Geometría de conjuntos convexos

Manuel Mª Ritoré Cortés

Índice general

Presentación 5

Capítulo 1. Introducción 7
1. Conceptos básicos 7
2. Proyección sobre un conjunto convexo 11
3. Dimensión de un conjunto convexo 14
4. Hiperplanos soporte 15
5. Separación 17
6. Envolvente convexa 19
7. Función soporte de un conjunto convexo 21
8. Dualidad 25
9. El Teorema de Helly y una extensión del Teorema de Caratheodory 28
10. Inradio y circunradio. Politopos convexos y poliedros 30

Capítulo 2. La métrica de Hausdorff y el Teorema de selección de Blaschke 31
1. La métrica de Hausdorff 31
2. El Teorema de selección de Blaschke 32
3. Continuidad con respecto a la distancia de Hausdorff 35
4. Aproximación para la distancia de Hausdorff 37

Capítulo 3. La desigualdad isoperimétrica 39
1. Volumen del entorno tubular de un conjunto convexo 39
2. Contenido de Minkowski 42
3. Simetrización de Steiner 43
4. La desigualdad isoperimétrica 46
5. La desigualdad isodiamétrica 48

Bibliografía 51

Presentación

Estas notas son una elaboración de los contenidos de un curso cuatrimestral de seis créditos, impartido por el autor, en el segundo ciclo de la licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Granada durante los cursos académicos 2004-05, 2005-06.

El curso es una introducción a la teoría de conjuntos convexos en el espacio Euclídeo, en el que se intentan resaltar los aspectos geométricos de la teoría. Debido a las limitaciones de tiempo se han seleccionado algunos tópicos, se han descartado otros, y algunos se han tratado de forma breve con objeto de construir un curso coherente. Por ejemplo, la teoría de volúmenes mixtos es interesante para definir medidas de curvatura sobre el borde de un conjunto convexo arbitrario. Nosotros la hemos introducido únicamente para dar una definición rigurosa del área o contenido de Minkowski de un conjunto convexo. Al no existir en la licenciatura un curso posterior que continúe el desarrollo del tema, se proporciona una bibliografía selecta a los alumnos interesados que deseen continuar con el estudio de estos tópicos.

El curso se ha organizado en tres temas.

En el primero se presentan los conceptos básicos de la teoría: definiciones básicas, proyecciones sobre conjuntos convexos, dimensión, separación e hiperplanos soporte, envolvente convexa, función soporte y dualidad, los Teoremas de Helly y Caratheodory, y algunos conceptos geométricos como inradio y circunradio.

En el segundo tema se estudiará la métrica de Hausdorff sobre el espacio de cuerpos convexos. El objetivo es llegar a probar al Teorema de Selección de Blaschke, que se empleará en el siguiente tema para probar la desigualdad isoperimétrica para conjuntos convexos. En este tema también se estudia la continuidad de determinados funcionales, como el volumen, el circunradio y otros, para la distancia de Hausdorff, y algunos resultados de aproximación y densidad en el espacio de cuerpos convexos con la métrica de Hausdorff.

En el último tema se tratará la desigualdad isoperimétrica para conjuntos convexos. En primer lugar se define el contenido de Minkowski o área para conjuntos convexos. A continuación se estudia la simetrización de Steiner y sus propiedades básicas. Por último se demuestra la desigualdad isoperimétrica y, a continuación, la isodiamétrica.

Con respecto a la bibliografía, el curso se basa esencialmente en los libros de Bonnessen-Fenchel [**BF**], Eggleston [**E**], Schneider[**Sch**], Chavel [**Ch**], Burago-Zalgaller [**BZ**].

CAPÍTULO 1

Introducción

1. Conceptos básicos

En estas notas trabajaremos en el espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, el *segmento* que une x e y es el conjunto $[x,y] := \{\lambda x + (1-\lambda)y \; ; \; \lambda \in [0,1]\}$. Diremos que un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}^n$ es *convexo* si para cualquier par de puntos $x, y \in A$, se tiene que $[x,y] \subset A$. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, una función $f : A \to \mathbb{R}$ es *convexa* si se tiene $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$, para todo par de puntos $x, y \in A$, y todo $\lambda \in [0,1]$. Una función f es *cóncava* si $-f$ es una función convexa.

La bola abierta $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ de centro $x \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ es un conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. También lo es la unión de $B(x,r)$ con cualquier subconjunto de la esfera $S(x,r)$. En particular, lo es la bola cerrada $\overline{B}(x,r)$. El epigrafo de una función convexa $f : A \to \mathbb{R}$, definido por $\operatorname{epi}(f) := \{(x,y) \in A \times \mathbb{R} \; ; \; y \geqslant f(x)\}$, es un conjunto convexo de $\mathbb{R}^{n+1}$. En el siguiente resultado se explica como obtener conjuntos convexos a partir de otros dados.

PROPOSICIÓN 1.1.

1. *Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos convexos, entonces $\bigcap_{i\in I} A_i$ es o vacía o convexa.*
2. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación afín, y $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ son conjuntos convexos, entonces $f(A)$ es un conjunto convexo, y $f^{-1}(B)$ es o vacío o convexo.*
3. *Si A, $B \subset \mathbb{R}^n$ son convexos y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $A + B$ y λA son conjuntos convexos.*
4. *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es convexo y λ, $\mu \geqslant 0$, entonces $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.*

DEMOSTRACIÓN. Ejercicio □

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo, y sea $r > 0$. Se define:

$$\mathcal{U}(A,r) := \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; d(x,A) < r\}.$$

Al conjunto $\mathcal{U}(A,r)$ se le denomina *entorno tubular abierto* de A de radio r.

PROPOSICIÓN 1.2. *El conjunto $\mathcal{U}(A,r)$ es convexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $x, y \in \mathcal{U}(A,r)$. Tomamos $a_x, a_y \in A$ tales que $d(x,a_x)$, $d(y,a_y) < r$. Para cualquier $\lambda \in [0,1]$ se consideran los puntos $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, y $a_z = \lambda a_x + (1-\lambda)a_y$. Este último pertenece a A por la convexidad de A. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} d(z, a_z) &= |z - a_z| = |\lambda\,(x - a_x) + (1-\lambda)\,(y - a_y)| \\ &\leqslant \lambda\,|x - a_x| + (1-\lambda)\,|y - a_y| < \lambda r + (1-\lambda)\,r = r, \end{aligned}$$

de modo que $z \in \mathcal{U}(A, r)$. Esto implica la convexidad de $\mathcal{U}(A, r)$. $\square$

Recordemos que $\overline{A} = \{p \in \mathbb{R}^n \,;\, d(p, A) = 0\}$. Entonces se tiene que $\overline{A} = \bigcap_{r>0} \mathcal{U}(A, r)$. De esta igualdad y de las propiedades anteriores se sigue inmediatamente:

COROLARIO 1.3. *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, entonces $\overline{A}$ también es convexo.*

Sean $x, x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$. Diremos que x es *combinación lineal convexa* de $x_1, \ldots, x_k$ si existen escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geqslant 0$ tales que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ y $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$.

Por ejemplo, x es combinación lineal convexa de x_1, x_2 si y sólo si $x \in [x_1, x_2]$. Las posibles combinaciones lineales convexas de tres puntos afínmente independientes forman un triángulo, incluyendo su interior. Las combinaciones lineales convexas de cuatro puntos afínmente independientes forman un tetraedro sólido.

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto no vacío. La *envolvente convexa* de A, $\operatorname{conv}(A)$, es el conjunto de todas las combinaciones lineales convexas que se pueden formar a partir de familias finitas de puntos de A.

Tomando combinaciones convexas de un único elemento tenemos que $A \subset \operatorname{conv}(A)$. Si $A \subset B$, se tiene que $\operatorname{conv}(A) \subset \operatorname{conv}(B)$.

TEOREMA 1.4. *Se verifica:*

1. *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es convexo, entonces $A = \operatorname{conv}(A)$.*
2. $\operatorname{conv}(A)$ *es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A. En particular,* $\operatorname{conv}(A)$ *es un conjunto convexo.*
3. *Sean $A, \subset \mathbb{R}^n$ arbitrarios. Entonces:*

$$\operatorname{conv}(A) + \operatorname{conv}(B) = \operatorname{conv}(A + B).$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos el primer apartado. Como siempre se tiene que $A \subset \operatorname{conv}(A)$, basta probar la inclusión opuesta. Sea $x \in \operatorname{conv}(A)$. Sabemos que x es combinación lineal convexa de k puntos de A. Si $k = 2$, entonces x pertenece a un segmento de extremos en A y, por tanto, $x \in A$ por ser A convexo. Supongamos por inducción que todo punto que sea combinación lineal convexa de menos de k puntos de A pertenece a A, y que $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$, con $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geqslant 0$. Podemos suponer que $\lambda_k \neq 0, 1$. Entonces:

$$x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k = (1 - \lambda_k)\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_k}\,x_1 + \ldots + \frac{\lambda_{k-1}}{1-\lambda_k}\,x_{k-1}\right) + \lambda_k x_k.$$

El punto definido entre paréntesis es combinación lineal convexa de menos de k puntos de A y, por tanto, pertenece a A por hipótesis de inducción. En consecuencia, $x \in A$ por ser combinación lineal convexa de dos puntos de A.

Veamos ahora el segundo apartado. Es fácil comprobar que $\operatorname{conv}(A)$ es un conjunto convexo, pues una combinación convexa de dos puntos de $\operatorname{conv}(A)$ es de nuevo un punto de la forma $\sum_{i=1}^{k} \rho_i x_i$, con $\sum_{i=1}^{k} \rho_i = 1$, $\rho_i \geqslant 0$, $x_i \in A$. Definimos:

$$D(A) := \bigcap \{C \,;\, C \text{ convexo}, A \subset C\}.$$

Como $\operatorname{conv}(A)$ es un conjunto convexo que contiene a A, se tiene que $D(A) \subset \operatorname{conv}(A)$. Para probar la inclusión opuesta, sea C un conjunto convexo arbitrario tal que $A \subset C$. Entonces $\operatorname{conv}(A) \subset \operatorname{conv}(C) = C$ y, por ser C arbitrario, $\operatorname{conv}(A) \subset D(A)$.

Veamos el último apartado. Sea $x \in \operatorname{conv}(A+B)$. Existen entonces $a_i \in A$, $b_i \in B$, para $i = 1, \ldots, k$, y $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geqslant 0$ con $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ tales que:

$$x = \lambda_1(a_1 + b_1) + \ldots + \lambda_k(a_k + b_k) = (\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k) + (\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_k b_k).$$

Basta tener en cuenta que los dos últimos puntos pertenecen a $\operatorname{conv}(A)$ y a $\operatorname{conv}(B)$ para concluir que $x \in \operatorname{conv}(A) + \operatorname{conv}(B)$. Sea ahora $z \in \operatorname{conv}(A) + \operatorname{conv}(B)$. Existen $a_1, \ldots, a_k \in A$, $b_1, \ldots, b_k \in B$, λ_i, $\mu_i \geqslant 0$, con $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1$, de modo que:

$$\begin{aligned} z &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{k} \mu_i b_i = \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{k} \mu_i \Big) \Big(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j \Big) + \Big(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \Big) \Big(\sum_{j=1}^{k} \mu_j b_j \Big) \\ &= \sum_{i=1,j=1}^{k} \lambda_i \mu_j (a_i + b_j). \end{aligned}$$

Como $a_i + b_j \in A + B$, $\lambda_i \mu_j \geqslant 0$ y $\sum_{i,j} \lambda_i \mu_j = \sum_i \sum_j \lambda_i \mu_j = 1$, se tiene que $z \in \operatorname{conv}(A+B)$, lo que prueba el resultado. $\square$

Probamos ahora el Teorema de Caratheodory, que demuestra que todo punto de $\operatorname{conv}(A)$ es combinación lineal convexa de menos de $n+1$ puntos de A.

TEOREMA 1.5 (Caratheodory). *Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \operatorname{conv}(A)$. Entonces x es combinación lineal convexa de una colección de puntos afínmente independientes de A.*

En particular, x es combinación lineal convexa de, a lo sumo, $n+1$ puntos de A.

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que existen $x_1, \ldots, x_k \in A$, $\lambda_i, \ldots, \lambda_k \geqslant 0$ con $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ tales que $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$. Podemos elegir dicha combinación de modo que k sea lo menor posible. Esto implica que $\lambda_i > 0$ para todo i.

Razonamos por contradicción. Supongamos que $x_1, \ldots, x_k$ *no* son afínmente independientes. Existen entonces $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ no todos nulos, tales que:

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0.$$

Supongamos que $\lambda_k / \alpha_k = \text{mín}\{\lambda_i / \alpha_i ; \alpha_i > 0\}$. Entonces:

$$x = \sum_{i=1}^{k-1} \left(\lambda_i - \frac{\lambda_k}{\alpha_k}\, \alpha_i \right) x_i,$$

ya que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0$. Por una parte tenemos que $\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i - (\lambda_k/\alpha_k)\,\alpha_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i - (\lambda_k/\alpha_k)\,\alpha_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. Por otra parte, por la elección de λ_k/α_k siempre se tiene que $\lambda_i - (\lambda_k/\alpha_k)\,\alpha_i \geqslant 0$. Por tanto x es combinación lineal convexa de, a lo sumo, $k-1$ puntos de A. Esto contradice la elección de k como el menor número posible de puntos de A para los que existe una combinación lineal convexa igual a x. □

LEMA 1.6. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, $x \in \operatorname{int}(A)$, $y \in \overline{A}$. Entonces $[x,y) := [x,y] - \{y\} \subset \operatorname{int}(A)$.*

DEMOSTRACIÓN. Distinguiremos dos casos. Supongamos en primer lugar que $y \in A$. Sea $z \in [x,y)$, y sea $\lambda \in (0,1]$ tal que $z = (1-\lambda)\,y + \lambda x$. Como x es punto interior de A, existe $\rho > 0$ tal que $B(x,\rho) \subset A$. Veamos que $B(z,\lambda\rho) \subset A$. Tomamos $w \in B(z,\lambda\rho)$. Se tiene que $w = z + \lambda u$, con $u \in B(0,\rho)$. Observamos que:

$$w = (1-\lambda)\,y + \lambda x + \lambda u = (1-\lambda)\,y + \lambda\,(x+u)$$

y, como $x + u \in B(x,\rho) \subset A$. Por ser A convexo, se tiene que $w \in A$. De esta forma se tiene que $B(z,\lambda\rho) \subset A$ y $z \in \operatorname{int}(A)$.

Supongamos que $y \in \overline{A} - A$. Veamos que $[x,y) \subset A$. En tal caso, por la primera parte de la demostración, se tendría que $[x,y) \subset \operatorname{int}(A)$. Sea $z \in (x,y)$, y sea $\lambda \in (0,1)$ con $z = (1-\lambda)\,y + \lambda x$. Sea $\rho > 0$ tal que $B(x,\rho) \subset A$. Consideramos $B(y,\lambda(1-\lambda)^{-1}\rho)$. Por ser y un punto adherente de A, existe $a \in A \cap B(y,\lambda(1-\lambda)^{-1}\rho)$. Se tiene entonces que $a = y + \lambda(1-\lambda)^{-1}\,u$, con $u \in B(0,\rho)$. Entonces:

$$z = (1-\lambda)\,y + \lambda x = (1-\lambda)\,a + \lambda\,(x-u) \in A,$$

ya que $x - u \in B(x,\rho) \subset A$ y A es convexo. Como z es arbitrario, esto prueba el resultado. □

Resumimos unas propiedades generales de los conjuntos convexos en el siguiente resultado. Algunas de ellas se obtienen del lema anterior.

