Estimación Puntual

Estimador y Estimación

Sea una variable aleatoria X que sigue una distribución con Función de Distribución $F(x;\theta)$ y Función de Densidad $f(x;\theta)$. De esa población extraemos una muestra $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ y a partir de esos datos intentamos acotar o conocer el valor del parámetro θ que nos es desconocido. Al proceso de obtener un valor aproximado del parámetro a partir de los datos de la muestra se le llama estimación.

En esta asignatura, nos plantearemos la estimación dentro del *Modelo Paramétrico*, es decir suponiendo que conocemos o podemos suponer la forma de la distribución de la población, y que el elemento desconocido es el parámetro de esa distribución. Por ejemplo, ese sería el caso si consideramos que el C.I. sigue una distribución Normal en una población y extraemos una muestra de esa población para intentar conocer cuanto vale la media de los Cocientes Intelectuales de todos los individuos de esa población. Cuando nos referimos a situaciones caracterizadas por este modelo también decimos que estamos en un esquema de *Inferencia Paramétrica*. En este tema abordaremos el problema de asignar un único valor al parámetro desconocido, lo que se denomina *Estimación Puntual*. En las condiciones enunciadas definimos:

Estimador

Llamaremos estimador del parámetro θ y lo designaremos por $\hat{\theta}$ a cualquier función de los valores de la muestra

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

cuyo valor se asigna al parámetro.

Estimación

Es el valor numérico concreto que toma el estimador para una muestra determinada. Por ejemplo, si en la situación planteada anteriormente decidimos estimar el Cociente Intelectual medio de la población, mediante la semisuma de los valores extremos de la muestra, dicha función sería el estimador:

$$\hat{\theta} = \frac{max\{x_1, x_2, \ldots x_n\} + min\{x_1, x_2, \ldots x_n\}}{2}$$

Si ahora extraemos una muestra y obtenemos las siguientes puntuaciones:

95, 103, 110, 98, 102, 93, 92, 112, 108, 97, 105, 111, 82, 115, 97, 104, 98, 99.

La estimación correspondiente a esa muestra sería:

$$\frac{115 + 82}{2} = 98{,}5$$

Distribución en el muestreo de un estimador

Como hemos definido anteriormente, un estimador es una función de los valores de la muestra, en consecuencia por ser esta un conjunto de n variables aleatorias el estimador también es una variable aleatoria. Reforzando esta idea, también podemos advertir que en general, para cada muestra el estimador proporcionará un valor distinto. Pues bien el conjunto de diferentes valores que puede tomar el estimador, junto con las probabilidades de que tome esos valores, constituye la distribución en el muestreo del estimador.

Propiedades de los estimadores

La definición que se ha dado de estimador es tan general que para estimar un parámetro existen infinitos estimadores potenciales en consecuencia necesitamos criterios que nos permitan seleccionar los estimadores adecuados a una situación dada. Como quiera que los estimadores son variables aleatorias en el muestreo estos criterios harán referencia propiedades de su distribución.

Estimador Insesgado

Se dice que un estimador es insesgado o centrado si la media o esperanza matemática del estimador coincide con el verdadero valor del parámetro. Es decir si:

$$E\left[\hat{\theta}\right] = \theta$$

Se llama sesgo de un estimador a la diferencia entre su media y el verdadero valor:

$$sesgo\left(\hat{\theta}\right) = E\left[\hat{\theta}\right] - \theta$$

Estimador Eficiente

Aunque la propiedad de ser insesgado es deseable, no es un criterio suficiente para seleccionar un estimador, ya que pueden existir estimadores centrados con distribuciones muy diferentes, para complementar la anterior propiedad se introduce el concepto de eficiencia.

Dados dos estimadores de un mismo parámetro $\hat{\theta}_1$ $\hat{\theta}_2$ diremos que $\hat{\theta}_1$ es más eficiente que $\hat{\theta}_2$ si teniendo ambos la misma media, $\hat{\theta}_1$ tiene una varianza menor que $\hat{\theta}_2$. Esta propiedad nos permite decidir entre dos estimadores cual es mas conveniente. En términos absolutos establecemos que:

Se dice que un estimador es eficiente si es insesgado y de mínima varianza.

Obviamente si existe un estimador eficiente éste será el más adecuado, de acuerdo con los criterios tradicionales. Sin embargo, no siempre es posible determinar la existencia de un estimador eficiente.

Métodos de construcción de estimadores

Al igual que hemos señalado en la propiedad anterior, la búsqueda de estimadores que verifiquen unas determinadas propiedades no puede abordarse de forma directa sino que se recurre a procedimientos de determinación de los estimadores en una situación dada. La importancia de estos métodos viene dada por las propiedades que garantizan para los estimadores obtenidos a través de ellos.

En este sentido el Método de los Mínimos Cuadrados, visto en el tema de regresión, proporciona un procedimiento para obtener estimadores de los coeficientes de regresión. Lo importancia de este método viene determinada por el Teorema de Gauss-Markoff que nos indica cuales son las propiedades de esos estimadores.

Teorema de Gauss-Markoff

Si las distribuciones de los residuos del modelo de regresión lineal verifican que su media es cero y tienen una varianza común σ^2 y son incorrelados entre si y con los valores de la variable independiente, entonces los estimadores obtenidos por el método de mínimos cuadrados son los estimadores lineales insesgados de mínima varianza.

Método de Máxima Verosimilitud

Este método es el más ampliamente utilizado para determinar los estimadores más convenientes de los parámetro de una situación dada. Como su propio nombre indica consiste en asignar al parámetro desconocido el valor que hace máxima la función de verosimilitud. Esto es tanto como decir que consideramos como valor del parámetro aquél que hace máxima la probabilidad (densidad de probabilidad en el caso continuo) de la muestra que hemos obtenido.

Con respecto a las propiedades de estos estimadores, de una forma resumida y algo simplificada podemos decir que bajo las condiciones de regularidad de la función de densidad, los estimadores de máxima verosimilitud son consistentes y asintóticamente eficientes. Además la distribución asintótica de estos estimadores es una distribución Normal.

Como vemos las anteriores propiedades son importantes pero referidas a la situación en que el tamaño de la muestra tiende a infinito. De tal forma que estas buenas propiedades solo estarán aseguradas en el caso de muestras grandes, quedando cierta incertidumbre con respecto al comportamiento de los estimadores de Máxima Verosimilitud en el caso de muestras pequeñas. Se sabe que si existe un estimador eficiente este verifica la ecuación de verosimilitud, pero también es cierto que la propiedad recíproca no tiene que ser cierta obligatoriamente.