Problemas resueltos del Tema 3.

3.1- Si un estudiante responde al azar a un examen de 8 preguntas de verdadero o falso ¿Cual es la probabilidad de que acierte 4? ¿Cual es la probabilidad de que acierte dos o menos? ¿Cual es la probabilidad de que acierte cinco o más? ¿Cuanto valen la media y la varianza del número de preguntas acertadas?

Solución.

La distribución del número de aciertos será una distribución Binomial de parámetros n = 8 y p = 1/2, en consecuencia:

$$\Pr(\boldsymbol{x}=4)=\binom{8}{4}\cdot 0{,}5^4\cdot 0{,}5^4=\frac{70}{256}=0{,}273$$

Para resolver los dos apartados siguientes calculamos previamente

$$\Pr(\boldsymbol{x}=0)=\binom{8}{0}\cdot 0{,}5^0\cdot 0{,}5^8=\frac{1}{256}=0{,}004$$

$$\Pr(\boldsymbol{x}=1)=\binom{8}{1}\cdot 0{,}5^1\cdot 0{,}5^7=\frac{8}{256}=0{,}031$$

$$\Pr(\boldsymbol{x}=2)=\binom{8}{2}\cdot 0{,}5^2\cdot 0{,}5^6=\frac{28}{256}=0{,}109$$

$$\Pr(\boldsymbol{x}=3)=\binom{8}{3}\cdot 0{,}5^3\cdot 0{,}5^5=\frac{56}{256}=0{,}219$$

en consecuencia

$$\Pr(\boldsymbol{x}\leq 2)=\Pr(\boldsymbol{x}=0)+\Pr(\boldsymbol{x}=1)+\Pr(\boldsymbol{x}=2)=0{,}004+0{,}031+0{,}109=0{,}144$$

$$\Pr(\boldsymbol{x}\geq 5)=1-\Pr(\boldsymbol{x}\leq 4)=1-(0{,}004+0{,}031+0{,}109+0{,}219+0{,}273)=0{,}364$$

La media y la varianza se obtienen aplicando la expresión obtenida de forma general para la media y la varianza de una distribución Binomial:

$$E[\xi] = n\cdot p = 8\cdot 0{,}5 = 4 \quad \text{y} \quad Var[\xi] = n\cdot p\cdot q = 8\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5 = 2$$

3.2- En una población en la que hay un 40% de hombres y un 60% de mujeres seleccionamos 4 individuos ¿Cual es la probabilidad de que haya 2 hombres y 2 mujeres? ¿Cual es la probabilidad de que haya más mujeres que hombres?

Solución.

El número de hombres en la muestra sigue una distribución Binomial de parámetros n = 4 y p = 0,4. Entonces para calcular la probabilidad de que haya 2 hombres y 2 mujeres en la muestra, basta calcular la probabilidad de que haya dos hombres en la misma.

$$\Pr(x = 2) = \binom{4}{2} \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6^2 = 6 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}36 = 0{,}3456$$

Para que haya más mujeres que hombres en la muestra, el número de estos tiene que ser menor que 2, luego la probabilidad será:

$$\Pr(x < 2) = \Pr(x = 0) + \Pr(x = 1) = \binom{4}{0} \cdot 0{,}4^0 \cdot 0{,}6^4 + \binom{4}{1} \cdot 0{,}4^1 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}4752$$

3.3- Sabiendo que la variable Z sigue una distribución Normal cero, uno, calcule las siguientes Probabilidades:
$P(Z \leq 0{,}93)$ $P(Z \leq 1{,}68)$ $P(Z \leq -2{,}27)$ $P(Z \leq -0{,}27)$
$P(Z > 0{,}62)$ $P(Z > 2{,}05)$ $P(Z > -1{,}07)$ $P(Z > -3{,}39)$
$P(0{,}56 < Z \leq 2{,}80)$ $P(-2{,}81 < Z \leq -0{,}33)$ $P(-0{,}85 < Z \leq 0{,}72)$

Solución.