TEOREMA 1.7.

1. *Si A es convexo, entonces* $\operatorname{int}(A)$, $\overline{A}$ *son convexos* (*si* $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$).
2. *Si A es abierto,* $\operatorname{conv}(A)$ *es abierta.*
3. *Si A es acotado, entonces* $\operatorname{conv}(A)$ *es acotada.*
4. *Si A es compacto, entonces* $\operatorname{conv}(A)$ *es compacto.*
5. *Si A es un conjunto convexo de interior no vacío, entonces:*

$$\operatorname{int}(A) = \operatorname{int}(\overline{A}), \qquad \overline{\operatorname{int}(A)} = \overline{A}.$$

DEMOSTRACIÓN. En el primer apartado, el hecho de que $\operatorname{int}(A)$ sea convexo si A lo es se sigue del lema anterior. Que $\overline{A}$ sea cerrado ya se ha demostrado.

Para el segundo apartado, sea A abierto. Si $z \in \operatorname{conv}(A)$, existen $x_1, \ldots, x_k \in A$, $\lambda_i \geqslant 0$ con $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ tales que $z = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$. Como A es abierto, existe $r > 0$ tal que $B(x_i,r) \subset A$ para todo i. Veamos que $B(z,r) \subset \operatorname{conv}(A)$. Sea $y \in B(z,r)$.

Entonces $y = z + u$, con $u \in B(0,r)$. Observemos que:

$$\begin{aligned} y = z + u &= \big(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k\big) + \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\right) u \\ &= \lambda_1(x_1 + u) + \ldots + \lambda_k(x_k + u) \in A. \end{aligned}$$

Como y es arbitrario obtenemos que $B(z,r) \subset \mathrm{conv}(A)$. Por tanto, $\mathrm{conv}(A)$ es abierto. Observemos que acabamos de demostrar que:

$$B(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k, r) \subset \lambda_1 B(x_1, r) + \ldots + \lambda_k B(x_k, r).$$

Para el tercer apartado, si A es acotado, existe una bola $B(0,r)$ que contiene a A. Se tiene entonces que $\mathrm{conv}(A) \subset B(0,r)$.

Para el cuarto apartado, usaremos el Teorema de Caratheodory. Sea:

$$\Delta := \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})\ ;\ \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto, consideramos la aplicación $f : \Delta \times A^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ dada por:

$$\big((\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}), x_1, \ldots, x_{n+1}\big) \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i.$$

La aplicación f es continua y, por el Teorema de Caratheodory, su imagen es la envolvente convexa de A. Como $\Delta \times A^{n+1}$ es compacto, concluimos que $\mathrm{conv}(A)$ es un conjunto compacto.

Probamos por último el quinto apartado. Para la segunda igualdad, siempre se tiene que $\overline{\mathrm{int}(A)} \subset \overline{A}$. Veamos la inclusión opuesta. Sea $z \in \overline{A}$ y sea $x_0 \in \mathrm{int}(A)$. Sabemos que $[z, x_0) \subset \mathrm{int}(A)$. Por tanto, z el límite de puntos de $\mathrm{int}(A)$. Luego $z \in \overline{\mathrm{int}(A)}$. Para la primera igualdad, siempre se tiene que $\mathrm{int}(A) \subset \mathrm{int}(\overline{A})$. Para probar la inclusión opuesta, se toma $z \in \mathrm{int}(\overline{A})$ un punto distinto de x_0. Existe entonces $r > 0$ tal que $B(z,r) \subset \overline{A}$. Sea $x_0 \in \mathrm{int}(A)$. Consideramos el punto $w := z + (r/2)(z - x_0)/|z - x_0|$. Observamos que $w \in B(z,r) \subset \overline{A}$ y $z \in [x_0, w)$. Como $x_0 \in \mathrm{int}(A)$ y $w \in \overline{A}$ obtenemos que $z \in \mathrm{int}(A)$ ya que $[x_0, w) \subset \mathrm{int}(A)$. □

En general no es cierto que si A es cerrado, la envolvente convexa de A sea un conjunto cerrado. Se puede tomar como A la unión de una recta y un punto exterior o, por ejemplo, se puede tomar $A = \{(\pm n, 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$.

2. Proyección sobre un conjunto convexo

En todo este apartado supondremos que A es un conjunto convexo cerrado.

PROPOSICIÓN 1.8. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo cerrado. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, existe un único punto $p_A(x) \in A$ tal que $d(x, p_A(x)) = d(x, A)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $r > 0$ tal que $\overline{B}(x,r) \cap A$ es un conjunto compacto no vacío. La función $d_x(z) := d(x,z)$ es continua y alcanza un mínimo en dicho conjunto compacto. Existe $z \in \overline{B}(x,r) \cap A$ tal que $d(z,x) \leqslant d(x,y)$ para cualquier

$y \in \overline{B}(x,r) \cap A$. Se tiene entonces que z es el mínimo de la función d_x en A, ya que si $y \in A - \overline{B}(x,r)$, entonces $d(x,y) > r \geqslant d(x,z)$.

Para ver la unicidad, supongamos que existen z_1, $z_2 \in A$ tales que $d(z_1,x) = d(z_2,x) = d(x,A)$. El punto medio z de z_1 y z_2 pertenece a A por la convexidad de A. Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}\left\langle z_1 - z_2, x - \frac{1}{2}(z_1+z_2)\right\rangle &= \frac{1}{2}\left\langle (x-z_2)-(x-z_1), (x-z_1)+(x-z_2)\right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\left(|x-z_1|^2 - |x-z_2|^2\right) = 0,\end{aligned}$$

ya que $d(x,z_1) = d(x,z_2)$. Por el Teorema de Pitágoras:

$$|x-z|^2 + |z-z_2|^2 = |x-z_2|^2,$$

de modo que:

$$|x-z|^2 \leqslant |x-z_2|^2,$$

y la igualdad se da si y sólo si $z = z_2$, lo que implica que $z_1 = z_2$. □

Dado un conjunto convexo cerrado A, definimos la aplicación $p_A : \mathbb{R}^n \to A$ como la que asocia a cada punto $x \in \mathbb{R}^n$ el único punto de A que está a mínima distancia de x. A la aplicación p_A se le llama proyección métrica sobre A. Es trivial comprobar que $p_A(x) \in \partial A$ para todo $x \in \mathbb{R}^n - A$.

La proyección métrica verifica por definición que $d(x, p_A(x)) = d(x,A)$.

PROPOSICIÓN 1.9 (Propiedades de la proyección métrica).

1. *$x \in A$ si y sólo si $p_A(x) = x$.*
2. *$d(p_A(x), p_A(y)) \leqslant d(x,y)$. Es decir, p_A es Lipschitziana.*

DEMOSTRACIÓN. La primera propiedad se verifica por ser A cerrado: $x \in A$ si y sólo si $d(x,A) = 0$.

Para probar la segunda propiedad, podemos suponer que $p_A(x) \neq p_A(y)$. Sea $u := p_A(x) - p_A(y)$. Consideramos los hiperplanos H_x, H_y que pasan por $p_A(x)$, $p_A(y)$, respectivamente, ortogonales a u. Los puntos x e y no pueden estar en la banda determinada por los hiperplanos H_x, H_y. En tal caso, se proyectarían a puntos del segmento $[p_A(x), p_A(y)] \subset A$, que estarían a menor distancia de las correspondientes proyecciones. Tenemos entonces que $d(x,y) \geqslant d(H_x,H_y) = d(p_A(x), p_A(y))$. □

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto convexo y cerrado. Sea $x \in \mathbb{R}^n - A$. Definimos:

$$u_A(x) := \frac{x - p_A(x)}{|x - p_A(x)|},$$

y la semirrecta:

$$R_A(x) = \{p_A(x) + \lambda u_A(x) : \lambda \geqslant 0\}.$$

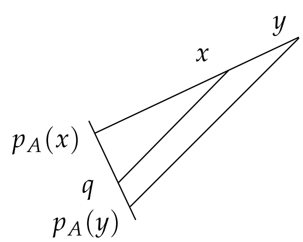
LEMA 1.10. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto convexo y cerrado, $x \notin A$, $y \in R_A(x)$. Entonces $p_A(x) = p_A(y)$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos en primer lugar que $y \in [p_A(x), x]$. Entonces:

$d(x, p_A(y)) \leqslant d(x,y) + d(y, p_A(y)) \leqslant d(x,y) + d(y, p_A(x)) = d(x, p_A(x))$.

De la definición de $p_A(x)$ se tiene que $p_A(x) = p_A(y)$.

Supongamos en por último que $y \notin [x, p_A(x)]$, es decir, que $x \in [p_A(x), y]$. Podemos encontrar $q \in [p_A(x), p_A(y)]$ de modo que la recta qx sea paralela a la recta $p_A(y)y$. Observamos que existe una homotecia de centro $p_A(x)$ que lleva q en $p_A(y)$ y x en y. Dicha homotecia preserva la razón de las longitudes de los



segmentos $[y, p_A(x)]$, $[x, p_A(x)]$ y $[y, p_A(y)]$, $[x, q]$. Se tiene entonces:

$$\frac{d(y, p_A(x))}{d(x, p_A(x))} = \frac{d(y, p_A(y))}{d(x,q)},$$

de donde se obtiene:

$$d(x,q) = d(x, p_A(x))\,\frac{d(y, p_A(y))}{d(y, p_A(x))} \leqslant d(x, p_A(x)),$$

ya que $d(y, p_A(y)) \leqslant d(y, p_A(x))$. La desigualdad estricta no puede darse en la anterior desigualdad por la definición de $p_A(x)$. Tenemos entonces que $p_A(x) = p_A(y)$. □

LEMA 1.11. *Sea S una esfera que contiene a un conjunto convexo y cerrado A en su interior. Entonces $p_A(S) = \partial A$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $x \in S$ es tal que $p_A(x) \in \text{int}(A)$, entonces existe $r > 0$ tal que $B(p_A(x), r) \subset A$. En tal caso, podemos encontrar $z \in B(p_A(x), r)$ que está a menor distancia de x que $p_A(x)$, lo que es imposible. Esto demuestra que $p_A(S) \subset \partial A$.

Sea $x \in \partial A$. Llamamos B a la bola cuya frontera es S. Existe $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset B - A$ tal que $d(x_i, x) < 1/i$. Entonces

$$d(p_A(x_i, x) = d(p_A(x_i), p_A(x)) \leqslant d(x_i, x) < \frac{1}{i}.$$

Tomamos la semirrecta $R_A(x_i)$. Para cada i, la intersección $R_A(x_i)$ es un único punto z_i. Como S es compacta, existe una subsucesión de $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ que converge a un punto $z \in S$. Por la continuidad de p_A se tiene que $p_A(z) = x$. □

TEOREMA 1.12. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo compacto con interior no vacío. Entonces ∂A es homeomorfo a una esfera.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x_0 \in \operatorname{int}(A)$. Existe $r > 0$ tal que $\overline{B}(x_0, r) \subset \operatorname{int}(A)$. Sea $S := \partial\overline{B}(x_0, r)$. Consideramos $p_{\overline{B}} : \partial A \to S$. Dicha aplicación es continua.

Veamos que es sobreyectiva. Tomamos $z \in S$, y sea $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{int}(A) - \overline{B}$ tales que $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}} \to z$. Por la elección de los puntos de la sucesión, $p_{\overline{B}}(z_i) \neq z_i$ para todo i. Podemos considerar las semirrectas:

$$R(z_i) = \{p_{\overline{B}}(z_i) + \lambda u_{\overline{B}}(z_i);\ \lambda \geqslant 0\}.$$

Para cada i, la semirrecta $R(z_i)$ corta a ∂A en un único punto w_i. La sucesión $\{w_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ está contenida en el conjunto compacto ∂A. Podemos extraer una subsucesión convergente a un punto $w \in \partial A$. Por la continuidad de la proyección, $p_{\overline{B}}(w) = z$, lo que demuestra que $p_{\overline{B}}$ es sobreyectiva.

Para comprobar que $p_{\overline{B}}$ es inyectiva sólo hay que tener en cuenta que si z, $z' \in \partial A$ tienen la misma imagen por $p_{\overline{B}}$, están en la misma semirrecta, lo cual es imposible.

Como la aplicación $p_{\overline{B}}$ es cerrada por ser ∂A compacto y S Hausdorff, concluimos que es un homeomorfismo. □

Observamos que la aplicación inversa de $p_{\overline{B}} : \partial A \to S$ es la que a cada $z \in S$ le asocia el único punto de corte de la semirrecta $\{x_0 + \lambda\,(z - x_0);\ \lambda \geqslant 0\}$ con ∂A.

COROLARIO 1.13. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo compacto con interior no vacío. Entonces A es homeomorfo a una bola cerrada.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $p_0 \in \operatorname{int}(A)$, $r > 0$ tal que $\overline{B}(p_0, r) \subset \operatorname{int}(A)$. Sea $f : S \to \partial A$ la inversa de la aplicación $p_{\overline{B}} : \partial A \to S$. Sabemos que $f(z)$ es el único punto de intersección de $\{x_0 + \lambda\,(z - x_0);\ \lambda \geqslant 0\}$ con ∂A.

Construimos ahora una aplicación $g : \overline{B}(x_0, r) \to A$ de manera que el segmento $[0, u]$, si $u \in \partial\overline{B}$, se transforme linealmente en el segmento $[x_0, f(u)]$. Definimos $g(x_0) = x_0$ y:

$$g(x) := x_0 + |x - x_0|\,\frac{1}{r}\,d\left(f\left(x_0 + r\,\frac{x - x_0}{|x - x_0|}, x_0\right)\right)\frac{x - x_0}{|x - x_0|}.$$

Es fácil comprobar que la aplicación así definida es un homeomorfismo. □

Para terminar esta sección enunciamos sin demostración el siguiente resultado:

TEOREMA 1.14. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto cerrado tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, existe un único punto de A que está a mínima distancia de x. Entonces A es convexo.*

3. Dimensión de un conjunto convexo

Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, denotaremos por $\operatorname{aff}(A)$ al menor subespacio afín de $\mathbb{R}^n$ que contiene a A. La dimensión de A, $\dim(A)$, es la dimensión de $\operatorname{aff}(A)$. Llamaremos interior relativo de A, $\operatorname{rel\,int}(A)$, al interior de A en $\operatorname{aff}(A)$. La frontera relativa de A, $\operatorname{rel\,fr}(A)$, es la frontera de A en $\operatorname{aff}(A)$. Como $\operatorname{aff}(A)$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$, la clausura relativa de A coincide con la clausura de A en $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 1.15. *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo, entonces* $\operatorname{rel\,int}(A) \neq \emptyset$.

LEMA 1.16. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Se tiene que* $\dim(A)$ *es el mayor entero no negativo r tal que existen r puntos $x_1, \ldots, x_r \in A$ afínmente independientes.*

Si $x_1, \ldots, x_r$ son generadores afines de $\operatorname{aff}(A)$*, entonces todo $x \in \operatorname{aff}(A)$ se puede escribir como:*

$$x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i, \qquad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1.$$

Si además los puntos $x_1, \ldots, x_r$ son afínmente independientes, entonces se tiene que los escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ son únicos.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA. Sean $x_1, \ldots, x_r \in A$ puntos afínmente independientes que generan $\operatorname{aff}(A)$. Sabemos que todo $x \in \operatorname{aff}(A)$ se escribe de forma única como $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i$, con $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$. En general, $\lambda_i = \lambda_i(x)$ son las coordenadas afines de x. Observemos que $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_r(x)$ son funciones continuas de x (se obtienen resolviendo un sistema lineal).

