A,\rho}(\Delta) = \mathrm{Tr}\rho P_A(\Delta)$$

Medimos A en todos los elementos de la colectividad y seleccionamos los que tienen valor a ¿Cuál es el operador densidad resultante?

$$\rho_{a,\Delta} = \frac{1}{\mathrm{Tr}\rho P_A(\Delta)} \sum_{a\in\Delta} P_{A,M_a} \rho P_{A,M_a}$$

Estado puro: $\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \Leftrightarrow \rho^2 = \rho \Leftrightarrow \mathrm{Tr}\rho^2 = 1$

Postulados de la Mecánica Cuántica

Estados compuestos: entrelazamiento

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 = \{|u\rangle \otimes |v\rangle \ / \ u \in \mathcal{H}_1, \ v \in \mathcal{H}_2\}$$

Estado separable: $|uv\rangle$

Estado entrelazado: $\sum_{ij} \alpha_{ij} |u_i v_j\rangle$

Operadores actuando sobre sistemas compuestos $A_1 \otimes A_2 |uv\rangle = (A_1|u\rangle) \otimes (A_2|v\rangle)$

Densidad de matriz reducida $A \in L(\mathcal{H}_1) \Rightarrow A|uv\rangle = (A|u\rangle) \otimes |v\rangle$

$$\mathrm{Tr}(\rho A) = \sum_{ij} \langle u_i v_j | \rho A | u_i v_j \rangle = \sum_i \langle u_i | \Big(\sum_j \langle v_j | \rho | v_j \rangle \Big) A | u_i \rangle \equiv \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_1}(\rho^{\mathcal{H}_1} A) \qquad \rho^{\mathcal{H}_1} \equiv \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_2}(\rho)$$

Postulados de la Mecánica Cuántica

Postulado VI: `Entre dos medidas consecutivas los estados puros se mantienen puros y su evolución temporal viene dada por la Ec. de Schrödinger`

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle \qquad H = H^\dagger$$

$$-i\hbar\frac{d}{dt}\langle\psi(t)| = \langle\psi(t)|H(t)$$

La evolución temporal es determinista (la indeterminación ocurre en el proceso de medida)

El tiempo es un parámetro, no un observable (al contrario que x) => No covariante Lorentz

Operador evolución temporal: $|\psi(t)\rangle = U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle$

$$U(t,t) = 1$$

$$U(t_2,t_1)U(t_1,t_0) = U(t_2,t_0)$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}U(t,t_0) = H(t)U(t,t_0) \qquad U(t+\mathrm{d}t,t) = 1 - \frac{i}{\hbar}H(t)\mathrm{d}t$$

Soluciones de la Eq de Schrödinger

$$\partial_t H = 0, \quad \Rightarrow U(t,t_0) = \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}$$

$$\partial_t H \neq 0,\ [H(t),H(t')] = 0\ \forall t \neq t' \quad \Rightarrow \quad U(t,t_0) = \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^t \mathrm{d}t' H(t')}$$

$$\text{En general } U(t,t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1 \int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t_2 \ldots \int_{t_0}^{t_{n-1}}\mathrm{d}t_n H(t_1)H(t_2)\ldots H(t_n)$$

Estados estacionarios

$$U(t,0) = \sum_n \mathrm{e}^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}|n\rangle\langle n|$$

Postulados de la Mecánica Cuántica

Imágenes de evolución temporal: Schrödinger y Heisenberg

Imagen de Schrödinger: Los observables no evolucionan en el tiempo, los estados sí.

$$\langle\psi|O|\phi\rangle \to \langle\psi|U^\dagger O U|\phi\rangle$$

Imagen de Heisenberg: Los observables evolucionan en el tiempo, los estados no.

$$|\psi(t)\rangle_H = |\psi(0)\rangle_H = |\psi(0)\rangle_S$$

$$O^{(H)}(t) = U^\dagger(t) O^{(S)}(t) U(t) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} O^{(H)}(t) = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[O^{(H)}(t), H^{(H)}] + U^\dagger(t)\frac{\mathrm{d}O^{(S)}(t)}{\mathrm{d}t}U(t)$$

$$\rho(t) = U(t)\rho(t_0)U^\dagger(t), \qquad \mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -[\rho(t), H(t)] \qquad \rho_H(t) = \rho_H(0)$$

Regla de cuantización canónica: Reemplazamos en un sistema físico las coordenadas cartesianas xi y sus momentos conjugados pj por operadores que satisfacen:

$$[X_i, P_j] = \mathrm{i}\hbar\delta_{i,j}\mathbb{1}, \quad [X_i, X_j] = [P_i, P_j] = 0$$

Reglas de superselección: Sea un observable Q que conmuta con todos los demás observables del sistema. Entonces los subespacios de H asociados a valores propios de Q diferentes no pueden conectarse a través de ningún observable físico.