Problemas resueltos Temas 7 y 8.

1- En una población se presenta una alteración leve en una cierta proporción P de los individuos que la componen. Definimos una variable aleatoria X que vale 1 para los individuos alterados y 0 para los no alterados.
a) Escriba la distribución poblacional de esta variable aleatoria
b) Si p es la proporción de veces que aparece el valor 1 en muestras aleatorias simples de tamaño 3. Calcule la distribución en el muestreo de p, suponiendo que P es igual a 0,2.
c) Demuestre que en este caso p es un estimador insesgado de P.
d) Repita los pasos b) y c) de forma general para un valor cualquiera de P.

Solución:

La solución del apartado a) aparece en la siguiente tabla:

x_i	p_i
0	0,8
1	0,2

Para resolver el apartado b) comenzamos con una tabla donde aparecen todas las posibles muestras de tamaño 3, la probabilidad de estas muestras y el valor de la proporción muestral en cada una de ellas

Muestra	Prob.	p
(0,0,0)	0,512	0
(1,0,0)	0,128	1/3
(0,1,0)	0,128	1/3
(0,0,1)	0,128	1/3
(1,1,0)	0,032	2/3
(1,0,1)	0,032	2/3
(0,1,1)	0,032	2/3
(1,1,1)	0,008	1

Distribución de p:

p	Prob.
0	0,512
1/3	0,384
2/3	0,096
1	0,008

por consiguiente la esperanza matemática será:

$$E[p] = 0 \cdot 0{,}512 + 1/3 \cdot 0{,}384 + 2/3 \cdot 0{,}096 + 1 \cdot 0{,}008 = 0{,}2$$

y queda resuelto el apartado c). Para el apartado d) escribimos la distribución de p en el caso genérico que será:

p	Prob.
0	Q^3
1/3	$3PQ^2$
2/3	$3P^2Q$
1	P^3

y la esperanza matemática de p será:

$$E[p] = PQ^2 + 2P^2Q + P^3 = P(Q^2 + 2PQ + P^2) = P(Q+P)^2 = P$$

2- Una variable aleatoria puede tomar los valores 1, 2 y 3 con probabilidades 0,25 0,5 y 0,25 respectivamente. Si para estimar la media de esta variable aleatoria extraemos muestras aleatorias simples de tamaño 3 y utilizamos como estimadores la media muestral y la semisuma de los valores extremos. Queremos confirmar que:
a) Los dos estimadores son insesgados y b) La media muestral es más eficiente
Realice los cálculos necesarios para verificar estos dos puntos.

Solución:

En la siguiente tabla damos todas las muestras posibles de tamaño 3, sus probabilidades y los valores que tomarían ambos estimadores en esas muestras:

Muestra	Prob.	Media	Semisum.
(1,1,1)	0,015625	1	1
(2,1,1)	0,03125	4/3	1,5
(1,2,1)	0,03125	4/3	1,5
(1,1,2)	0,03125	4/3	1,5
(3,1,1)	0,015625	5/3	2
(1,3,1)	0,015625	5/3	2
(1,1,3)	0,015625	5/3	2
(2,2,2)	0,125	2	2
(3,2,2)	0,0625	7/3	2,5
(2,3,2)	0,0625	7/3	2,5
(2,2,3)	0,0625	7/3	2,5
(1,2,2)	0,0625	5/3	1,5
(2,1,2)	0,0625	5/3	1,5
(2,2,1)	0,0625	5/3	1,5
(3,3,3)	0,015625	3	3
(2,3,3)	0,03125	8/3	2,5
(3,2,3)	0,03125	8/3	2,5
(3,3,2)	0,03125	8/3	2,5
(1,3,3)	0,015625	7/3	2
(3,1,3)	0,015625	7/3	2
(3,3,1)	0,015625	7/3	2
(1,2,3)	0,03125	2	2
(1,3,2)	0,03125	2	2
(2,3,1)	0,03125	2	2
(2,1,3)	0,03125	2	2
(3,1,2)	0,03125	2	2
(3,2,1)	0,03125	2	2

Por consiguiente la distribución de la media muestral será:

Media	1	4/3	5/3	2	7/3	8/3	3
Prob.	0,015625	0,09375	0,234375	0,3125	0,234375	0,09375	0,015625

y la distribución de la semisuma de los valores extremos será:

Semisuma	1	1,5	2	2,5	3
Prob.	0,015625	0,28125	0,40625	0,28125	0,015625

por consiguiente las esperanzas de estos dos estimadores serían:

E[Media] = 1 · 0,015625 + 4/3 · 0,09375 + 5/3 · 0,234375 + 2 · 0,3125 +
7/3 · 0,234375 + 8/3 · 0,09375 + 3 · 0,015625 = 2

E[Semisuma] = 1 · 0,015625 + 1,5 · 0,28125 + 2 · 0,40625 + 2,5 · 0,28125 +
3 · 0,015625 = 2

luego ambos estimadores son insesgados. Las varianzas respectivas serían:

Var[Media] = 1 · 0,015625 + 16/9 · 0,09375 + 25/9 · 0,234375 + 4 · 0,3125 +
49/9 · 0,234375 + 64/9 · 0,09375 + 9 · 0,015625 - 4 = 0,167

Var[Semisuma] = 1 · 0,015625 + 2,25 · 0,28125 + 4 · 0,40625 + 6,25 · 0,28125 +
9 · 0,015625 - 4 = 0,172

por consiguiente la media es en este caso un estimador más eficiente que la semisuma de los valores extremos.

3- Las puntuaciones en la Escala de Inteligencia para Adultos de Wechsler (WAIS) siguen en una población una distribución Normal de media 100 y desviación típica 16. Si extraemos de esa población una muestra aleatoria simple de 25 individuos

a) ¿Cual es la probabilidad de que la media de esos 25 individuos sea inferior a 95?

b) ¿Cual es la probabilidad de que esa misma media esté comprendida entre 98 y 102?

Solución:

De acuerdo con el teorema de Fisher:

$$\bar{x} \quad \rightarrow \quad N\left(m, \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

Por lo que en nuestro caso:

$$\bar{x} \quad \rightarrow \quad N\left(100,, \frac{16}{\sqrt{25}}\right) \quad = \quad N(100,, 3{,}2)$$

Entonces el apartado a) se resuelve en la forma siguiente:

$$\Pr(\bar{x} \le 95) \;=\; \Pr\left(Z \le \frac{95-100}{3{,}2}\right) \;=\; \Pr(Z \le -1{,}56) \;=\; 0{,}0594$$

y el apartado b) quedará resuelto de la siguiente forma:

$$\Pr(98 < \bar{x} \le 102) \;=\; \Pr(\bar{x} \le 102) - \Pr(\bar{x} \le 98) \;=\; \Pr\left(Z \le \frac{102-100}{3{,}2}\right) - \Pr\left(Z \le \frac{98-100}{3{,}2}\right)$$

$$= \;\Pr(Z \le 0{,}62) - \Pr(Z \le -0{,}62) \;=\; 0{,}7324 - 0{,}2676 \;=\; 0{,}4648$$

4- Las puntuaciones obtenidas en la escala de Locus de Control de James por los sujetos depresivos, siguen una distribución Normal de media 90 y desviación típica 12. Si se extraen muestras aleatorias simples de 30 sujetos depresivos ¿ Por debajo de que cantidad se encontrará el 90% de las veces el valor de la varianza de la muestra?

Solución:

En virtud del teorema de Fisher sabemos que:

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} \;\rightarrow\; \chi^2_{n-1}$$

Por tanto en el problema que nos ocupa se verificará:

$$\frac{30S^2}{144} \;\rightarrow\; \chi^2_{29}$$

De las tablas de la Ji-cuadrado obtenemos:

$$\Pr\left(\chi^2_{29} \le x\right) \;=\; 0{,}9 \;\Rightarrow\; x \;=\; 39{,}09$$

Por consiguiente:

$$\Pr\left(\frac{30S^2}{144} \le 39{,}09\right) = 0{,}9 \;\Rightarrow\; \Pr\left(S^2 \le \frac{39{,}09 \cdot 144}{30}\right) = 0{,}9 \;\Rightarrow\; \Pr\left(S^2 \le 187{,}63\right) = 0{,}9$$

Por tanto, el valor pedido es 187,63.