El punto $x_0 := (x_1 + \ldots + x_r)/r \in A$ por ser A convexo. Como $\lambda_i(x)$ son funciones continuas de x y $\lambda_i(x_0) = 1/r$, existe $\rho > 0$ tal que si $x \in B(x_0, \rho) \cap \operatorname{aff}(A)$, entonces $\lambda_i(x_0) > 0$ (y $\lambda_1(x) + \ldots + \lambda_r(x) = 1$). Cada $x \in B(x_0, \rho) \cap \operatorname{aff}(A)$ pertenece entonces a A. Por tanto $B(x_0, \rho) \cap \operatorname{aff}(A) \subset A$. Concluimos que x_0 es un punto interior de A en $\operatorname{aff}(A)$ y, por tanto, $\operatorname{rel\,int}(A) \neq \emptyset$. $\square$

PROPOSICIÓN 1.17. *Sean $x_1, \ldots, x_r$ puntos afínmente independientes de $\mathbb{R}^n$. Entonces:*

$$\operatorname{rel\,int}(\operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_r\}) = \Big\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i,\ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1,\ \lambda_i > 0 \Big\}$$

COROLARIO 1.18. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Entonces:*

1. $\operatorname{rel\,int}(A) = \operatorname{rel\,int}(\overline{A})$.
2. $\overline{\operatorname{rel\,int} A} = \overline{A}$.

4. Hiperplanos soporte

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, $H \subset \mathbb{R}^n$ un hiperplano, y H^+, H^- los subespacios cerrados que determina H. Diremos que H es un *hiperplano soporte* de A en $x_0 \in A$ (o bien que H *soporta* a A en x_0 si $x_0 \in A \cap H$, y $A \subset H^+$ o bien $A \subset H^-$. Diremos que H es hiperplano soporte de A si existe $x_0 \in A$ tal que H soporta a A en x_0. Si H es hiperplano soporte de A en x_0 y $A \subset H^-$, diremos que H^- es un *semiespacio soporte* de A. Sea $H_{u,\alpha} := \{x \in \mathbb{R}^n;\ \langle x, u \rangle = \alpha\}$, donde $u \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, y sea $H^-_{u,\alpha} := \{x \in \mathbb{R}^n;\ \langle x, u \rangle \leqslant \alpha\}$. Si H es un hiperplano soporte de A en x_0 y $A \subset H^-_{u,\alpha}$, diremos que u es un vector normal exterior a A en x_0.

LEMA 1.19. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo y cerrado. Sea $x \in \mathbb{R}^n - A$. El hiperplano H que pasa por $p_A(x)$ ortogonal a $u_A(x)$ es un hiperplano soporte de A en $p_A(x)$.*

Además, $u_A(x)$ es un vector normal exterior a A en $p_A(x)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $H := p_A(x) + L(u_A(x))^{\perp}$, donde $L(u_A(x)) = \{\lambda u_A(x);\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. Podemos escribir:

$$H = \{y \in \mathbb{R}^n;\ \langle y - p_A(x), u_A(x) \rangle = 0\}.$$

Llamamos $H^- = \{y \in \mathbb{R}^n;\ \langle y - p_A(x), u_A(x)\rangle \leqslant 0\}$. Veamos que $A \subset H^-$. Supongamos que esto no es cierto, y que existe $z \in A$ tal que $\langle z - p_A(x), u_A(x)\rangle > 0$. Sea $z_t := p_A(x) + t\,(z - p_A(x))$. Definimos:

$$f(t) := d^2(x, z_t).$$

Observamos que:

$$f'(0) = -2\,\langle d(x,A)\,u_A(x), z - p_A(x)\rangle < 0.$$

Entonces f es estrictamente decreciente en 0. Por tanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$d^2(x, p_A(x)) > d^2(x, z_t),$$

para $z \in (0, \varepsilon)$ y $z_t \in A$, lo que nos da una contradicción. □

COROLARIO 1.20. *Todo subconjunto convexo y cerrado A es la intersección de sus semiespacios soporte.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de los semiespacios soporte de A. Se tiene que $A \subset \bigcap_{S\in\mathcal{S}} S$. Si $x \in \bigcap_{S\in\mathcal{S}} S$ pero $x \notin A$ llegamos a contradicción pues en dicho caso existe un semiespacio soporte de A que no contiene a x. □

TEOREMA 1.21. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo y cerrado. Para cada $x \in \partial A$, existe un hiperplano soporte de A en x.*

Si A es acotado, entonces para cada $u \in\in \mathbb{R}^n - \{0\}$, existe un hiperplano soporte a A con vector normal exterior u.

En general, si A no es acotado, la segunda afirmación no es cierta. Basta considerar el conjunto $A = \{(x,y,z);\ z \geqslant x^2 + y^2\}$, acotado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$. El conjunto de los vectores $u \in \mathbb{S}^2$ para los que existe un hiperplano soporte con vector normal exterior u el la semiesfera abierta $\{u \in \mathbb{S}^2;\ \langle u, (0,0,1)\rangle < 0\}$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos en primer lugar que A es acotado. Existe entonces una esfera S que contiene a A en su interior tal que $p_A(S) = \partial A$. Si $z \in \partial A$, existe entonces $x \in S$ tal que $z = p_A(x)$. El lema anterior nos garantiza entonces que $H = p_A(x) + L(u_A(x))^\perp$ es un hiperplano soporte de A en $z = p_A(x)$. Esto prueba la primera parte del enunciado cuando A es acotado.

Supongamos ahora que A no es acotado. Dado $x \in \partial A$, consideramos el conjunto convexo cerrado y acotado $A \cap \overline{B}(x,1)$. Se tiene que $x \in \partial(A \cap \overline{B}(x,1))$. Por la primera parte de la demostración, existe un hiperplano soporte H de $A \cap \overline{B}(x,1)$ en x. Veamos que H es hiperplano soporte de A en x. Sea H^- es el subespacio cerrado determinado por H que contiene a $A \cap \overline{B}(x,1)$. Si existiera $z \in A - H^-$, entonces $(x,z] \subset \mathbb{R}^n - H^-$ puesto que $x \in H = \partial H^-$. Pero claramente $(x,z] \cap (A \cap \overline{B}(x,1)) \neq \emptyset$, ya que $x, z \in A$. Como $A \cap \overline{B}(x,1) \subset H^-$, esto contradice que $(x,z] \subset \mathbb{R}^n - H^-$. Esto concluye la demostración de la primera parte del enunciado.

Para probar la segunda parte, suponemos que A es acotado. Tomamos $u \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, y consideramos la función continua $f_u(x) := \langle x, u\rangle$. Como A es compacto, f_u alcanza un máximo absoluto α_0 en $x_0 \in A$. Es decir, $\langle x, u\rangle \leqslant \langle x_0, u\rangle = \alpha_0$ para todo $x \in A$. Sea ahora $H_{u,\alpha_0} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \langle x, u\rangle \leqslant \alpha_0\}$. Por la definición de α_0, se tiene que $A \subset H^-_{u,\alpha_0}$. En consecuencia, H_{u,α_0} es un hiperplano soporte de $x_0 \in A$ y u es un vector normal exterior a A en x_0. □

Si $\operatorname{int}(A) = \emptyset$, entonces $\dim(A) < n$ y A está contenido en un hiperplano que es hiperplano soporte de cualquiera de los puntos de A. Una última observación elemental es que por un punto interior a A no puede pasar ningún hiperplano soporte.

TEOREMA 1.22. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado con $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$ tal que, para cada punto de ∂A, existe un hiperplano soporte de A. Entonces A es convexo.*

En caso de que $\operatorname{int}(A) = \emptyset$ no es cierto el teorema. Para obtener un contraejemplo basta tomar como A un subconjunto no convexo contenido en un hiperplano.

DEMOSTRACIÓN. Si A no es convexo, existen $x, y \in A$ de modo que existe $z \in [x, y] - A$. Tomamos $a \in \operatorname{int}(A)$. El segmento (a, z) contiene un punto $b \in \partial A$. Sea H un hiperplano soporte de A en b, y sea H^- el semiespacio determinado por H que contiene a A.

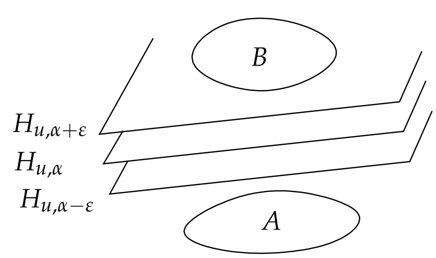
Se tiene que $a \notin H$ ($a \in \operatorname{int}(A)$). Como $a \in H^- - H$ y $b \in H$, la recta que pasa por a y por b corta transversalmente a H. Por tanto, $z \notin H^-$.

Por otro lado, como $x, y \in A \subset H^-$ y H^- es convexo, $[x, y] \subset H^-$, de donde $z \in H^-$. Esta contradicción demuestra el resultado. □

Observemos que, dado A acotado, *no* necesariamente convexo, para cada $u \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, hay un hiperplano soporte de vector normal exterior u. Basta tomar el máximo de la función $f_u(x) = \langle x, u \rangle$. Lo que no es cierto es que para cada punto de ∂A exista un hiperplano soporte.

5. Separación

Dados A, $B \subset \mathbb{R}^n$, y $H \subset \mathbb{R}^n$ hiperplano, diremos que A y B están *separados* por H (o bien que H *separa* a A y a B si $A \subset H^+$ y $B \subset H^-$, donde H^+, H^- son los semiespacios cerrados determinados por H. Diremos que A y B están *estrictamente separados* por H (o bien que H *separa* estrictamente a A y a B) si $A \subset \operatorname{int}(H^+)$, $B \subset \operatorname{int}(H^-)$. Diremos que A y B están *separados fuertemente* por $H = H_{u,\alpha}$ (o bien que H *separa fuertemente* a A y a B) si existe $\varepsilon > 0$ tal que $A \subset H^-_{u,\alpha-\varepsilon}$, $B \subset H^+_{u,\alpha+\varepsilon}$.



Es fácil dar ejemplos de estas definiciones.

TEOREMA 1.23. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo, $x \in \mathbb{R}^n - A$. Entonces A y $\{x\}$ se pueden separar por un hiperplano. Además, si A es cerrado, A y $\{x\}$ se pueden separar fuertemente por un hiperplano.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos en primer lugar que A es cerrado. Dado $x \in \mathbb{R}^n - A$, sabemos que $p_A(x) + L(u_A(x))^\perp$ es un hiperplano soporte de A en $p_A(x)$. Entonces es claro que el hiperplano:

$$H := \frac{x + p_A(x)}{2} + L(u_A(x))^\perp$$

separa fuertemente a $\{x\}$ y a A tomando $\varepsilon = d(x, A)/2$.

Supongamos ahora que A es arbitrario, no necesariamente cerrado, y que $x \notin A$. Si $x \notin \overline{A}$, utilizamos la primera parte de la demostración para concluir que existe un hiperplano H que separa fuertemente a $\overline{A}$ y a $\{x\}$. Dicho hiperplano separa fuertemente A y $\{x\}$. Si $x \in \overline{A}$, entonces $x \in \partial A$. Existe entonces un hiperplano soporte H de $\overline{A}$ en x, que separa a A de x, ya que $A \subset H^-$ y $x \in H \subset H^+$. □

LEMA 1.24. *Sean A, $B \subset \mathbb{R}^n$ no vacíos. Entonces A y B se pueden separar (fuertemente) si y sólo si $A - B$ y $\{0\}$ se pueden separar (fuertemente).*

El lema anterior no es cierto para la separación estricta.

DEMOSTRACIÓN. La haremos sólo para la separación fuerte. Para la separación simple basta tomar $\varepsilon = 0$ en lo que sigue.

Supongamos que A y B se pueden separar fuertemente. Existen entonces $u \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ tales que $A \subset H^-_{u,\alpha-\varepsilon}$, $B \subset H_{u,\alpha+\varepsilon}$. Si $a \in A$, $b \in B$ esto significa que:

$$\langle a, u \rangle \leqslant \alpha - \varepsilon, \qquad \langle b, u \rangle \geqslant \alpha + \varepsilon.$$

Si $x \in A - B$, entonces $x = a - b$, para $a \in A$, $b \in B$. Por tanto:

$$\langle x, u \rangle = \langle a, u \rangle - \langle b, u \rangle \leqslant (\alpha - \varepsilon) - (\alpha + \varepsilon) = -2\varepsilon.$$

Entonces el hiperplano $H_{u,-\varepsilon}$ separa fuertemente a $A - B$ y $\{0\}$, ya que $A - B \subset H_{u,-\varepsilon-\varepsilon} = H_{u,-2\varepsilon}$ y $0 \in H^+_{u,0} = H^+_{u,-\varepsilon+\varepsilon}$.

Recíprocamente, supongamos ahora que $A - B$ y $\{0\}$ se pueden separar fuertemente mediante un hiperplano $H_{u,\tilde{\alpha}}$. Existe entonces $\varepsilon > 0$ de manera que $\langle x, u \rangle \leqslant \tilde{\alpha} - \varepsilon$ para todo $x \in A - B$, y $\langle 0, u \rangle \geqslant \tilde{\alpha} + \varepsilon$.

Llamemos $-2\delta = \tilde{\alpha} - \varepsilon$. Entonces se tiene que $\langle x, u \rangle \leqslant -2\delta$ para $x \in A - B$. Sean ahora $\alpha := \sup_{a \in A} \langle a, u \rangle$, $\beta := \text{ínf}_{b \in B} \langle b, u \rangle$. Dado $x \in A - B$, podemos escribir $x = a - b$, con $a \in A$, $b \in B$. Entonces obtenemos:

$$\langle a, u \rangle - \langle b, u \rangle = \langle x, u \rangle \leqslant -2\delta.$$

Tomando supremo cuando $a \in A$, e ínfimo cuando $b \in B$ obtenemos que ambos son finitos y además que $\beta - \alpha \geqslant 2\delta > 0$. Por tanto:

$$A \subset H^-_{u,\frac{\alpha+\beta}{2}-\delta}, \qquad B \subset H^+_{u,\frac{\alpha+\beta}{2}+\delta},$$

y, por tanto, A y B se pueden separar fuertemente. □

Algunas propiedades sencillas de la diferencia de conjuntos son las siguientes: ya sabemos que si A y B son convexos, entonces $A - B$ es un conjunto convexo. Si A es compacto y B es cerrado, entonces $A - B$ es cerrado (esta propiedad no es cierta si A y B son únicamente cerrados). Una última propiedad es que $A \cap B = \emptyset$ si y sólo si $0 \notin A - B$.

Estas propiedades nos permiten aplicar los resultados anteriores y obtener de manera inmediata el siguiente corolario:

COROLARIO 1.25. *Sean A, B dos conjuntos convexos disjuntos, con A compacto y B cerrado. Entonces A y B se pueden separar fuertemente por medio de un hiperplano.*

Este resultado no es cierto si A no es compacto. Es decir, dos conjuntos convexos cerrados disjuntos no pueden separarse fuertemente en general. Por ejemplo, los conjuntos convexos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0, y \geqslant 1/x\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0, y \leqslant -1/x\}$ son cerrados y disjuntos y no se pueden separar fuertemente, pues $d(A, B) = 0$ (si $A \subset H^-_{u,\alpha-\varepsilon}$, $B \subset H^+_{u,\alpha+\varepsilon}$, entonces $d(A, B) \geqslant 2\varepsilon$).

