Variables Aleatorias

Introducción

Existen situaciones aleatorias cuyo estudio se simplifica si, en vez de considerar el resultado del experimento aleatorio en cuestión, se toma como punto de partida una función numérica de sus posibles resultados. La simplificación conceptual que suele conllevar este proceso así como el hecho de que es mucho más fácil operar con valores numéricos que con conjuntos de sucesos hace que esta transformación, en la mayoría de los casos, ayude a conocer la naturaleza del fenómeno que se está tratando.

Por ejemplo, si consideramos un examen en el que se enuncian veinte afirmaciones y los alumnos tienen que indicar si son verdaderas o falsas, es obvio que el nivel de conocimiento, sobre esta materia, de un alumno queda reflejado en su patrón de respuestas, que podría ser el siguiente:

V, V, V, F, F, V, V, F, V, F, F, F, V, V, F, V, F, F, V, V.

Considerando todos los patrones de respuesta posibles junto con sus probabilidades de aparición entre los alumnos de una clase tendríamos la distribución de los resultados de la prueba en esa clase. Aunque es cierto que en esa distribución está contenida toda la información de que disponemos sobre el nivel de ejecución de ese examen, también es cierto que dicha información es difícil de manejar y de resumir. Bajo determinadas condiciones (que las preguntas sean de igual dificultad y hagan referencia a un único rasgo) podemos simplificar extraordinariamente el manejo de la situación si asignamos a cada alumno una calificación numérica obtenida calculando el número de respuestas correctas y restándole a dicho número la cifra de respuestas incorrectas. Así, si las respuestas correctas eran:

V, V, V, F, V, V, V, F, V, F, V, F, V, V, F, V, F, F, V, V.

el alumno del patrón anterior obtendría una calificación de 16 = 18 aciertos - 2 errores.

Esta asignación de números a los sucesos elementales de un experimento aleatorio simplifica el manejo de la situación de dos formas: En primer lugar asigna el mismo número a sucesos que son equivalentes, con lo cual reduce el número de resultados a considerar (En las condiciones anteriormente enunciadas, dos individuos con la misma puntuación tienen el mismo grado de conocimiento de la materia, con independencia de cual haya sido su patrón de respuestas) y en segundo lugar permite realizar mediante las operaciones estadísticas, que ya conocemos, síntesis numéricas como promedios, medidas de dispersión, etc.

A estas funciones que asignan a cada suceso elemental de un experimento aleatorio un número real, cuando verifiquen determinadas condiciones que especificaremos a lo largo del tema, las denominaremos *variables aleatorias*.

Distribución de probabilidad de una variable aleatoria

En una primera aproximación, podemos decir que la sucesión de probabilidades con las que una variable aleatoria toma sus distintos valores constituye la *distribución de probabilidad* de esa variable. Vemos por consiguiente que para especificar la distribución de una variable debemos conocer tanto sus posibles valores como la probabilidad de aparición de los mismos.

Un sencillo ejemplo nos ayudará a clarificar como determinar la distribución de una variable aleatoria. Sea un experimento aleatorio consistente en lanzar simultáneamente tres monedas y consideremos la función que asigna a cada lanzamiento el número de caras que aparecen en el mismo. Esta función va a ser la variable aleatoria de la cual estudiaremos su distribución. En primer lugar determinaremos los posibles valores, obviamente estos son:

0 si al lanzar no sale ninguna cara, es decir salen tres cruces
1 si sale una cara y dos cruces, cualquiera que sea el orden en que aparecen
2 si aparecen dos caras y una cruz
3 si las tres monedas muestran la cara

Veamos ahora como calcular la probabilidad de que se presente cada uno de estos valores. Para que aparezca el valor 0 tiene que ocurrir que salgan tres cruces al lanzar las monedas y solamente en ese caso se puede dar el valor 0, por consiguiente parece bastante obvio que la probabilidad de que el número de caras sea cero es la misma que la que se dé el suceso:

$$(+, +, +)$$

Como la probabilidad de que aparezca cruz al lanzar una moneda es 1/2 y el resultado del lanzamiento de cada moneda es independiente de los resultados de las restantes, aplicando las propiedades del cálculo de probabilidades tenemos que:

$$Pr(X = 0) = Pr(+, +, +) = Pr(+ \cap + \cap +) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$$

