Problemas resueltos del Tema 2

2.1- Calcule y escriba en una tabla la distribución de la variable aleatoria suma de los números que aparecen al lanzar dos dados.

Solución.

A continuación presentamos todos los sucesos que pueden ocurrir al lanzar dos dados y el valor que para cada uno de estos sucesos tiene la variable suma:

(1,1) 2	(2,1) 3	(3,1) 4	(4,1) 5	(5,1) 6	(6,1) 7
(1,2) 3	(2,2) 4	(3,2) 5	(4,2) 6	(5,2) 7	(6,2) 8
(1,3) 4	(2,3) 5	(3,3) 6	(4,3) 7	(5,3) 8	(6,3) 9
(1,4) 5	(2,4) 6	(3,4) 7	(4,4) 8	(5,4) 9	(6,4) 10
(1,5) 6	(2,5) 7	(3,5) 8	(4,5) 9	(5,5) 10	(6,5) 11
(1,6)) 7	(2,6) 8	(3,6) 9	(4,6) 10	(5,6) 11	(6,6) 12

Como todos estos sucesos tienen la misma probabilidad 1/36, la distribución de la suma será:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

2.2- Un jugador afirma que al lanzar dos dados es igual de probable obtener un seis que un siete, ya que hay el mismo número de resultados a favor de un resultado que de otro. Cinco y uno, cuatro y dos, tres y tres, para el seis y seis y uno, cinco y dos, cuatro y tres, para el siete. ¿Es cierta esta afirmación? Razone la respuesta.

Solución.

No, en realidad los sucesos que dan origen a que la suma valga 6 son: (1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1) por tanto la probabilidad será 5/36, mientras que los sucesos que hacen que la suma sea 7 son (1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1) y en consecuencia esta probabilidad será 6/36.

2.3- Para estudiar si las ratas tienen visión cromática, en una caja que cuenta con tres palancas se marca en rojo aquella que al pulsarla proporciona alimento. En cada prueba la posición de este pulsador se cambia aleatoriamente. Se somete una rata a cuatro pruebas. ¿Cual sería la distribución de la variable aleatoria número de pulsaciones que consiguen alimento, si la rata no distinguiera el rojo y pulsase al azar?

Solución.

La variable aleatoria número de pulsaciones puede tomar los valores 0, 1, 2, 3 y 4. El suceso que da origen a que la variable valga 0 sería:

$\left(\overline{R},\overline{R},\overline{R},\overline{R}\right)$ cuya probabilidad sería 2/3 · 2/3 · 2/3 · 2/3 = 16/81

El suceso que da origen a que la variable valga 1 sería:

$$\left(R,\overline{R},\overline{R},\overline{R}\right)\cup\left(\overline{R},R,\overline{R},\overline{R}\right)\cup\left(\overline{R},\overline{R},R,\overline{R}\right)\cup\left(\overline{R},\overline{R},\overline{R},R\right)$$

y su probabilidad sería 4 · 1/3 · 2/3 · 2/3 · 2/3 = 32/81

El suceso que es la imagen inversa de 2 es:

$$\left(R,R,\overline{R},\overline{R}\right)\cup\left(R,\overline{R},R,\overline{R}\right)\cup\left(R,\overline{R},\overline{R},R\right)\cup\left(\overline{R},R,R,\overline{R}\right)\cup\left(\overline{R},R,\overline{R},R\right)\cup\left(\overline{R},\overline{R},R,R\right)$$

y su probabilidad 6 · 1/3 · 1/3 · 2/3 · 2/3 = 24/81

La imagen inversa de 3 es:

$$\left(R,R,R,\overline{R}\right)\cup\left(R,R,\overline{R},R\right)\cup\left(R,\overline{R},R,R\right)\cup\left(\overline{R},R,R,R\right)$$

y su probabilidad 4 · 1/3 · 1/3 · 1/3 · 2/3 = 8/81

La imagen inversa de 4 es el suceso:

$\left(R,R,R,R\right)$ y su probabilidad es 1/3 · 1/3 · 1/3 · 1/3 = 1/81

Resumiendo la distribución del número de aciertos es:

X	0	1	2	3	4
P	16/81	32/81	24/81	8/81	1/81

2.4- Un jugador de Rol, en una partida de Dungeons and Dragons, para salvarse de un conjuro de Raistlin, necesita sacar un 18 en el lanzamiento de los dados. El Dungeon Master le ofrece lanzar tres dados de seis caras o uno de diez junto con uno de ocho. ¿En cual de estas dos alternativas es más probable obtener un 18 y salvarse del conjuro? Explique su respuesta ¿Sería la respuesta la misma si hubiese que sacar 17 o más para evitar el conjuro?

Solución.

Para sacar 18 con tres dados de seis caras tiene que ocurrir el suceso (6, 6, 6) que tiene una probabilidad 1/6 · 1/6 · 1/6 = 1/216.

Para obtener 18 con un dado de diez caras y otro de ocho tiene que ocurrir el suceso (10, 8) cuya probabilidad es 1/10 · 1/8 = 1/80. Obviamente esta probabilidad es mayor que la anterior.

Para obtener 17 o más con los tres dados tiene que ocurrir el suceso:

$(5, 6, 6) \cup (6, 5, 6) \cup (6, 6, 5) \cup (6, 6, 6)$ cuya probabilidad es 4/216.

Para conseguir el mismo resultado con los dos dados tiene que ocurrir:
$(10, 7) \cup (9, 8) \cup (10, 8)$ que tiene una probabilidad de 3/80 que también sería mayor que con los tres dados.

2.5- Tenemos una urna con dos bolas blancas, tres verdes y cinco rojas. Extraemos al azar dos bolas simultáneamente. Recibimos 200 pesetas si las dos bolas son blancas, 100 si las dos son verdes y 10 si una es roja y la otra verde, en los demás casos no recibimos nada. ¿Cual es el valor esperado de los premios?

Solución.

$P(B1 \cap B2) = P(B1) \cdot P(B2 / B1) = 2/10 \cdot 1/9 = 2/90 = 1/45$

$P(V1 \cap V2) = P(V1) \cdot P(V2 / V1) = 3/10 \cdot 2/9 = 6/90 = 1/15$

$P((R1 \cap V2) \cup (V1 \cap R2)) = P(R1 \cap V2) + P(V1 \cap R2) = 5/10 \cdot 3/9 + 3/10 \cdot 5/9 =$
$15/90 + 15/90 = 1/3$

Por consiguiente el premio esperado sería:

$$E[\text{premio}] = 200 \cdot 1/45 + 100 \cdot 1/15 + 10 \cdot 1/3 + 0 \cdot 26/45 = 14{,}4$$

2.6- En el punto de partida de un laberinto hay tres orificios iguales A, B y C. Si la rata elige A vuelve al punto de partida después de recorrer dos metros. Si elige B recorre cinco metros y vuelve al mismo punto. Si elige C sale al exterior recorriendo un metro. ¿Por término medio que distancia recorre una rata antes de salir, si siempre elige un orificio distinto de los seleccionados en veces anteriores?

Solución.

Los itinerarios que pueden darse con las distancias recorridas en cada caso, son (A, B, C) 8, (B, A, C) 8, (A, C) 3, (B, C) 6, (C) 1, y sus probabilidades serían:

$P(A, B, C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cap B) = 1/3 \cdot 1/2 \cdot 1 = 1/6$
$P(B, A, C) = P(B) \cdot P(A/B) \cdot P(C/B \cap A) = 1/3 \cdot 1/2 \cdot 1 = 1/6$
$P(A, C) = P(A) \cdot P(C/A) = 1/3 \cdot 1/2 = 1/6$
$P(B, C) = P(B) \cdot P(C/B) = 1/3 \cdot 1/2 = 1/6$
$P(C) = 1/3$

En consecuencia la distancia media recorrida será:

$$E[D] = 8 \cdot 1/3 + 6 \cdot 1/6 + 3 \cdot 1/6 + 1 \cdot 1/3 = 4{,}5$$