En este ejemplo A y B están separados estrictamente por el eje x, pero $A - B$ y $\{0\}$ no pueden separarse estrictamente. Para ello basta comprobar que $0 \in \overline{A - B}$. Observemos que $0 \notin A - B$ por ser disjuntos y $A - B \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}$. Consideramos los puntos $(n, 1/n) \in A$, $(n, -1/n) \in B$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $(0, 2/n) = (n, 1/n) - (n, -1/n) \in A - B$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto $0 \in \overline{A - B}$.

6. Envolvente convexa

Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, recordemos que su envolvente convexa, $\operatorname{conv}(A)$, es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a A.

TEOREMA 1.26. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto compacto. Entonces* $\operatorname{conv}(A)$ *es la intersección de todos los semiespacios cerrados que contienen a A.*

Observemos que si A es cerrado y no compacto, el resultado no es cierto, ya que nada asegura que $\operatorname{conv}(A)$ sea cerrado mientras que la intersección de semiespacios cerrados siempre es cerrada.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{S}$ la familia de los semiespacios cerrados que contienen a A. Si $S \in \mathcal{S}$, entonces $\operatorname{conv}(A) \subset S$ y, por tanto, $\operatorname{conv}(A) \subset \bigcap_{S \in \mathcal{S}} S$. Para probar la inclusión opuesta, supongamos que $x \notin \operatorname{conv}(A)$. Como $\operatorname{conv}(A)$ es compacto por el Teorema de Caratheodory, podemos separar fuertemente $\operatorname{conv}(A)$ y x por medio de un hiperplano H. Uno de los semiespacios cerrados determinados por H contiene a $\operatorname{conv}(A)$ y no contiene a x, Por tanto $x \notin \bigcap_{S \in \mathcal{S}} S$, de lo que se sigue el resultado. □

Si $A \subset \mathbb{R}^n$, el *diámetro* de A, $\operatorname{diam}(A)$, es $\operatorname{diam}(A) := \sup\{d(x, y);\ x, y \in A\}$. El conjunto A es acotado si y sólo si $\operatorname{diam}(A) < \infty$. Si el diámetro de A es finito y $r > \operatorname{diam}(A)$, entonces A está contenido en una bola abierta de radio r.

TEOREMA 1.27. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Entonces:*

$$\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\operatorname{conv}(A)).$$

DEMOSTRACIÓN. Como $A \subset \text{conv}(A)$, se tiene $\text{diam}(A) \leqslant \text{diam}(\text{conv}(A))$. Si A no es acotado, $\text{conv}(A)$ tampoco es acotado y $\text{diam}(A) = \text{diam}(\text{conv}(A)) = \infty$. Supongamos entonces que $\text{diam}(A)$ es finito. Sea $r > \text{diam}(A)$, $y \in \text{conv}(A)$, $a \in A$. Por la observación anterior $A \subset B(a,r)$. Por tanto, $\text{conv}(A) \subset B(a,r)$. Como $y \in B(a,r)$, se sigue que $a \in B(y,r)$. Como $a \in A$ es arbitrario, obtenemos que $A \subset B(y,r)$. En consecuencia, $\text{conv}(A) \subset B(y,r)$. Si $y' \in \text{conv}(A)$, entonces $y' \in B(y,r)$ y $d(y,y') < r$. Como $y \in \text{conv}(A)$ es arbitrario, tenemos que $\text{diam}(\text{conv}(A)) \leqslant r$ para todo $r > \text{diam}(A)$. Por tanto, $\text{diam}(\text{conv}(A)) \leqslant \text{diam}(A)$. □

Sea A un conjunto convexo. ¿Es posible encontrar $A_0 \subset A$ lo más sencillo posible de modo que $A = \text{conv}(A_0)$?

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Diremos que $x \in A$ es un *punto extremo* de A si no existen x_1, $x_2 \in A$ distintos tales que $x \in (x_1, x_2)$. Un punto extremo de A no puede ser interior. Al conjunto de los puntos extremos de A lo denotaremos por $\text{ext}(A)$. Si A es convexo, entonces $x \in \text{ext}(A)$ si y sólo si $A - \{x\}$ es convexo. El conjunto de puntos extremos de C puede ser vacío: por ejemplo un semiespacio no tiene puntos extremos.

TEOREMA 1.28. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo compacto. Cualquier hiperplano soporte de A contiene al menos un punto extremo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea H un hiperplano soporte de A. Afirmamos que:

$$\text{ext}(A) \cap H = \text{ext}(A \cap H).$$

La inclusión $\text{ext}(A) \cap H \subset \text{ext}(A \cap H)$ es sencilla. Probemos la opuesta. Tomemos $x \in \text{ext}(A \cap H)$ tal que $x \notin \text{ext}(A)$. Existen entonces x_1, $x_2 \in A$ con $x \in (x_1, x_2)$. La recta determinada por x_1 y x_2 está contenida en H (en caso contrario H no sería hiperplano soporte de A). Esto nos lleva a contradicción pues entonces $x \notin \text{ext}(A \cap H)$. Concluimos que $\text{ext}(A \cap H) \subset \text{ext}(A) \cap H$. □

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Diremos que $x \in A$ es un *punto expuesto* si existe un hiperplano soporte H de A tal que $H \cap A = \{x\}$. Al conjunto de puntos expuestos de A lo denotaremos por $\exp(A)$.

Se tiene que $\exp(A) \subset \text{ext}(A)$. La inclusión contraria no es cierta. En la figura, x es un punto extremo que no es expuesto.

El conjunto de puntos expuestos es importante. Se puede probar que, salvo para un conjunto de medida nula de $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, todo vector $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ es el vector normal exterior de un hiperplano soporte de A que corta a A en un punto expuesto.

TEOREMA 1.29 (Minkowski). *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto convexo y compacto. Entonces $A = \text{conv}(\text{ext}(A))$.*

Un resultado más débil con una demostración más sencilla es el siguiente:

TEOREMA 1.30. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto convexo y compacto. Entonces $A = \overline{\text{conv}(\text{ext}(A))}$.*

Este resultado es cierto en un espacio de Banach de dimensión arbitraria y se conoce con el nombre de Teorema de Krein-Milman.

DEMOSTRACIÓN. Como A es convexo y cerrado, y $\mathrm{ext}(A) \subset A$, tomando sucesivamente envolvente convexa y clausura, obtenemos que $\overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(A))} \subset A$. Para probar la inclusión opuesta sea $x \in A$. Supongamos que $x \notin \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(A))}$. Existe entonces un hiperplano $H_{u,\alpha}$ que separa fuertemente $\overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(A))}$ y $\{x\}$. Supongamos que $\overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(A))} \subset H^-_{u,\alpha}$. Entonces $\langle x, u\rangle \geqslant \alpha$.

Como A es un conjunto convexo y compacto, existe $H_{u,\beta}$ hiperplano soporte de A con vector normal exterior u. Esto significa que $A \subset H^-_{u,\beta}$. Concluimos que $\alpha < \beta$.

Como A es convexo y compacto, $\mathrm{ext}(A) \cap H_{u,\beta} \neq \emptyset$. Pero tenemos que $\mathrm{ext}(A) \subset \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(A))} \subset H^-_{u,\alpha}$ y $H_{u,\beta} \cap H^-_{u,\alpha} = \emptyset$ ya que $\alpha < \beta$, lo que contradice que $\mathrm{ext}(A) \cap H_{u,\beta} = \emptyset$. □

7. Función soporte de un conjunto convexo

En toda esta sección supondremos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo y cerrado.

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ en las condiciones anteriores. Para todo $u \in \mathbb{R}^n$ definimos la función:

$$h(A, u) = h_A(u) := \max\{\langle x, u\rangle;\ x \in A\}.$$

El valor $h_A(u)$ puede ser infinito. El dominio de h_A es el conjunto:

$$\mathrm{dom}\, h_A := \{u \in \mathbb{R}^n;\ h_A(u) \text{ es finito}\}.$$

Diremos entonces que $h_A : \mathrm{dom}\, h_A \to \mathbb{R}$ es la *función soporte* de A.

Para $u \neq 0$, consideremos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} H(A, u) &:= \{x \in \mathbb{R}^n;\ \langle x, u\rangle = h_A(u)\}, \\ H^-(A, u) &:= \{x \in \mathbb{R}^n;\ \langle x, u\rangle \leqslant h_A(u)\}, \\ F(A, u) &:= A \cap H(A, u). \end{aligned}$$

Diremos que $H(A, u)$, $H^-(A, u)$, $F(A, u)$ son el hiperplano soporte, el semiespacio soporte y el conjunto soporte de A, respectivamente, en la dirección del vector normal exterior u. Si $F(A, u) \neq \emptyset$ entonces $H(A, u)$, $H^-(A, u)$ son hiperplano y semiespacio soporte de A en cada punto de $F(A, u)$. Por supuesto, puede ocurrir que $F(A, u) = \emptyset$. Observemos que si $x \in A$, entonces $\langle x, u\rangle \leqslant h_A(u)$. Por tanto, $A \subset H^-(A, u)$.

La función soporte de un conjunto convexo y cerrado A satisface las siguientes propiedades:

1. $h_A(u) = \langle x, u\rangle$ para un cierto $x \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si $A = \{x\}$.
2. $h(A + t, u) = h(A, u) + \langle t, u\rangle$, con $t \in \mathbb{R}^n$.
3. $h_A(\lambda u) = \lambda\, h_A(u)$, para $\lambda \geqslant 0$ (h_A es positivamente homogénea).
4. $h_A(u + v) \leqslant h_A(u) + h_A(v)$ (h_A es subaditiva)
5. $h_A \leqslant h_{A'}$ si y sólo si $A \subset A'$.
6. $h(\lambda A, \cdot) = \lambda\, h(A, \cdot)$ para $\lambda \geqslant 0$.
7. $h(-C, u) = h(C, -u)$.

Observemos que la tercera y la cuarta propiedades prueban que h_A es convexa. Una función que verifica la tercera y cuarta propiedades se denomina sublineal.

Sabemos que si A es un conjunto convexo cerrado, se puede reconstruir A como la intersección de todos sus semiespacios soporte. ¿Se puede reconstruir A a partir de su función soporte?

TEOREMA 1.31. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función sublineal, existe entonces un único conjunto convexo y compacto cuya función soporte es f.*

DEMOSTRACIÓN. Definimos:

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n;\ \langle x, u\rangle \leqslant f(u),\ \forall u \in \mathbb{R}^n\}^1.$$

Veamos que K es un conjunto convexo y compacto cuya función soporte es $h_K = f$. De la definición de K se sigue que $K = \bigcap_{u\in\mathbb{R}^n-\{0\}} H^-_{u,f(u)}$. Por tanto K es convexo o vacío. Además K es cerrado.

Debemos ver que K está acotado para obtener la compacidad. Para ello vamos a utilizar que f está definida en $\mathbb{R}^n$. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base usual de $\mathbb{R}^n$. Si $x \in K$, entonces:

$$\langle x, e_i\rangle \leqslant f(e_i), \qquad \langle x, -e_i\rangle \leqslant f(e_i).$$

Como f es subaditiva, $0 = f(0) = f(e_i + (-e_i)) \leqslant f(e_i + f(-e_i)$. Por tanto $-f(-e_i) \leqslant \langle x, e_i\rangle \leqslant f(e_i)$. Esto prueba que $K \subset \prod_{i=1}^n[-f(-e_i), f(e_i)]$. Por tanto, K está acotado y es compacto.

Queda probar que $K \neq \emptyset$ y que $h_K = f$. Observemos que por definición:

$$h_K(u) = \sup\{\langle x, u\rangle;\ x \in K\} \leqslant f(u),$$

de modo que sólo habría que demostrar que $h_K(u) \geqslant f(u)$.

Se define el epigrafo de f como el conjunto:

$$\mathrm{epi}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R};\ y \geqslant f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Como f es sublineal, es una función convexa, por lo que $\mathrm{epi}(f)$ es un conjunto convexo. Además $\mathrm{epi}(f)$ es un conjunto cerrado (f es continua por ser convexa). Más aún, $\mathrm{epi}(f)$ es un *cono* (si $x \in \mathrm{epi}(f)$, y $\lambda \geqslant 0$, entonces $\lambda x \in \mathrm{epi}(f)$). Una propiedad general de los conos es que cualquier hiperplano soporte pasa por el vértice del cono.

Fijamos $u \neq 0$. El punto $(u, f(u))$ está en la frontera de $\mathrm{epi}(f)$. Como $\mathrm{epi}(f)$ es convexo y cerrado, existe un hiperplano soporte $H_{(y,\eta),\alpha}$ de $\mathrm{epi}(f)$ en el punto $(u, f(u))$. Como $\mathrm{epi}(f)$ es un cono, se tiene que $\alpha = 0$.

Comprobemos que $\eta < 0$. Observemos que si $(x, y) \in \mathrm{int}\,\mathrm{epi}(f)$, entonces $(x, y) \in \mathrm{int}(H^-_{(y,\eta),0})$. Consideramos el vector $e_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Ocurre que:

$$(u, f(u)) + \lambda e_{n+1} \in \mathrm{int}(\mathrm{epi}(f)), \qquad \lambda > 0.$$

[1]Observemos que si A es un conjunto convexo compacto, entonces $A = \bigcap_{u\in\mathbb{R}^n}\{x \in \mathbb{R}^n - \{0\};\ \langle x, u\rangle \leqslant h_A(u)\}$

ya que $(u, f(u)) + \lambda e_{n+1} = (u, f(u) + \lambda) \Rightarrow f(u) + \lambda > f(u)$ puesto que $\lambda > 0$ lo que implica la fórmula anterior. De este modo tenemos que $(u, f(u) + \lambda) \in \operatorname{int}(H^-_{(y,\eta),0})$ para $\lambda > 0$. Como:

$$\operatorname{int}(H_{(y,\eta),0} = \{(x,\rho);\ \langle x, y\rangle + \eta\rho < 0\},$$

se tiene que $\langle u, y\rangle + \eta f(u) + \lambda\eta < 0 \Rightarrow \lambda\eta < 0 \Rightarrow \eta < 0$, como queríamos demostrar.

Como $H_{(y,\eta),0} = H_{(-y/\eta,-1),0}$, podemos suponer que $\eta = -1$. El hiperplano soporte de $\operatorname{epi}(f)$ en $(u, f(u))$ es $H_{(y,-1),0} = \{(x,\lambda);\ \langle x, y\rangle = \lambda\}$, con $\operatorname{epi}(f) \subset H^-_{(y,\eta),0}$.

Observemos ahora que si $(v, f(v)) \in \operatorname{epi}(f) \subset H^-_{(y,-1),0}$ entonces $\langle v, y\rangle \leqslant f(v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

Esto prueba que $y \in K$ y, por tanto, $K \neq \emptyset$.