Los ejercicios de la primera fila se resuelven buscando directamente en las tablas de la distribución Normal, donde se obtienen los siguientes valores:

$P(Z \leq 0{,}93) = 0{,}8238$ $P(Z \leq 1{,}68) = 0{,}9535$ $P(Z \leq -2{,}27) = 0{,}0116$
$P(Z \leq -0{,}27) = 0{,}3936$

Para resolver los ejercicios de la segunda fila se recurre a calcular la probabilidad del suceso contrario:

$$P(Z > 0{,}62) = 1 - P(Z \leq 0{,}62) = 1 - 0{,}7324 = 0{,}2676$$

y de forma análoga se obtiene:

$P(Z > 2{,}05) = 0{,}0202$ $P(Z > -1{,}07) = 0{,}8577$ $P(Z > -3{,}39) = 0{,}9996$

En la tercera fila se pide calcular la probabilidad de una serie de intervalos, para ello debe recordarse que la probabilidad de un intervalo es igual al valor de la Función de Distribución para el extremo superior menos el valor de la Función de Distribución para el extremo inferior, es decir:

$P(0{,}56 < Z \leq 2{,}80) = P(Z \leq 2{,}80) - P(Z \leq 0{,}56) = 0{,}9974 - 0{,}7123 = 0{,}2851$

y para los otros dos intervalos sería:

$P(-2,81 < Z \leq -0,33) = 0,3707 - 0,0025 = 0,3682$ $P(-0,85 < Z \leq 0,72) = 0,5665$

3.4- Siendo Z una N(0,1), calcule los valores de la variable que verifican las siguientes condiciones:
$P(Z \leq z) = 0,70$ $P(Z \leq z) = 0,90$ $P(Z \leq z) = 0,35$ $P(Z \leq z) = 0,05$
$P(Z > z) = 0,25$ $P(Z > z) = 0,05$ $P(Z > z) = 0,85$ $P(Z > z) = 0,69$
$P(-z < Z \leq z) = 0,90$ $P(-z < Z \leq z) = 0,60$

Solución.

Los ejercicios de la primera fila se resuelven buscando en las tablas de la Normal el valor más próximo a la probabilidad pedida y viendo a que valor de la variable corresponde:

$P(Z \leq z) = 0,70 \Rightarrow z \approx 0,52$ $P(Z \leq z) = 0,90 \Rightarrow z \approx 1,28$
$P(Z \leq z) = 0,35 \Rightarrow z \approx -0,39$ $P(Z \leq z) = 0,05 \Rightarrow z \approx -1,64$

La resolución de los ejercicios de la segunda fila utiliza las propiedades de la probabilidad del suceso contrario:

$$P(Z > z) = 0,25 \Rightarrow P(Z \leq z) = 1- 0,25 = 0,75 \Rightarrow z \approx 0,67$$

análogamente:

$P(Z > z) = 0,05 \Rightarrow z \approx 1,64$ $P(Z > z) = 0,85 \Rightarrow z \approx -1,04$ $P(Z > z) = 0,69 \Rightarrow z \approx -0,5$

Para resolver los ejercicios de la tercera fila se aplica la simetría de la Normal

$$P(-z < Z \leq z) = 0,90 \Rightarrow P(Z \leq -z) = 0,05 \text{ y } P(Z \leq z) = 0,95 \Rightarrow z \approx 1,64$$

$$P(-z < Z \leq z) = 0,60 \Rightarrow z \approx 0,84$$

3.5- Partiendo de que X es una variable que sigue una distribución Normal de media 50 y desviación típica 4, calcule las siguientes probabilidades:
$P(X \leq 55)$ $P(X \leq 59)$ $P(X \leq 47,5)$ $P(X \leq 45,6)$
$P(X > 60,4)$ $P(X > 58,64)$ $P(X > 48,2)$ $P(X > 46,26)$
$P(52 < X \leq 54)$ $P(44,5 < X \leq 49)$ $P(47,25 < X \leq 53,48)$

Solución.

Estos ejercicios se resuelven merced a la propiedad de que al tipificar una variable Normal la variable resultante sigue una distribución Normal cero, uno.

$$P(X \leq 55) = P\left(Z \leq \frac{55-50}{4}\right) = P(Z \leq 1,25) = 0,8944$$

análogamente:

$P(X \leq 59) = 0{,}9878 \qquad P(X \leq 47{,}5) = 0{,}2676 \qquad P(X \leq 45{,}6) = 0{,}1357$

Para los ejercicios de la segunda fila vuelve a utilizarse las propiedades del suceso contrario:

$$P(X > 60{,}4) = P\left(Z > \frac{60{,}4 - 50}{4}\right) = P(Z > 2{,}6) = 1 - P(Z \leq 2{,}6) = 0{,}0047$$

de forma semejante:

$P(X > 58{,}64) = 0{,}0154 \qquad P(X > 48{,}2) = 0{,}6736 \qquad P(X > 46{,}26) = 0{,}8264$