Para que la variable aleatoria número de caras valga 1 tiene que ocurrir que salga una cara y sólo una al lanzar las tres monedas, por consiguiente tiene que aparecer el suceso elemental C, +, + o bien que aparezca el suceso +, C, + o el suceso +, +, C por consiguiente la probabilidad del valor 1 es la misma que la probabilidad del suceso unión de los tres sucesos elementales reseñados, como estos sucesos son incompatibles tendremos que:

$$Pr(X=1) = Pr[(C, +, +)\cup(+, C, +)\cup(+, +, C)] = Pr(C, +, +) + Pr(+, C, +) + Pr(+, +, C)$$

siguiendo el mismo razonamiento anterior tendremos que:

$$Pr(C, +, +) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$$

$$Pr(+, C, +) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8 \quad y$$

$$Pr(+, C, +) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$$

por consiguiente:

$$\Pr(X = 1) = 1/8 + 1/8 + 1/8 = 3/8$$

De forma análoga para que el número de caras valga 2 tiene que ocurrir uno de los siguientes sucesos: (C, C, +) o (C, +, C) o (+, C, C) y por tanto:

$$\Pr(X{=}2) = \Pr[(C, C, +)\cup(C, +, C)\cup(+, C, C)] = \Pr(C, C, +) + \Pr(C, +, C) + \Pr(+, C, C)$$

de lo que resulta que:

$$\Pr(X = 2) = 1/8 + 1/8 + 1/8 = 3/8$$

Finalmente para que el número de caras tome el valor 3 tiene que ocurrir el suceso (C, C, C) luego:

$$\Pr(X{=}3) = \Pr(C, C, C) = \Pr(C \cap C \cap C) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$$

Presentando en forma de tabla esta distribución tendríamos:

X	Pr
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

Resumiendo el proceso seguido, vemos que la distribución se ha obtenido calculando las probabilidades de los distintos valores de la variable aleatoria y que para ello hemos calculado la probabilidad del suceso que da origen a que ese valor se presente. En términos matemáticos este suceso se denomina *imagen inversa* del valor, por ello la condición para que una función, del tipo que hemos visto, sea una *variable aleatoria* es que se pueda calcular las probabilidades de las imágenes inversas de los valores que presenta o lo que es lo mismo, que las imágenes inversas pertenezcan al sigma-álgebra que es la familia de sucesos sobre los que está definida la probabilidad.

La condición anterior de que puedan calcularse las probabilidades de las imágenes inversas habrá que exigirla siempre para poder calcular la distribución de la variable aleatoria, no obstante esta condición puede adoptar una forma ligeramente distinta según se trate de variables aleatorias discretas o continuas cuyas características pasamos a estudiar.

Variable aleatoria discreta

Si el conjunto de valores posibles de una variable aleatoria es numerable se dice que dicha variable es discreta. Recordaremos, que un conjunto es numerable cuando puede ponerse en correspondencia biunívoca con un subconjunto de los números naturales es decir que hay un primer valor, un segundo y así sucesivamente. En términos prácticos, el que una variable aleatoria sea discreta se traduce en que sus valores, aunque sean infinitos, son números fijos y aislados. Esto no implica que necesariamente tenga que tomar como valores números enteros, por ejemplo, una variable aleatoria que tomase los valores 0,5 1 1,5 2 2,5 3 3,5 ... sería una variable aleatoria discreta.

Como indicamos antes, la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta es la sucesión de probabilidades con las que la variable toma cada valor, obsérvese que la variable utilizada en el ejemplo era discreta, ahora bien esta distribución puede describirse especificando la *Función de probabilidad* o alternativamente indicando cual es la *Función de distribución* de dicha variable.

Función de Probabilidad

A toda regla que permita asociar a cada valor x_i de la variable aleatoria su probabilidad p_i la llamaremos Función de Probabilidad y la designaremos $\phi(x)$. Esta regla o correspondencia entre los valores de la variable y sus probabilidades la podemos especificar bien mediante una tabla o bien mediante una expresión analítica que permita calcular en función de los valores, las probabilidades que les corresponden.

Por ejemplo, la distribución de probabilidad que aparece en la siguiente tabla:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	3/20	1/5	3/10	1/5	3/20

Puede también especificarse mediante la siguiente expresión:

$$\phi(x) \quad = \quad \Pr(X = x) \quad = \quad \frac{3}{5(2 + |x - 2|)}$$

Como pueden comprobar.