Queda probar que $h_K \geqslant f$. Tenemos que:

$$h_K(u) = \sup\{\langle x, u\rangle; x \in K\} \geqslant \langle y, u\rangle = f(u).$$

La desigualdad se sigue de $y \in K$. La última igualdad porque $(y, -1)$ es vector normal exterior a $\operatorname{epi}(f)$ en $(u, f(u))$. Como u es arbitrario, obtenemos la desigualdad que buscamos. Esto concluye la demostración. □

Un *cuerpo convexo* en un conjunto convexo no vacío y compacto. Denotaremos por $\mathcal{K}^n$ al conjunto de todos los cuerpos convexos de $\mathbb{R}^n$. El conjunto de los cuerpos convexos de $\mathbb{R}^n$ con interior no vacío lo denotaremos por $\mathcal{K}^n_0$.

TEOREMA 1.32. *Sean K, $L \in \mathcal{K}^n$. Entonces se tiene:*

1. $h_{K+L} = h_K + h_L$.
2. $H(K + L, \cdot) = H(K, \cdot) + H(L, \cdot)$.
3. $F(K + L, \cdot) = F(K, \cdot) + F(L, \cdot)$.

DEMOSTRACIÓN. Hacemos la demostración de la primera parte. Si $u = 0$, la identidad $h_{K+L}(u) = h_K(u) + h_L(u)$ es trivial. Supongamos que $u \neq 0$. Por definición:

$$h_{K+L}(u) = \sup\{\langle x, u\rangle;\ x \in K + L\}.$$

Como $K + L$ es compacto, el supremo se alcanza en algún punto del conjunto. Existe $x_0 = a_0 + b_0$, con $a_0 \in K$, $b_0 \in L$. Entonces:

$$h_{K+L}(u) = \langle a_0 + b_0, u\rangle = \langle a_0, u\rangle + \langle b_0, u\rangle \leqslant h_K(u) + h_L(u).$$

Veamos ahora la desigualdad opuesta. Por la compacidad de K y de L, tenemos que $h_K(u) = \langle a_0, u\rangle$, $h_L(u) = \langle b_0, u\rangle$, con $a_0 \in K$, $b_0 \in L$, de manera que:

$$h_K(u) + h_L(u) = \langle a_0, u\rangle + \langle b_0, u\rangle = \langle a_0 + b_0, u\rangle \leqslant h_{K+L}(u),$$

de donde obtenemos la igualdad. □

COROLARIO 1.33. *Si K, L, $M \in \mathcal{K}^n$ y $K + M = L + M$, entonces $K = L$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $K + M = L + M$ entonces $h_{K+M} = h_{L+M}$. Por el primer apartado del teorema anterior, se tiene que $h_K + h_M = h_L + h_M$, de donde se obtiene que $h_K = h_L$. Como:

$$K = \bigcap_{u \in \mathbb{R}^n} H^-_{u,h(K,u)} = \bigcap_{u \in \mathbb{R}^n} H^-_{u,h(L,u)} = L,$$

se sigue el resultado. □

Dado $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, y $K \in \mathcal{K}^n$, la *anchura* de K en la dirección de u es $h(K,u) + h(K,-u)$. Esta cantidad, que siempre es no negativa, coincide con la distancia entre los hiperplanos soporte $H_{u,h(K,u)}$ y $H_{-u,h(K,-u)}$. Denotaremos la anchura de K en la dirección de u por $w(K,u)$. Si $w(K,u) = 0$, entonces K está contenido en el hiperplano soporte $H_{u,h(K,u)}$ y se sigue que $\dim(K) \leqslant n-1$. Si $K \in \mathcal{K}^n_0$, entonces $w(K,u) > 0$ para todo $u \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Dado $K \in \mathcal{K}^n$, definimos:

$$D(K) := \text{máx}\{w(K,u);\ u \in \mathbb{S}^{n-1}\},$$
$$\Delta(K) := \text{mín}\{w(K,u);\ u \in \mathbb{S}^{n-1}\},$$

Dichos máximo y mínimo existen porque $w(K,\cdot) : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ es una función continua, ya que h_K es una función continua por ser convexa. A la cantidad $\Delta(K)$ se le denomina la *anchura total* de K.

PROPOSICIÓN 1.34. *Para todo cuerpo convexo K, se tiene que $D(K) = \operatorname{diam}(K)$.*

DEMOSTRACIÓN. Como K es compacto, existen $x, y \in K$ tales que $d(x,y) = \operatorname{diam}(K)$. Salvo que K conste de un único punto se tiene que $\operatorname{diam}(K) = d(x,y) > 0$. Consideramos los hiperplanos ortogonales a $x - y$ que pasan por x y por y:

$$H_x = x + L(x-y)^{\perp}, \qquad H_y = y + L(x-y)^{\perp}.$$

Afirmamos que H_x, H_y son hiperplanos soporte de K. Para probarlo basta observar que K está contenido en el semiespacio que determina H_x donde se encuentra y, y en el semiespacio determinado por H_y donde se encuentra x. Además $d(H_x, H_y) = d(x,y)$. Como $w(K,(x-y)/|x-y|) = d(H_x,H_y)$, se tiene que $\operatorname{diam}(K) \leqslant D(K)$.

Veamos la desigualdad opuesta. Como K es compacto, existe $u_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ tal que $D(K) = w(K,u_0)$. Entonces $H_{u_0,h(K,u_0)}$, $H_{-u_0,h(K,-u_0)}$ son hiperplanos soporte de K tales que:

$$d(H_{u_0,h(K,u_0)}, H_{-u_0,h(K,-u_0)}) = D(K).$$

Sean $x_0 \in H_{u_0,h_K(u_0)} \cap K$, $y_0 \in H_{-u_0,h_K(u_0)} \cap K$. Entonces

$$\operatorname{diam}(K) \geqslant d(x_0,y_0) \geqslant d(H_{u_0,h(K,u_0)}, H_{-u_0,h(K,-u_0)} = D(K),$$

de donde obtenemos la igualdad.

PROPOSICIÓN 1.35. *Si K, $L \in \mathcal{K}^n$, entonces:*

1. $\operatorname{diam}(K+L) \leqslant \operatorname{diam}(K) + \operatorname{diam}(L)$,
2. $\Delta(K+L) \geqslant \Delta(K) + \Delta(L)$.

DEMOSTRACIÓN. Ejercicio. □

Diremos que $K \in \mathcal{K}^n$ tiene *anchura constante* si $w(K,u) = c \in \mathbb{R}$ para todo $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. $\square$

8. Dualidad

Si $K \in \mathcal{K}_0^n$, se define el *conjunto polar* de K, que denotaremos por K^*, por:

$$K^* = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \langle x, y \rangle \leqslant 1, \forall y \in K\}.$$

En $\mathbb{R}^n$ hay una dualidad entre vectores no nulos e hiperplanos vectoriales. Generalmente interpretaremos que los elementos de K^* son un conjunto de hiperplanos en lugar de un conjunto de vectores.

PROPOSICIÓN 1.36. *Si $K \subset L$, entonces $L^* \subset K^*$.*

DEMOSTRACIÓN. Ejercicio $\square$

Es fácil comprobar que $\overline{B}(0,\varepsilon)^* = \overline{B}(0, 1/\varepsilon)$. Si $z \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, entonces $\{z\}^* = H^-_{z,1}$.

TEOREMA 1.37. *Si $K \in \mathcal{K}_0^n$ y $0 \in \operatorname{int}(K)$, entonces $K^* \in \mathcal{K}_0^n$ y además $0 \in \operatorname{int}(K^*)$. Por otra parte, $(K^*)^* = K$ (si $0 \in \operatorname{int}(K)$).*

DEMOSTRACIÓN. Probemos en primer lugar que K es convexo. Dados x_1, $x_2 \in K$, y $\lambda \in [0,1]$, se tiene, para cualquier $z \in K$:

$$\langle \lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2, z \rangle = \lambda \langle x_1, z \rangle + (1-\lambda) \langle x_2, z \rangle \leqslant 1,$$

de donde se sigue que $\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2 \in K^*$ para todo x_1, $x_2 \in K^*$ y $\lambda \in [0,1]$.

Comprobemos ahora que K^* es cerrado. Si $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \to x$, con $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset K^*$, entonces, para todo $z \in K$:

$$\langle x, z \rangle = \langle \lim_i x_i, z \rangle \leqslant 1 \Rightarrow x \in K^*.$$

Veamos que $0 \in \operatorname{int}(K^*)$ y que K^* está acotado. Como $0 \in \operatorname{int}(K)$ y K está acotado, existen ρ, $\varepsilon > 0$ tales que $\overline{B}(0,\varepsilon) \subset K \subset \overline{B}(0,\rho)$. Calculando los conjuntos polares en la anterior cadena y teniendo en cuenta que se invierten las desigualdades se tiene que:

$$\overline{B}(0, 1/\rho) \subset K^* \subset B(0, 1/\varepsilon),$$

lo que demuestra que K^* es acotado y que $0 \in \operatorname{int}(K^*)$.

Veamos por último que $K = K^{**}$. Si $x \in K$, entonces $\langle x, y \rangle \leqslant 1$ para todo $y \in K^*$. Por tanto $x \in K^{**}$. Para probar la inclusión contraria supongamos que $x \notin K$. Existe un hiperplano $H_{u,\alpha}$ que separa fuertemente a x y a K, con $K \subset H^-_{u,\alpha}$ y $\langle x, u \rangle > \alpha$. Como $0 \in \operatorname{int}(K)$ entonces $0 = \langle 0, u \rangle < \alpha$, de donde se sigue que $\langle x, u \rangle > 0$. Como $\langle y, u \rangle \leqslant \alpha$ para todo $y \in K$ y $\alpha > 0$, se tiene que $\langle y, u/\alpha \rangle \leqslant 1$ para todo $y \in K$. Por tanto $u/\alpha \in K^*$. Por otra parte, como $\langle x, u \rangle > \alpha$, se tiene que $\langle x, u/\alpha \rangle > 1$, de donde $x \notin K^{**}$. Esto prueba la igualdad. $\square$

Observemos que si $0 \in \operatorname{int}(K)$, entonces $h_K(u) > 0$ para cualquier $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. De esta forma, dado $u \in K^* - \{0\}$, se verifica $\langle x, u \rangle \leqslant 1$ para cualquier $x \in K$. Por tanto $\langle x, h_K(u)\, u \rangle \leqslant h_K(u)$ por ser $h_K(u) > 0$. Por tanto, si $K \subset H^-_{u,1}$ entonces $K \subset H^-_{h_K(u)u, h_K(u)}$.

LEMA 1.38. *Sea $K \in \mathcal{K}^n_0$ tal que $0 \in \operatorname{int}(K)$. Si $u \neq 0$, entonces $h_K^{-1}(u)u \in \partial K^*$. Si $z \in \partial K^*$, entonces $H_{z,1}$ es un hiperplano soporte de K.*

DEMOSTRACIÓN. Si $z = h_K(u)^{-1}u$ fuese un punto interior de K^*, como $0 \in \operatorname{int}(K^*)$, $[0, z] \subset K^*$, y existe $\lambda > 1$ próximo a 1 tal que $\lambda z \in K^*$. Así, $\langle x, \lambda z \rangle \leqslant 1$ para todo $x \in K$. Esto es, $\langle x, z \rangle \leqslant 1/\lambda < 1$ para todo $x \in K$. Por tanto $K \cap H_{z,1} = \emptyset$. Pero $H_{z,1} = H_{h_K(u)^{-1}u,1} = H_{u,h_K(u)}$ es un hiperplano soporte que, por lo anterior, no corta a K, lo que es imposible. Concluimos que $z = h_K^{-1}(u)u \in \partial K^*$.

Probamos ahora la segunda parte del enunciado. Sea $z \in \partial K^*$. Como $K \subset H^-_{z,1}$, basta comprobar que $K \cap H_{z,1} \neq \emptyset$. Supongamos que $K \cap H_{z,1} = \emptyset$. Esto quiere decir que $\langle x, z \rangle < 1$ para todo $x \in K$. Como K es compacto, existe $x_0 \in K$ tal que $\langle x_0, z \rangle = \sup\{\langle x, z \rangle;\ x \in K\} < 1$. Llamamos $\lambda_0 := \langle x_0, z \rangle$ Se tiene que $\langle x, z \rangle \leqslant \lambda_0 < 1$ para todo $x \in K$. De nuevo $\lambda_0 > 0$ porque $0 \in \operatorname{int}(K)$. Así $\langle x, z/\lambda_0 \rangle \leqslant 1$ para todo $x \in K$ con $1/\lambda_0 > 1$. Por tanto $z/\lambda_0 \in K^*$ y $z \in [0, z/\lambda_0] \subset K^*$. Como $0 \in \operatorname{int}(K^*) \Rightarrow z \in \operatorname{int}(K^*)$, lo que contradice que $z \in \partial K^*$. Concluimos que $H_{z,1}$ es un hiperplano soporte de K. □

El lema anterior nos dice que los hiperplanos soporte de K se corresponden con los puntos de ∂K^*. Más precisamente, que $H_{u,1}$ es hiperplano soporte de K si y sólo si $z = h_K(u)^{-1}u \in \partial K^*$.

Dado $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, diremos que es un vector normal exterior *regular* si $F(K, u) = H(K, u) \cap K = H_{u,h_K(u)} \cap K = \{x\}$. En caso contrario diremos que u es un vector normal exterior *singular*.

Sea $K \in \mathcal{K}^n_0$. Diremos que $x \in \partial K$ es un punto *regular* si existe un *único* hiperplano soporte de K que pasa por x. Diremos que $x \in \partial K$ es un punto singular si no es regular.

Con las definiciones anteriores, $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ es un vector normal exterior regular si y sólo si x es un punto expuesto de K.

Observemos que si $K \in \mathcal{K}^3_0$, $S = \partial K \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie diferenciable, y H es un hiperplano soporte de S que pasa por $x \in \partial S$, entonces H es el plano tangente de S en x, de forma que x es un punto regular.

TEOREMA 1.39. *Sea $K \in \mathcal{K}^n_0$. El conjunto de los vectores normales exteriores regulares de K es un subconjunto denso de $\mathbb{S}^{n-1}$.*

LEMA 1.40. *Sea $K \in \mathcal{K}^n_0$. El conjunto de puntos regulares de ∂K es denso en ∂K.*

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA. Sea $z \in \partial K$. Fijamos $\delta > 0$. Se tiene que $B(z, \delta/3) \cap \operatorname{int}(K) \neq \emptyset$. Tomamos $y \in B(z, \delta/3) \cap \operatorname{int}(K)$, Sea $r_0 := \max\{r > 0;\ \overline{B}(y, r) \subset K\}$. Entonces existe $x \in \partial \overline{B}(y, r_0) \cap \partial K \neq \emptyset$.

Como $y \in B(z, \delta/3)$, tenemos que $r_0 \leqslant \delta/3$, lo que implica que $d(x, y) \leqslant r_0 \leqslant \delta/3$. Por la desigualdad triangular:

$$d(z,x) \leqslant d(z,y) + d(y,x) \leqslant \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \frac{2\delta}{3} < \delta.$$

Veamos ahora que x es un punto regular de ∂K. Sea H un hiperplano soporte de K en el punto x tal que $K \subset H^-$. Entonces $\overline{B}(y, r_0) \subset K \subset H^-$. Por otra parte $x \in \partial\overline{B}(y, r_0) \cap H$, lo que demuestra que H es un hiperplano soporte de $\overline{B}(y, r_0)$ en el punto x. Por una observación anterior, H es necesariamente el hiperplano tangente de $\partial\overline{B}(y, r_0)$ en x. Por tanto, H es único.