Los intervalos de la tercera fila se resuelven en la forma siguiente:

$$P(52 < X \leq 54) = P(X \leq 54) - P(X \leq 52) = P\left(Z \leq \frac{54 - 50}{4}\right) - P\left(Z \leq \frac{52 - 50}{4}\right)$$

$$= P(Z \leq 1) - P(Z \leq 0{,}5) = 0{,}8413 - 0{,}6915 = 0{,}1498$$

similarmente

$P(44{,}5 < X \leq 49) = 0{,}3175 \qquad P(47{,}25 < X \leq 53{,}48) = 0{,}5627$

3.6- La variable aleatoria Y sigue una distribución Normal de media 2,55 y desviación típica 0,36. Halle los valores de la variable que cumplen las siguientes condiciones:
$P(Y \leq y) = 0{,}54 \qquad P(Y \leq y) = 0{,}95 \qquad P(Y \leq y) = 0{,}42 \qquad P(Y \leq y) = 0{,}1$
$P(Y > y) = 0{,}38 \qquad P(Y > y) = 0{,}05 \qquad P(Y > y) = 0{,}54 \qquad P(Y > y) = 0{,}01$
$P(a < Y \leq b) = 0{,}80 \qquad P(a < Y \leq b) = 0{,}95$

Solución.

$$P(Y \leq y) = 0{,}54 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{y - 2{,}55}{0{,}36}\right) = 0{,}54$$

buscando en las tablas de la Normal:

$$P(Z \leq 0{,}1) \approx 0{,}54 \Rightarrow \frac{y - 2{,}55}{0{,}36} = 0{,}1 \Rightarrow y = 2{,}55 + 0{,}36 \cdot 0{,}1 = 2{,}586$$

de manera semejante:

$P(Y \leq y) = 0{,}95 \Rightarrow y = 3{,}1404 \qquad P(Y \leq y) = 0{,}42 \Rightarrow y = 2{,}478$
$P(Y \leq y) = 0{,}1 \Rightarrow y = 2{,}0892$

$$P(Y > y) = 0{,}38 \Rightarrow P(Y \le y) = 0{,}62 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{y - 2{,}55}{0{,}36}\right) = 0{,}62$$

buscando en las tablas de la Normal cero, uno:

$$P(Z \le 0{,}31) \approx 0{,}62 \Rightarrow \frac{y - 2{,}55}{0{,}36} = 0{,}31 \Rightarrow y = 2{,}55 + 0{,}36 \cdot 0{,}31 = 2{,}6616$$

análogamente:

P(Y > y) = 0,05 ⇒ y =3,1404 P(Y > y) = 0,54 ⇒ y = 2,514
P(Y > y) = 0,01 ⇒ y = 3,3888

$$P(a < Y \le b) = 0{,}80 \Rightarrow P(Y \le a) = 0{,}1 \quad P(Y \le b) = 0{,}9$$

$$P\left(Z \le \frac{a - 2{,}55}{0{,}36}\right) = 0{,}1 \quad P(Z \le -1{,}28) = 0{,}1 \Rightarrow \frac{a - 2{,}55}{0{,}36} = -1{,}28 \Rightarrow a = 2{,}0892$$

$$P\left(Z \le \frac{b - 2{,}55}{0{,}36}\right) = 0{,}9 \quad P(Z \le 1{,}28) = 0{,}9 \Rightarrow \frac{b - 2{,}55}{0{,}36} = 1{,}28 \Rightarrow b = 3{,}0108$$

y para el otro intervalo:

P(a < Y ≤ b) = 0,95 ⇒ a = 1,8444 y b = 3,2556

3.7- Las calificaciones en un examen siguen una distribución Normal de media 5,6 y desviación típica 0,8.
a) ¿Qué proporción de alumnos tendrá puntuaciones inferiores o iguales a 4?
b) ¿Qué proporción de alumnos aprobará?
c) ¿Qué proporción de alumnos obtendrá Notable o Sobresaliente?

Solución.

a) $\Pr(X \le 4) = \Pr\left(Z \le \frac{4 - 5{,}6}{0{,}8}\right) = \Pr(Z \le -2) = 0{,}0228$

b) $\Pr(X > 5) = \Pr\left(Z > \frac{5 - 5{,}6}{0{,}8}\right) = 1 - \Pr(Z \le -0{,}75) = 1 - 0{,}2266 = 0{,}7734$

c) $\Pr(X > 7) = \Pr\left(Z > \frac{7 - 5{,}6}{0{,}8}\right) = 1 - \Pr(Z \le 1{,}75) = 1 - 0{,}9599 = 0{,}0401$

3.8- Las puntuaciones en un test de ansiedad-rasgo siguen, en una población de mujeres, una distribución Normal de media 25 y desviación Típica 10. Si queremos clasificar la población en cuatro grupos de igual tamaño ¿Cuales serán las puntuaciones que delimiten estos grupos?