Obviamente, en una distribución de probabilidad debe de verificarse que la suma de todas las probabilidades sea igual a la unidad

$$\sum_i \phi(x_i) \quad = \quad 1$$

Función de Distribución

De forma general, tanto para variables discretas como continuas, se define la Función de Distribución, F(x), de una variable aleatoria, X , como la función que para cada valor x nos proporciona la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores inferiores o iguales a x, es decir:

$$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

Para variables aleatorias discretas la Función de Distribución es igual a la suma de las probabilidades de los valores inferiores o iguales a x :

$$F(x) \quad = \quad \sum_{x_i \leq x} \phi(x_i)$$

Por ejemplo, la distribución de la variable aleatoria número de caras al lanzar tres monedas, tenía la siguiente Función de Probabilidad:

x_i	0	1	2	3
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8

Por consiguiente, la Función de Distribución tomaría los siguientes valores:

$F(0) = Pr(X \leq 0) = Pr(X = 0) = 1/8$
$F(1) = Pr(X \leq 1) = Pr(X = 0) + Pr(X = 1) = 1/8 + 3/8 = 4/8$
$F(2) = Pr(X \leq 2) = Pr(X = 0) + Pr(X=1) + Pr(X = 2) = 1/8 + 3/8 + 3/8 = 7/8$
$F(3) = Pr(X \leq 3) = Pr(X = 0) + Pr(X = 1) + Pr(X = 2) + Pr(X = 3) = 1$

Hay que hacer notar que la función de distribución está definida para cualquier número real, es decir que toma un valor también para valores que no tome la variable aleatoria, por ejemplo:

$$F(1{,}272) = Pr(X \leq 1{,}272) = Pr(X = 0) + Pr(X = 1) = 1/8 + 3/8 = 4/8$$

Ahora bien, puede observarse que para cualquier valor de x comprendido entre 1 y 2 la Función de distribución toma el valor 4/8, es decir que la Función de Distribución sólo cambia de valor en los puntos de existencia de la función de probabilidad. Esto hace que las Funciones de Distribución de las *variables aleatorias discretas* tengan una forma característica de curva escalonada.

Variable aleatoria continua

Una variable aleatoria se dice que es continua si sus valores posibles son todos los números reales de un intervalo, o dicho de otra forma, una variable es continua si dados dos valores cualesquiera, existe siempre un valor intermedio. Puede ayudar a clarificar este concepto el pensar en el cómo lo opuesto de lo que era una variable aleatoria discreta, es decir sus valores en vez de ser valores aislados que se situarían como marcas aisladas y diferenciadas en la recta real, constituyen en este caso un continuo de puntos que rellena sin solución de continuidad un intervalo de la recta real.

Tenemos por tanto, que una variable aleatoria continua puede tomar una infinidad no numerable de valores y por consiguiente la probabilidad de un valor aislado es nula. Esto hace que la función de probabilidad, tal y como la definimos para el caso de variables discretas, carezca ahora de sentido, ya que al ser nula en todos los puntos no tiene utilidad a la hora de describir la distribución de probabilidad .

Cuando manejemos una variable aleatoria continua no podremos hablar de la probabilidad de un valor, sino que tendremos que referirnos a la probabilidad de que el valor de la variable esté comprendido en un intervalo de valores. De esta forma, la condición para que una función que asigna números reales a los sucesos elementales sea una variable aleatoria tiene en cuenta que las probabilidades que deben de poderse calcular son las de los intervalos y por consiguiente exige que pertenezcan al sigma álgebra las imágenes inversas de los intervalos $(-\infty, x]$ para todo valor de x.