En resumen, dados $z \in \partial K$ y $\delta > 0$, hemos encontrado un punto regular $x \in \partial K$ tal que $d(x, z) < \delta$. En consecuencia, el conjunto de los puntos regulares es denso en ∂K. □

En general, puede probarse que la medida de Hausdorff $(n-1)$-dimensional de los puntos singulares de ∂K es nula.

Demostración del teorema. Trasladando K si es necesario, podemos suponer que $0 \in \operatorname{int}(K)$.

Sea $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. Veamos que u es vector normal exterior singular a K si, y solo si, $x = h_K(u)^{-1}u$ es un punto singular de ∂K^*.

Observemos que u es vector normal singular si y sólo si $F(K, u)$ contiene más de un punto o, lo que es equivalente, si $F(K, u)$ contiene un segmento I. Para cada $z \in I$ se tiene $\{z\} \subset I \subset K$, de donde $H^-_{z,1} = \{z\}^* \supset I^* \supset K^*$. Además, como $z \in H_{u,h_K(u)} = H_{x,1}$ se tiene que $x \in H_{z,1}$ para cualquier $z \in I$. Por tanto, $H_{z,1}$ es un hiperplano soporte de K^* en x para todo $z \in I$, y se sigue que x es punto singular de ∂K^*.

Tomamos ahora $x = h_K(u)^{-1}u \in \partial K^*$ punto singular. Existen entonces $H_{v,1}$, $H_{w,1}$ hiperplanos soporte de K^* en x. Entonces $v, w \in F(K, u)$ y u es vector normal exterior singular de K.

Consideramos ahora la aplicación $\mathbb{S}^{n-1} \to \partial K^*$ dada por $u \mapsto x = h_K(u)^{-1}u$. La aplicación inversa $p : \partial K^* \to \mathbb{S}^{n-1}$ viene dada por $x \mapsto x/|x|$. Para probar esto último tomamos $x \in \partial K^*$, $u := x/|x|$. Como $x \in \partial K^*$, $H_{x,1}$ es hiperplano soporte de K, por tanto $h_K(x) = 1$. Es inmediato entonces comprobar que la composición $\partial K^* \to \mathbb{S}^{n-1} \to \partial K^*$ dada por $x \mapsto x/|x| \mapsto h_K(x/|x|)^{-1}x/|x|$ es la aplicación identidad en ∂K^*.

Sabemos que $p : \partial K^* \to \mathbb{S}^{n-1}$ es un homeomorfismo porque $0 \in \operatorname{int}(K^*)$. Por otra parte:

$$p(\{\text{puntos regulares de } \partial K^*\}) = \{\text{vectores regulares de } K\}.$$

Por el lema anterior, $\{$puntos regulares de $\partial K^*\}$ es denso en K^*. Concluimos que $\{$vectores regulares de $K\}$ es denso en $\mathbb{S}^{n-1}$. □

Si $\mathcal{H}^{n-1}$ es la medida de Hausdorff $(n-1)$-dimensional se puede probar que $\mathcal{H}^{n-1}(\{\text{puntos singulares de } \partial K^*\}) = 0$. Como p es una aplicación Lipschitziana obtenemos que $\mathcal{H}^{n-1}(\{\text{vectores singulares de } K\}) = 0$.

9. El Teorema de Helly y una extensión del Teorema de Caratheodory

TEOREMA 1.41 (Helly). *Sea $\mathcal{A}$ una familia finita de conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que, para toda subcolección $A_1, \ldots, A_{n+1} \in \mathcal{A}$, se tiene que $A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1} \neq \emptyset$. Entonces:*

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ es una familia finita de conjuntos convexos que satisface las hipótesis del teorema. Trabajamos por inducción sobre k. En el caso inicial $k = n+1$ el resultado es trivial.

Supongamos que el teorema es cierto para cualquier familia de $k-1$ conjuntos convexos, con $k > n+1$. Sea

$$\mathcal{A}_i = \mathcal{A} - \{A_i\} = \{A_1, \ldots, \widehat{A}_i, \ldots, A_k\}.$$

Puesto que $\mathcal{A}$ satisface las hipótesis del enunciado, también las verifica $\mathcal{A}_i$. Por hipótesis de inducción:

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}_i} A \neq \emptyset.$$

Tomamos $x_i \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}_i} A = A_1 \cap \ldots \cap \widehat{A}_i \cap \ldots \cap A_k$ para $i = 1, \ldots, k$. Consideramos ahora el siguiente sistema de $n+1$ ecuaciones lineales con $\mu_1, \ldots, \mu_k$ como incógnitas:

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i x_i = 0, (n \text{ ecuaciones})$$
$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i = 0.$$

Como $k > n+1$ por hipótesis, existe una solución $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \neq (0, \ldots, 0)$. Reordenando los términos, podemos suponer que existe un entero s entre 1 y k tal que $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \geqslant 0$, $\lambda_{s+1}, \ldots, \lambda_k < 0$.

Definimos:

$$y := \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_s} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_s}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_s} x_s.$$

Usando que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$ y que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 0$, se tiene que:

$$y = \frac{\lambda_{s+1}}{\lambda_{s+1} + \ldots + \lambda_k} x_{s+1} + \ldots + \frac{\lambda_k}{\lambda_{s+1} + \ldots + \lambda_k} x_k.$$

En consecuencia, y es combinación lineal convexa de $x_1, \ldots, x_s$ y de $x_{s+1}, \ldots, x_k$. Como $x_1, \ldots, x_s \in A_{s+1} \cap \ldots \cap A_k$ y $x_{s+1}, \ldots, x_k \in A_1 \cap \ldots \cap A_s$, se sigue que $y \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \neq \emptyset$, como queríamos probar. □

COROLARIO 1.42. *Sea $\mathcal{A}$ una familia finita de conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$, y sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo tal que, para cualquier colección $A_1, \ldots, A_{n+1}$ de elementos de $\mathcal{A}$, existe un trasladado de C que corta a $A_1, \ldots, A_{n+1}$. Entonces existe una traslación de C que corta a todos los elementos de $\mathcal{A}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $A_1, \dots, A_{n+1} \in \mathcal{A}$. Por hipótesis, existe $t \in \mathbb{R}^n$ tal que $C + t$ corta a todos los conjuntos A_i, $i = 1, \dots, n+1$. Existen entonces $x_i \in A_i$, $c_i \in C$ tales que $x_i = c_i + t$ y, por tanto, $t = x_i - a_i \in A_i - C$. Entonces $t \in \bigcap_{i=1}^{n+1} A_i - C$. Podemos aplicar entonces el Teorema de Helly a la familia de conjuntos convexos $\{A - C;\ A \in \mathcal{A}\}$ para concluir que existe $z \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A - C$. Entonces $A \cap (C + z) \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{A}$, como queríamos probar. $\square$

Demostramos ahora la siguiente extensión del Teorema de Caratheodory.

TEOREMA 1.43. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto con $r \leqslant n$ componentes conexas. Entonces todo punto de* $\operatorname{conv}(A)$ *es combinación lineal convexa de, a lo sumo, n puntos de A.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $y \in \operatorname{conv}(A)$. El Teorema de Caratheodory nos asegura que existen $x_i \in A$, $i = 1, \dots, n+1$, afínmente independientes, tales que $y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n+1} x_{n+1}$, con $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Podemos suponer que $\lambda_i > 0$ para todo i. En caso contrario, y sería combinación lineal convexa de n puntos de A, que es lo que deseamos probar.

Trasladando A, podemos suponer que $y = 0$. Para cada $i = 1, \dots, n+1$, tomamos el punto $x_i' = -x_i$, simétrico de x_i con respecto a $y = 0$.

Sea T_j el cono de vértice 0 y base $B_j = \operatorname{conv}(\{x_1', \dots, \widehat{x_j'}, \dots, x_{n+1}'\})$. Observamos que:

$$T_j = \{\mu_1 x_1' + \dots + \overset{(j)}{0} + \dots + \mu_{n+1} x_{n+1}';\ \mu_i \geqslant 0,\ i = 1, \dots, \widehat{j}, \dots, n+1\}.$$

De esta expresión para T_j, obtenemos que:

$$\operatorname{int}(T_j) = \{\mu_1 x_1' + \dots + \overset{(j)}{0} + \dots + \mu_{n+1} x_{n+1}'; \mu_i > 0, \text{ para todo } i \neq j\},$$
$$\partial T_j = \{\mu_1 x_1' + \dots + \overset{(j)}{0} + \dots + \mu_{n+1} x_{n+1}'; \mu_i = 0, \text{ para algún } i \neq j\}.$$

Es fácil ver que $x_i \in \operatorname{int}(T_i)$, pues:

$$x_i = \frac{1}{\lambda_i} \left(\lambda_1 x_1' + \dots + \widehat{\lambda_i x_i'} + \dots + \lambda_{x+1} x_{n+1}' \right).$$

Por otra parte, como $x_1, \dots, x_{n+1}$ son afínmente independientes, se tiene que $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} T_i$. Además, $\operatorname{int}(T_i) \cap \operatorname{int}(T_j) = \emptyset$ para $i \neq j$.

Afirmamos que A contiene un punto de la frontera de T_j para un cierto $j \in \{1, \dots, n+1\}$. En caso contrario $A \subset \bigcup_{i=1}^{n+1} \operatorname{int}(T_i)$, y A tendría al menos $n+1$ componentes conexas, ya que $x_i \in A \cap \operatorname{int}(T_i) \neq \emptyset$ para todo i. Esto contradice la hipótesis sobre el número de componentes conexas de A.

Reordenado los puntos x_i, podemos suponer que existe $x \in A \cap \partial T_1$. Por la caracterización de ∂T_1, $x = \mu_2 x_2' + \dots + \mu_{n+1} x_{n+1}'$, con $\mu_i \geqslant 0$, y $\mu_j = 0$ para algún j. Reordenando de nuevo si es preciso los puntos $x_2, \dots, x_{n+1}$, podemos suponer que $\mu_2 = 0$. Entonces $x = \mu_3 x_3' + \dots + \mu_{n+1} x_{n+1}'$. Por tanto:

$$y = 0 = \frac{1}{1 + \mu_3 + \dots + \mu_{n+1}} \left(1\, x + \mu_3 x_3 + \dots + \mu_{n+1} x_{n+1} \right).$$

Entonces $y = 0$ es combinación convexa de n puntos de A, como queríamos probar. $\square$

10. Inradio y circunradio. Politopos convexos y poliedros

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. El *inradio* de A es el supremo del conjunto:

$$\{r > 0;\ \text{existe } x \in A \text{ con } B(x,r) \subset A\}.$$

Una *inbola* es una bola en A cuyo radio es el inradio de A. El *circunradio* de A es el ínfimo del conjunto:

$$\{r > 0;\ \text{existe } x \in \mathbb{R}^n \text{ con } A \subset B(x,r)\}.$$

Una *circumbola* de A es una bola que contiene a A de radio minimal. El *circunradio* de A es el radio de una circumbola. La circumbola es única en el espacio Euclídeo. Si existiesen dos circumbolas distintas B, B', entonces $A \subset B \cap B'$, y podríamos encontrar una bola B'' de radio menor que el de B de modo que $B \cap B' \subset B''$.

Un *politopo* es la envolvente convexa de una cantidad finita de puntos. Por el Teorema de Caratheodory, un politopo es un conjunto compacto.

TEOREMA 1.44. *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto acotado que es intersección finita de semiespacios cerrados, entonces A es un politopo.*

TEOREMA 1.45. *Si A es un politopo, entonces A es una intersección finita de semiespacios cerrados.*

Demostramos el primer resultado, y dejamos la demostración del segundo como ejercicio.

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que si A es acotado, entonces $A = \overline{\operatorname{conv}(\operatorname{ext}(A))}$. Si probamos que el conjunto $\operatorname{ext}(A)$ es finito, entonces $\operatorname{conv}(\operatorname{ext}(A))$ es un politopo cerrado y, por tanto:

$$A = \overline{\operatorname{conv}(\operatorname{ext}(A))} = \operatorname{conv}(\operatorname{ext}(A)).$$

Por tanto A es un politopo.

Veamos entonces que $\operatorname{ext}(A)$ es finito. Lo haremos por inducción sobre la dimensión de A.

Si $\dim(A) = 1$, entonces $A = [a, b]$, con $a \leqslant b$, y los únicos puntos extremos de A son a y b.

Supongamos que el resultado es cierto si $\dim(A) \leqslant n - 1$.

Por hipótesis, $A = H_1^+ \cap \ldots \cap H_k^+$, donde H_i^+ es un semiespacio cerrado de $\mathbb{R}^n$ determinado por el hiperplano H_i. Sabemos que $\operatorname{ext}(A) \subset \partial A \subset H_1 \cup \ldots \cup H_k$. Por otra parte, como H_i es hiperplano soporte de A, se tiene que $\operatorname{ext}(A) \cap H_i = \operatorname{ext}(A \cap H_i)$. Como $A \cap H_i$ es convexo y $\dim(A) \leqslant n - 1$, concluimos por inducción que $\operatorname{ext}(A \cap H_i) = A \cap \operatorname{ext}(H_i)$ es finito. Por tanto:

$$\operatorname{ext}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{k} \big(\operatorname{ext}(A) \cap H_i\big)$$

es un conjunto finito. $\square$

CAPÍTULO 2

La métrica de Hausdorff y el Teorema de selección de Blaschke

1. La métrica de Hausdorff

Recordemos que $\mathcal{K}^n$ es la familia de conjuntos convexos compactos no vacíos de $\mathbb{R}^n$, y que $\mathcal{K}_0^n$ son los conjuntos de $\mathcal{K}^n$ con interior no vacío. Definimos:

$$\mathcal{C}^n := \{\text{conjuntos compactos no vacíos de } \mathbb{R}^n\}.$$

Evidentemente se tiene que $\mathcal{K}_0^n \subset \mathcal{K}^n \subset \mathcal{C}^n$.

Definimos ahora la distancia de Hausdorff δ sobre $\mathcal{C}^n$. Dados K, $L \in \mathcal{C}^n$, se define:

$$\delta(K, L) := \text{mín}\{\alpha \geqslant 0 \,;\, K \subset L + \alpha\overline{B},\ L \subset K + \alpha\overline{B}\},$$

donde $\overline{B} = \overline{B}(0, 1)$.

Puesto que:

$$K + \alpha\overline{B} = \bigcup_{x \in K} x + \alpha\overline{B} = \bigcup_{x \in K} \overline{B}(x, \alpha) = \{p \in \mathbb{R}^n \,;\, d(p, K) \leqslant \alpha\},$$

la inclusión $L \subset K + \alpha\overline{B}$ es equivalente a que L esté contenido dentro de un entorno tubular cerrado de centro K y radio α. Si $\delta(K, L) = \alpha_0$ entonces $K \subset L + \alpha_0\overline{B}$ y $L \subset K + \alpha_0\overline{B}$. La distancia de Hausdorff generaliza a la distancia Euclídea: si $K = \{p\}$, $L = \{q\}$, entonces $\delta(K, L) = d(p, q)$.

Es fácil comprobar que:

$$\delta(K, L) = \text{máx}\Big\{\sup_{x \in K}\inf_{y \in L} d(x, y),\ \sup_{y \in L}\inf_{x \in K} d(x, y)\Big\}.$$

Resumimos las propiedades más sencillas de la distancia de Hausdorff en el siguiente resultado:

LEMA 2.1. *$\delta : \mathcal{C}^n \times \mathcal{C}^n \to \mathbb{R}^+$ es una distancia. Es decir:*

1. $\delta(K, L) = \delta(L, K)$.
2. $\delta(K, L) = 0 \iff K = L$.
3. $\delta(K, L) \leqslant \delta(K, M) + \delta(M, L)$ *(desigualdad triangular).*

Donde K, L, $M \in \mathcal{C}^n$.