Solución.

Las puntuaciones que delimitan estos cuatro grupos serán el primer, segundo y tercer cuartil de la distribución

$$\Pr\left(X \le Q_1\right) = 0{,}25 \quad \Rightarrow \quad \Pr\left(Z \le \frac{Q_1 - 25}{10}\right) = 0{,}25$$

buscando en las tablas de la Normal cero, uno el valor de la variable que deja por debajo de si una probabilidad de 0,25 tenemos:

$$\Pr(Z \le -0{,}67) \quad = \quad 0{,}25 \qquad \text{luego} \qquad \frac{Q_1 - 25}{10} \quad = \quad -0{,}67$$

y despejando $\quad Q_1 \quad = \quad 25 - 10 \cdot 0{,}67 \quad = \quad 18{,}3$

Como en la distribución Normal Media y Mediana son iguales tendremos que:

$$Q_2 \quad = \quad 25$$

$$\Pr\left(X \le Q_3\right) = 0{,}75 \quad \Rightarrow \quad \Pr\left(Z \le \frac{Q_3 - 25}{10}\right) = 0{,}75$$

buscando en las tablas

$$\Pr(Z \le 0{,}67) = 0{,}75 \qquad \text{luego} \qquad \frac{Q_3 - 25}{10} \quad = \quad 0{,}67$$

despejando

$$Q_3 \quad = \quad 25 + 10 \cdot 0{,}67 \quad = \quad 31{,}7$$

Por consiguiente el primer grupo serían los individuos con puntuaciones inferiores o iguales a 18,3, el segundo aquellos con puntuaciones entre 18,3 y 25, el tercero los sujetos con puntuaciones entre 25 y 31,7 y el cuarto aquellos que tengan puntuaciones superiores a 31,7.

3.9- Una prueba consta de 200 preguntas de verdadero o falso, para un sujeto que respondiese al azar ¿Cual sería la probabilidad de que acertase?

a) 50 preguntas o menos.

b) Más de 50 y menos de 100.

c) Más de 120 preguntas.

Solución.

El número de preguntas acertadas seguirá una distribución Binomial con n = 200 y p = 0,5. Ahora bien, como el número de pruebas es elevado esta distribución se puede aproximar por una Normal de media 200·0,5 = 100 y de varianza 200·0,5·0,5 = 50 o lo que es lo mismo con desviación típica 7,07, luego:

$$\Pr(\boldsymbol{x} \le 50) \approx \Pr(X \le 50{,}5) = \Pr\left(Z \le \frac{50{,}5-100}{7{,}07} \right) = \Pr(Z \le -7) \approx 0$$

$$\Pr(50 < \boldsymbol{x} < 100) = \Pr(\boldsymbol{x} \le 99) - \Pr(\boldsymbol{x} \le 51) = \Pr\left(Z \le \frac{99{,}5-100}{7{,}07} \right) - \Pr\left(Z \le \frac{50{,}5-100}{7{,}07} \right)$$

$$= \Pr(Z \le -0{,}07) - \Pr(Z \le -7) = 0{,}4721 - 0 = 0{,}4721$$

$$\Pr(\boldsymbol{x} > 120) \approx \Pr\left(Z > \frac{120{,}5-100}{7{,}07} \right) = 1 - \Pr(Z \le 2{,}9) = 1 - 0{,}9981 = 0{,}0019$$

3.10- En una distribución Binomial con n = 10 y P = 0,8 ¿Qué error se comete al calcular la probabilidad de que la variable sea igual a 6, mediante la aproximación Normal?

Solución.

$$\Pr(\boldsymbol{x} = 6) \quad = \quad \binom{10}{6} 0{,}8^6 \cdot 0{,}2^4 \quad = \quad 0{,}0881$$

Esta distribución Binomial se aproxima por una Normal de media 8 y desviación típica 1,265, luego:

$$\Pr(\boldsymbol{x} = 6) \quad \approx \quad \Pr(5{,}5 < X \le 6{,}5) \quad = \quad \Pr(X \le 6{,}5) - \Pr(X \le 5{,}5)$$

$$= \Pr\left(Z \le \frac{6{,}5-8}{1{,}265} \right) - \Pr\left(Z \le \frac{5{,}5-8}{1{,}265} \right) \quad = \quad \Pr(Z \le -1{,}18) - \Pr(Z \le -1{,}98)$$

$$= \; 0{,}1190 - 0{,}0238 \; = \; 0{,}0952$$

y el error que cometeríamos sería:

$$0{,}0952 - 0{,}0881 \; = \; 0{,}0071$$