Función de Distribución

La condición anterior implica que no haya ninguna dificultad en definir la Función de Distribución de una variable aleatoria continua pues está definida la probabilidad de que la variable aleatoria pertenezca a los intervalos el tipo anterior, pero esas probabilidades son precisamente las que definen la Función de Distribución, en efecto:

$$\Pr\left(X \in \left(-\infty, x\right]\right) \quad = \quad \Pr\left(X \leq x\right) \quad = \quad F(x)$$

A partir de la Función de Distribución es posible calcular la probabilidad de cualquier intervalo del tipo (a, b] pues:

$$\Pr\left(X \in \left(a, b\right]\right) \quad = \quad \Pr(X \leq b) - \Pr(X \leq a) \quad = \quad F(b) - F(a)$$

Para ver como varía la probabilidad de un intervalo a otro deberemos tomar en consideración tanto la probabilidad de esos intervalos como su amplitud y comparar las probabilidades promedio o *densidad de probabilidad*. La densidad de probabilidad de un intervalo se determina dividiendo la probabilidad de que la variable aleatoria pertenezca a ese intervalo por su amplitud, es decir:

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

Función de Densidad

Por distintas razones es conveniente disponer de una función que nos indique como varía la probabilidad, o un valor relacionado con ella, de un punto a otro de la distribución esta necesidad viene a cubrirla la *Función de Densidad* que habitualmente se designa por f(x).

Veamos cual es el proceso mediante el cual se construye esa función, para cada valor x de la variable aleatoria se toma un intervalo de la forma $(x + \Delta x)$ y se calcula la densidad de probabilidad de ese intervalo, mediante la expresión del apartado anterior, con lo cual tendríamos:

$$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

A continuación tomaría un incremento de x menor y repetiría el cálculo anterior, con lo cual tendría un nuevo valor. Repitiendo este proceso indefinidamente con intervalos de amplitud decreciente tendría una sucesión de densidades de probabilidad, el límite de esa sucesión será precisamente el valor de la Función de Densidad en el punto x. En términos de una expresión matemática lo anteriormente expuesto sería:

$$f(x) \quad = \quad lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

Pero esta expresión es precisamente la que define el concepto de derivada de una función, por consiguiente podemos afirmar que la Función de Densidad es la derivada de la Función de Distribución, es decir:

$$f(x) \quad = \quad F'(x)$$

Recordando que la integración es la operación inversa de la derivación también podemos escribir:

$$F(x) \quad = \quad \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Por consiguiente, conocida la Función de Distribución de una variable aleatoria puede conocerse su Función de Densidad y viceversa. Por ello la distribución de una variable aleatoria continua puede caracterizarse tanto mediante su Función de Densidad como por su Función de Distribución.

Esperanza Matemática

Al igual que en el caso de las variables estadísticas es conveniente disponer de unos valores numéricos que sinteticen la distribución de las variables aleatorias, dando idea de su posición global de su dispersión y de otras características. De esta forma podremos comparar distintas distribuciones y resumir en uno o dos números los elementos esenciales que nos interesa examinar. Para ello comenzamos definiendo el concepto de *Esperanza Matemática de una variable aleatoria* también denominado *Valor Esperado* o *Media*.

Se define la Esperanza Matemática de una variable aleatoria discreta como la suma de los productos de los valores de la variable por sus respectivas probabilidades:

$$E[X] \quad = \quad \sum_i x_i \cdot p_i$$

Por ejemplo, en el caso de la variable aleatoria número de caras al lanzar tres monedas la Esperanza Matemática sería:

$$E[X] \; = \; 0 \cdot 1/8 + 1 \cdot 3/8 + 2 \cdot 3/8 + 3 \cdot 1/8 \; = \; 3/8 + 6/8 + 3/8 \; = \; 12/8 \; = \; 1{,}5$$

Esto nos indica que si lanzásemos las tres monedas un gran número de veces nos aparecerían por término medio 1,5 caras en cada lanzamiento o dicho de otra forma que si lanzamos tres monedas n veces el número total de caras en los n lanzamientos sería aproximadamente 1,5·n

La Esperanza Matemática de una variable aleatoria continua se define como la integral de los valores de la variable por la Función de Densidad:

$$E[X] \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

Propiedades

1ª La Esperanza de una constante es esa misma constante

$$E[a] = a$$

2ª La Esperanza de una constante por una variable es igual a la constante por la Esperanza de la variable

$$E[a \cdot X] = a \cdot E[X]$$

3ª La Esperanza de una suma es igual a la suma de las Esperanzas

$$E[X+Y] = E[X]+E[Y]$$

Varianza

Una medida de dispersión de las distribuciones de variables aleatorias que es habitualmente utilizada es la Varianza. Se define la Varianza de una variable aleatoria como la Esperanza de los cuadrados de las diferencias a la media

$$Varianza[X] = E\left[\left(X - E[X]\right)^2\right]$$