DEMOSTRACIÓN. El primer y el segundo puntos son consecuencia inmediata de la definición. Comprobamos el tercero. Supongamos que $\delta(K, M) = \alpha$, $\delta(M, L) = \beta$. Entonces tenemos que $K \subset M + \alpha\overline{B}$, $M \subset L + \beta\overline{B}$. Por tanto $K \subset M + \alpha\overline{B} \subset$

$L + \beta\overline{B} + \alpha\overline{B} \subset L + (\alpha+\beta)\overline{B}$ por la convexidad de $\overline{B}$. Análogamente se demuestra que $L \subset K + (\alpha+\beta)\overline{B}$. Deducimos entonces que $\delta(K,L) \leqslant \alpha + \beta = \delta(K,M) + \delta(M,L)$. □

PROPOSICIÓN 2.2. *Sea $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de conjuntos compactos ($K_{i+1} \subset K_i$ para todo $n \in \mathbb{N}$). Entonces $K := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i$ es el límite en $(\mathcal{C}^n,\delta)$ de la sucesión $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Debemos probar que, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\delta(K_0,K) \leqslant \varepsilon$ para $i \geqslant i_0$. Esto es:

$$K_i \subset K + \varepsilon\overline{B} \ \text{ y } \ K \subset K_i + \varepsilon\overline{B}, \quad \forall i \geqslant i_0.$$

La segunda inclusión es obvia por la definición de K para todo $i \in \mathbb{N}$ y todo $\varepsilon > 0$. Supongamos que existe un $\varepsilon > 0$ tal que que la primera no se verifica para ningún $i_0 \in \mathbb{N}$. Como $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente, se tiene que $\{K_i - \operatorname{int}(K+\varepsilon\overline{B})\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de compactos no vacíos. Entonces $A := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i - \operatorname{int}(K+\varepsilon\overline{B}) \neq \emptyset$. Por una parte $A \subset K$ ya que $K_i \subset K$. Además $A \cap K \neq \emptyset$. Por tanto $A = \emptyset$. Esta contradicción prueba el resultado. □

TEOREMA 2.3. *El espacio métrico $(\mathcal{C}^n,\delta)$ es completo (toda sucesión de Cauchy es convergente).*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^n$ una sucesión de Cauchy. Se tiene entonces que $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ es un conjunto acotado. Para probar esta afirmación basta tomar $\varepsilon = 1$; por la condición de Cauchy, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\delta(K_p, K_{i_0}) < 1$ para todo $p \geqslant i_0$, lo que implica que $K_p \subset K_{i_0} + \overline{B}$ para todo $p \geqslant i_0$. Por tanto $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \subset K_1 \cup \ldots K_{i_0-1} \cup (K_{i_0} + \overline{B})$, que es un conjunto acotado.

Definimos $A_i := \overline{\bigcup_{j=i}^{\infty} K_j}$, que es compacto por ser acotado (y cerrado). La sucesión $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es decreciente. Por el resultado anterior, converge en la distancia de Hausdorff al conjunto $A := \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

Probamos ahora que A es el límite de $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ para la distancia de Hausdorff. Fijamos $\varepsilon > 0$.

Probamos en primer lugar que $K_i \subset A + \varepsilon\overline{B}$ para i suficientemente grande: como $A = \lim_{i\to\infty} A_i$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A_i \subset A + \varepsilon\overline{B}$ para $i \geqslant i_0$. Entonces $K_i \subset A_i \subset A + \varepsilon\overline{B}$ para $i \geqslant i_0$.

Veamos por último que $A \subset K_i + \varepsilon\overline{B}$. Como $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K_j \subset K_i + \varepsilon\overline{B}$ para $i, j \geqslant i_0$. Entonces $A \subset A_i = \overline{\bigcup_{j\geqslant i} K_j} \subset K_i + \varepsilon\overline{B}$. □

2. El Teorema de selección de Blaschke

TEOREMA 2.4. *Todo subconjunto cerrado y acotado en $(\mathcal{C}^n,\delta)$ es compacto.*

Este resultado es consecuencia del siguiente:

TEOREMA 2.5. *Toda sucesión acotada en $(\mathcal{C}^n,\delta)$ admite una subsucesión convergente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^n$ una sucesión acotada para la distancia de Hausdorff. Existe entonces un conjunto $K_0 \in \mathcal{C}^n$ y un radio $r > 0$ tal que $\delta(K_i, K_0) < r$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Entonces $K_i \subset K_0 + r\overline{B}$, y $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i \subset K_0 + r\overline{B}$ es un subconjunto acotado. Sea T un cubo, es decir, un producto de n intervalos compactos paralelos a los ejes de la misma longitud γ, tal que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i \subset T$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, T puede subdividirse en 2^{mn} cubos cuya arista mide $2^{-m}\gamma$. Sea $\mathcal{T}_m$ la colección de dichos subcubos.

Si $K \in \mathcal{C}^n$, definimos:

$$A_m(K) := \{\text{unión de los subcubos de } \mathcal{T}_m \text{ que cortan a } K\}.$$

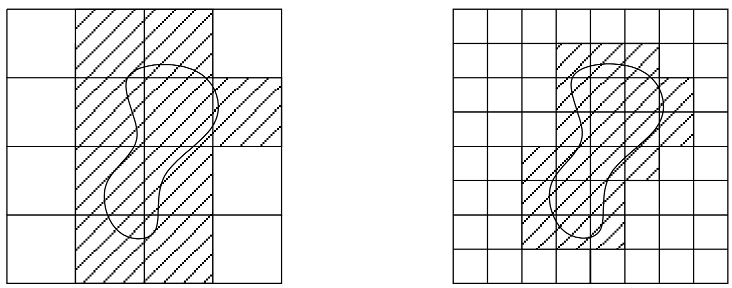


FIGURA 1. Los conjuntos $A_2(K)$ y $A_3(K)$

Sea $K_i^0 := K_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Como el conjunto de subcubos en $\mathcal{T}_1$ es finito, podemos elegir una subsucesión de $\{K_i^0\}_{i\in\mathbb{N}}$, que llamaremos $\{K_i^1\}_{i\in\mathbb{N}}$, de modo que $A_1(K_i^1)$ sea una unión fija T_1 de subcubos de $\mathcal{T}_1$.

Aplicamos este procedimiento por inducción, y en cada paso construimos $\{K_i^m\}_{i\in\mathbb{N}}$, subsucesión de $\{K_i^{m-1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de manera que $A_m(K_i^m)$ sea una unión fija T_m de subcubos de $\mathcal{T}_m$.

Tomamos la sucesión diagonal $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, con $C_i := K_i^i$. Veamos que $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. Al ser $(\mathcal{C}^n, \delta)$ un espacio métrico completo esto concluiría la demostración.

Para m fijo tenemos $A_m(K_p^m) = A_m(K_q^m) = T_m$. Cualquier subcubo de $\mathcal{T}_m$, de arista $2^{-m}\gamma$, está contenido en una bola $\overline{B}(x_0, \sqrt{n}2^{-m}\gamma)$, donde x_0 es un punto cualquiera de dicho cubo. Así se tiene:

$$K_q^m \subset T_m \subset K_p^m + \sqrt{n}2^{-m}\gamma\overline{B}, \qquad K_p^m \subset T_m \subset K_q^m + \sqrt{n}2^{-m}\gamma\overline{B},$$

de modo que:

$$\delta(K_q^m, K_p^m) \leqslant \sqrt{n}2^{-m}\gamma,$$

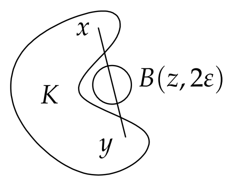
cualesquiera que sean p y q. De esta forma $\delta(K_m^m, K_p^m) \leqslant \sqrt{n}2^{-m}\gamma$ y, si $p \geqslant m$, todos los conjuntos K_p^p son de la forma $K_{p'}^m$ para $p \geqslant m$. Por tanto $\delta(K_m^m, K_p^p) \leqslant \sqrt{n}2^{-m}\gamma$, si $p \geqslant m$. Es decir:

$$\delta(C_p, C_m) \leqslant \sqrt{n}2^{-m}\gamma, \qquad \text{si } p \geqslant m.$$

A partir de esta desigualdad es inmediato probar que $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, lo que concluye la demostración. $\square$

TEOREMA 2.6. *$\mathcal{K}^n$ es un subconjunto cerrado de $(\mathcal{C}^n, \delta)$.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos que $\mathcal{C}^n - \mathcal{K}^n$ es abierto en $(\mathcal{C}^n, \delta)$. Sea $K \in \mathcal{C}^n - \mathcal{K}^n$ un conjunto compacto *no* convexo. Existen $x, y \in K$ tales que $[x, y]$ no está contenido en K. Existe entonces $\lambda \in (0, 1)$ tal que $z = \lambda x + (1-\lambda)y \notin K$. Como K es cerrado, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(z, 2\varepsilon) \cap K = \emptyset$. Sea $K' \in \mathcal{C}^n$ tal que $\delta(K', K) < \varepsilon$.



Como $K \subset K' + \varepsilon\overline{B}$, existen $x', y' \in K'$ tales que $d(x, x') < \varepsilon$, $d(y, y') < \varepsilon$. Entonces $z' = \lambda x' + (1-\lambda)y'$ verifica $d(z, z') < \varepsilon$. El punto z' no puede pertenecer a K' puesto que, en caso contrario, existiría $w \in K$ con $d(z', w) < \varepsilon$ y se tendría que $d(z, w) < 2\varepsilon$, lo que es imposible por la elección de ε ($B(z, 2\varepsilon) \cap K = \emptyset$). $\square$

TEOREMA 2.7 (selección de Blaschke). *De toda sucesión acotada de cuerpos convexos se puede extraer una subsucesión convergente a un cuerpo convexo.*

DEMOSTRACIÓN. Es consecuencia de la compacidad secuencial en $(\mathcal{C}^n, \delta)$ y del hecho de que $\mathcal{K}^n$ es un subconjunto cerrado de $(\mathcal{C}^n, \delta)$. $\square$

Es interesante observar que una sucesión $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es acotada en $(\mathcal{C}^n, \delta)$ si y sólo si $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 2.8. *Sea $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cuerpos convexos y $K \in \mathcal{K}$. La convergencia de la sucesión $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ a K es equivalente a las dos siguientes propiedades:*

1. *todo punto de K es límite de una sucesión de puntos $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, con $x_i \in K_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, y*
2. *dada una sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, con $x_i \in K_i$, el límite de cualquier subsucesión convergente de $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ pertenece a K.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos en primer lugar que K es el límite, con respecto a la distancia de Hausdorff, de la sucesión $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Veamos que se verifican 1. y 2. Sea $x \in K$. Definimos $x_i := p_{K_i}(x)$. Entonces $d(x, x_i) = d(x, K_i) \leqslant \delta(K, K_i) \to 0$ cuando $i \to \infty$. Por tanto $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a x. Sea ahora $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $x_i \in K_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Tomamos una subsucesión convergente que, por simplificar la notación, supondremos es la sucesión completa. Sea x su límite. Supongamos que $x \notin K$. Podemos encontrar $\rho > 0$ tal que $\overline{B}(x, \rho) \cap (K + \rho\overline{B}) = \emptyset$. Esto es una contradicción, puesto que, al converger $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ a K en distancia de Hausdorff, se tiene que $K_i \subset K + \rho\overline{B}$ para i suficientemente grande, de modo que $x_i \in B(x, \rho) \cap (K + \rho\overline{B})$.

Supongamos ahora que $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que verifica 1. y 2. Vamos a comprobar que $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a K en distancia de Hausdorff. Es decir, dado $\varepsilon > 0$, queremos comprobar que existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$K \subset K_i + \varepsilon\overline{B},$$
$$K_i \subset K + \varepsilon\overline{B}.$$

Supongamos que la primera inclusión no se verifica. Existe entonces una subsucesión $K_{i'}$ de K_i tal que $K \not\subset K_{i'} + \varepsilon\overline{B}$. Tomamos $x_{i'} \in K$ tal que $x_{i'} \notin K_{i'} + \varepsilon\overline{B}$. obviamente $d(x_{i'}, K_{i'}) \geqslant \varepsilon$. Pasando de nuevo a una subsucesión si es necesario, podemos suponer que $x_{i'} \to x \in K$. Pero $d(x, K_{i'}) \geqslant \varepsilon/2$ para i' suficientemente grande, lo que contradice el punto 1.

Supongamos por último que existe una subsucesión $K_{i'}$ de K_i tal que $K_{i'} \not\subset K + \varepsilon\overline{B}$. Podemos elegir entonces $x_{i'} \in K_{i'}$ tal que $x_{i'} \notin K + \varepsilon\overline{B}$. Elegimos un punto $y \in K$ y una sucesión $y_{i'}$ de puntos de $K_{i'}$ con $y_{i'} \to y$. El segmento $[x_{i'}, y_{i'}]$ corta a $\partial(K + \varepsilon\overline{B})$ en al menos un punto $z_{i'}$. Se tiene que $z_{i'} \in K_{i'}$ y que $\{z_{i'}\}$ es una sucesión acotada. Podemos suponer que converge a un punto z que, por el apartado 2., pertenece a K. Esto es una contradicción, puesto que $d(z, K) \geqslant \varepsilon$. □

3. Continuidad con respecto a la distancia de Hausdorff

PROPOSICIÓN 2.9. *La aplicación* conv : $\mathcal{C}^n \to \mathcal{K}^n$ *es una aplicación continua para la distancia de Hausdorff. Más aún, si K, $L \in \mathcal{C}^n$, entonces:*

$$\delta(\operatorname{conv} K, \operatorname{conv} L) \leqslant \delta(K, L).$$

Es decir, conv *es una aplicación Lipschitziana.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\alpha = \delta(K, L)$. Como $L \subset \operatorname{conv}(L)$, se tiene:

$$K \subset L + \alpha\overline{B} \subset \operatorname{conv}(L) + \alpha\overline{B}.$$

Tomando envolventes convexas y teniendo en cuenta que $\operatorname{conv}(L) + \alpha\overline{B}$ es un conjunto convexo, se obtiene que $\operatorname{conv}(K) \subset \operatorname{conv}(L) + \alpha\overline{B}$. Análogamente se demuestra que $\operatorname{conv}(L) \subset \operatorname{conv}(K) + \alpha\overline{B}$. Por la definición de la distancia de Hausdorff se tiene:

$$\delta(\operatorname{conv}(K), \operatorname{conv}(L)) \leqslant \alpha = \delta(K, L).$$

□

Es un ejercicio sencillo probar que las aplicaciones suma y unión son continuas para la distancia de Hausdorff. Sin embargo, se pueden dar ejemplos que demuestran que la intersección no es una función continua.

Recordemos que si $K \in \mathcal{K}^n$, entonces K es un conjunto Lebesgue medible en $\mathbb{R}^n$. Se define $\operatorname{vol}(K)$ como la medida de Lebesgue de K. Es importante destacar que $\operatorname{vol}(K) > 0$ si y sólo si K tiene puntos interiores.

Además, si C es un conjunto convexo y no compacto con interior no vacío, entonces $\operatorname{vol}(C) = \infty$.

TEOREMA 2.10. vol : $\mathcal{K}^n \to \mathbb{R}^+$ *es una aplicación continua (para la distancia de Hausdorff).*

DEMOSTRACIÓN. Sea $K \in \mathcal{K}^n$. Distinguiremos los casos en los que K tenga o no puntos interiores.

Si K no tiene puntos interiores, se tiene que K está contenido en un hiperplano H, y $\operatorname{vol}(K) = 0$. Sea $B(p,r)$, con $p \in H$, una bola que contiene a K, y sea $\alpha \in (0,r)$. Tomamos $K' \in \mathcal{K}^n$ tal que $\delta(K,K') < \alpha$. En particular, K' está contenido en un cilindro de base $B(p,r+\alpha) \cap H$ y altura α. Por tanto:

$$\operatorname{vol}(K') \leqslant \omega_{n-1}(r+\alpha)^{n-1}\alpha \leqslant C\alpha,$$

para una determinada constante C que sólo depende r. Esto demuestra la continuidad de vol en K.

Si K tiene puntos interiores, entonces se tiene que $\operatorname{vol}(K) > 0$. Supongamos que $0 \in \operatorname{int}(K)$. Daremos varios pasos.

Primer paso. Supongamos que existe $\lambda > 1$ tal que $K' \subset \lambda K$, $K \subset \lambda K'$. Entonces $|\operatorname{vol}(K) - \operatorname{vol}(K')| < \lambda^n(\lambda^n - 1) \operatorname{vol}(K)$.

Como $K \subset \lambda K'$, se tiene que $\operatorname{vol}(K) \leqslant \lambda^n \operatorname{vol}(K')$, de donde $\operatorname{vol}(K) - \operatorname{vol}(K') < (\lambda^n - 1) \operatorname{vol}(K')$. Como, por otra parte, $K' \subset \lambda K$, se tiene que $\operatorname{vol}(K') < \lambda^n \operatorname{vol}(K)$ y, por tanto, $\operatorname{vol}(K) - \operatorname{vol}(K') < (\lambda^n - 1)\lambda^n \operatorname{vol}(K)$. Razonando análogamente, y teniendo en cuenta que $\lambda > 1$, se tiene que $\operatorname{vol}(K') - \operatorname{vol}(K) < (\lambda^n - 1) \operatorname{vol}(K) < (\lambda^n - 1)\lambda^n \operatorname{vol}(K)$.

Segundo paso. Sea $\rho > 0$ tal que $\rho\overline{B} \subset \operatorname{int}(K)$, Entonces existe $\alpha > 0$ tal que, si $\delta(K,K') < \alpha$, entonces $\rho\overline{B} \subset K'$.

La hipótesis $\rho\overline{B} \subset \operatorname{int}(K)$ implica que $\rho < h_K$. Existe entonces $\varepsilon > 0$ tal que $\rho + \varepsilon < h_K$. Se toma $\alpha \leqslant \varepsilon$. Si $\delta(K,K') < \alpha$, entonces $K \subset K' + \alpha\overline{B}$, y $h_{\rho\overline{B}} < h_{(\rho+\varepsilon)\,\overline{B}} < h_K \leqslant h_{K'+\alpha\overline{B}}$. Por tanto:

$$\rho + \varepsilon = h_{(\rho+\varepsilon)\,\overline{B}} < h_K \leqslant h_{K'+\alpha\overline{B}} = h_{K'} + \alpha,$$

lo que implica que $h_{K'} > \rho + (\varepsilon - \alpha) \geqslant \rho$. Por tanto $\rho\overline{B} \subset K'$.

Concluimos ahora la demostración del teorema. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Tomamos $\lambda > 1$ tal que $\lambda^n(\lambda^n - 1) \operatorname{vol}(K) < \varepsilon$. Sea $\rho > 0$ tal que $\rho\overline{B} \subset \operatorname{int}(K)$. Por el segundo paso, existe $\alpha > 0$ tal que si $\delta(K,K') < \alpha$, entonces $\rho\overline{B} \subset K'$. Reducimos α si es necesario para que $\alpha \leqslant (\lambda - 1)\,\rho$. Utilizando esta desigualdad y que $\rho\overline{B} \subset K$ se tiene que:

$$K' \subset K + \alpha\overline{B} \subset K + (\lambda - 1)\,\rho\overline{B} \subset K + (\lambda - 1)\,K \subset \lambda K.$$

Análogamente, usando que $\rho\overline{B} \subset K'$, se demuestra que:

$$K \subset \lambda K'.$$

Por el primer paso, tenemos que:

$$|\operatorname{vol}(K) - \operatorname{vol}(K')| < \lambda^n(\lambda^n - 1) \operatorname{vol}(K) < \varepsilon,$$

por la elección de λ. Esto prueba la continuidad de vol en K y concluye la demostración. $\square$

4. Aproximación para la distancia de Hausdorff

Estudiamos ahora aproximación en la distancia de Hausdorff. Los resultados principales son que los politopos y los conjuntos convexos regulares son subconjuntos densos de $(\mathcal{K}^n, \delta)$. Recordemos que un politopo puede verse como una intersección finita y acotada de semiespacios cerrados (poliedro). Un conjunto convexo es regular si en cada punto de su frontera admite un único hiperplano soporte.

TEOREMA 2.11. *Sean $K \in \mathcal{K}^n$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe un politopo P tal que $P \subset K \subset P + \varepsilon\overline{B}$. En consecuencia, $\delta(P, K) \leqslant \varepsilon$. Esto implica que el conjunto de politopos es denso en $(\mathcal{K}^n, \delta)$.*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $\varepsilon > 0$. Por ser K compacto, existen $x_1, \ldots, x_m \in K$ tales que $K \subset B(x_1, \varepsilon) \cup \ldots \cup B(x_m, \varepsilon)$. Sea $P = \text{conv}(\{x_1, \ldots, x_m\})$. Por una parte se tiene que $P \subset K$. Por otra, $K \subset \bigcup_{i=1}^m B(x_i, \varepsilon) \subset \{x_1, \ldots, x_m\} + \varepsilon\overline{B} \subset P + \varepsilon\overline{B}$, lo que prueba el resultado. □

COROLARIO 2.12. *$(\mathcal{K}^n, \delta)$ es separable.*

DEMOSTRACIÓN. Basta tomar como conjunto denso y numerable el conjunto de los politopos $\text{conv}(\{q_1, \ldots, q_k\})$, con $k \in \mathbb{N}$, y $q_i \in \mathbb{R}^n$ de coordenadas racionales. □

Recordemos que un conjunto convexo es regular si en cada punto de su frontera admite un único hiperplano soporte.

TEOREMA 2.13. *Sean $K \in \mathcal{K}^n$, $\varepsilon > 0$. Entonces existe un conjunto convexo regular $R \in \mathcal{K}^n$ tal que $K \subset R \subset K + \varepsilon\overline{B}$. En particular, el conjunto de convexos regulares es denso en $(\mathcal{K}^n, \delta)$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $K \in \mathcal{K}^n$, $\varepsilon > 0$, se define:

$$\overline{\mathcal{U}}(K, \varepsilon) := \{p \in \mathbb{R}^n \,;\, d(p, K) \leqslant \varepsilon\}.$$

Tomamos como $R = \overline{\mathcal{U}}(K, \varepsilon)$. Evidentemente se tiene que $K \subset R \subset K + \varepsilon\overline{B}$. Basta probar que R es regular.

Sea $x \in \partial R \subset R$. Sea $y := p_K(x)$. Veamos que $d(x, y) = \varepsilon$. En primer lugar observamos que:

$$d(x, y) = d(x, p_K(x)) = d(x, K) \leqslant \varepsilon.$$

Si se tuviera que $d(x, y) < \varepsilon$, entonces $x \in \text{int}(B(x, \varepsilon)) \subset \text{int}(R)$, lo que contradice que $x \in \partial R$. Por tanto $x \in \partial\overline{B}(y, \varepsilon)$. Sea ahora H un hiperplano soporte de R en x. Como $x \in \partial\overline{B}(y, \varepsilon)$ y $\overline{B}(y, \varepsilon) \subset R$, se tiene que H es hiperplano soporte de $\overline{B}(y, \varepsilon)$ en x. Necesariamente H es el hiperplano tangente a $\partial\overline{B}(y, \varepsilon)$ en x. Esto prueba que R es regular y concluye la demostración. □

Una observación interesante es la siguiente: si $K \in \mathcal{K}^n$ y $\varepsilon > 0$, se toma:

$$R = \{p \in \mathbb{R}^n n \,;\, d(p, K) \leqslant \varepsilon\}.$$

Sabemos que R es un conjunto convexo regular por la demostración anterior. Para cada $x \in \partial R$, llamamos $N(x)$ al vector normal unitario exterior a R en x. Se tiene entonces que $N : \partial R \to \mathbb{S}^{n-1}$ es una aplicación lipschitziana, de constante de Lipschitz menor o igual que $2/\varepsilon$. Para probar esta afirmación, tomamos $x \in \partial R$. Por la demostración anterior, $\overline{B}(p_K(x), \varepsilon)$ tiene en x el mismo hiperplano soporte que R en x. Por tanto:

$$N(x) = \frac{x - p_K(x)}{|x - p_K(x)|} = \frac{1}{\varepsilon}\,(x - p_K(x)).$$

Entonces, si $y \in \partial R$, se sigue que:

$$\begin{aligned}|N(x) - N(y)| &= |\frac{1}{\varepsilon}\,\big(x - p_K(x) - y + p_K(y)\big)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\,\big(|x-y| + |p_K(x) - p_K(y)|\big) \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\,\big(|x-y| + |x-y|\big) = \frac{2}{\varepsilon}\,|x-y|,\end{aligned}$$

ya que p_K es una aplicación Lipschitziana de constante menor o igual que uno. Es decir, ∂R es de clase $C^{1,1}$.

CAPÍTULO 3

La desigualdad isoperimétrica

El objetivo de este capítulo es probar la desigualdad isoperimétrica para conjuntos convexos. El volumen de un conjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$ es su medida de Lebesgue. Veremos que es posible definir una noción de área, el contenido de Minkowski, que coincide con el área usual de una hipersuperficie de clase C^1.

Recordemos que si $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ es una superficie diferenciable que encierra una región acotada Ω, y $N : \Sigma \to \mathbb{S}^2$ es el vector normal unitario exterior a Σ, la superficie paralela a Σ a distancia $t > 0$ es el conjunto $\Sigma_t := \{x + tN(x);\ x \in \Sigma\}$. Utilizando fórmulas clásicas de variación de área y volumen se puede probar que $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \operatorname{vol}(\Sigma_t) = \operatorname{area}(\Sigma)$, donde $\operatorname{vol}(\Sigma_t)$ es el volumen encerrado por Σ_t. En consecuencia, el área de una superficie diferenciable se puede definir en términos del volumen y de la distancia.

Dado un conjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$, definimos $X_r := \{x \in \mathbb{R}^n;\ d(x, X) \leqslant r\}$. Si conseguimos establecer la convergencia del límite:

$$\frac{\operatorname{vol}(X_r) - \operatorname{vol}(X)}{r},$$

cuando $r \to 0$, tendremos una noción razonable de área para conjuntos convexos. En la siguiente sección, probaremos que la función $r \mapsto \operatorname{vol}(X_r)$, para $r > 0$, es un polinomio de grado n, lo que garantiza la existencia de dicho límite. Esta propiedad se demostrará en primer lugar para poliedros y se extenderá a conjuntos convexos arbitrarios por aproximación en distancia de Hausdorff.

1. Volumen del entorno tubular de un conjunto convexo

Comenzamos con la siguiente definición:

DEFINICIÓN 3.1. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo, $x \in \partial K$. El *cono normal* a K en x es el conjunto:

$$N(K, x) := \{u \,;\ u \text{ es vector normal exterior a } K \text{ en } p\} \cup \{0\}.$$

Si $\varepsilon > 0$, denotaremos:

$$N_\varepsilon(K, x) = \{u \in N(K, x) \,;\ |u| \leqslant \varepsilon\}.$$

Es fácil comprobar que el conjunto $N(K, x)$ es un cono convexo.

DEFINICIÓN 3.2. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Diremos que $F \subset K$ es una *cara* de K si F es convexo y, para todo segmento $I \subset K$ tal que $\operatorname{rel\,int}(I) \cap F \neq \emptyset$, se tiene que $I \subset F$.

La dimensión de una cara es su dimensión como conjunto convexo. Denotaremos el conjunto de todas las caras de K por $\mathcal{F}_K$ o, simplemente, por $\mathcal{F}$. Denotaremos por K^r a la unión de los interiores relativos de las caras de K de dimensión r. Si K tiene interior no vacío, el propio K es la única cara n-dimensional. Los puntos extremos de K son los elementos de K^0.

LEMA 3.3. *Sea K un conjunto convexo. Entonces $\{\text{rel int}(F)\ ;\ F \in \mathcal{F}_K\}$ es una partición de K.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos que:

1. $\text{rel int}(F_1) \cap \text{rel int}(F_2) = \emptyset$ si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_K$, $F_1 \neq F_2$.
2. $K = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_K} \text{rel int}(F)$.

1. Supongamos que $x \in \text{rel int}(F_1) \cap \text{rel int}(F_2)$. Sea $y \in F_1$. Como x pertenece al interior relativo del conjunto convexo F_1, existe $z \in F_1$ tal que $x \in (z, y)$. Como $x \in \text{rel int}(F_2)$ y F_2 es una cara de K, se tiene que $[z, y] \subset F_2$. Por tanto, $y \in F_2$. Esto demuestra que $F_1 \subset F_2$ y la inclusión opuesta se demuestra del mismo modo.

2. Obviamente $K \subset \bigcup_{F \in \mathcal{F}_K} \text{rel int}(F)$. Sea $x \in K$. Si no existe ningún segmento I tal que $x \in \text{rel int}(I)$, entonces $\{x\}$ es una cara 0-dimensional de K (un punto extremo). En caso contrario, definimos:

$$F = \bigcup_{\substack{x \in \text{rel int}(I) \\ I \subset K}} I.$$

Veamos que F es una cara y que $x \in \text{rel int}\, F$. Sean y, $z \in F$. Existen entonces y', $z' \in K$ tales que $x \in (y, y') \cap (z, z')$. Entonces $x \in (\lambda y + (1-\lambda)z, \lambda y' + (1-\lambda)z')$, y se sigue que $\lambda y + (1-\lambda)z \in F$. Esto demuestra que F es convexo.

Sea J un segmento tal que $\text{rel int}(J) \cap F \neq \emptyset$. Sea $z \in \text{rel int}(J) \cap F$. Existe entonces $z' \in F$ tal que $x \in (z, z')$. Si x y J están alineados, entonces $J \subset F$. En caso contrario, x está en el interior de la envolvente convexa de J y z' y, por la definición de F, $J \subset F$. Esto demuestra que F es una cara de K.

Veamos por último que $x \in \text{rel int}(F)$. Sea $y \in \text{rel int}(F) \subset F$. Por la definición de F, existe $y' \in F$ tal que $x \in (y, y')$. Sabemos entonces que $x \in \text{rel int}(F)$.

□

LEMA 3.4. *Sea K un conjunto convexo. Entonces se tiene:*

1. *Si $x \in K^r$, entonces* $\dim N(K, x) \leqslant n - r$.
2. *Si F es una cara de K, y $x, y \in$* $\text{rel int}\, F$, *entonces* $N(K, x) = N(K, y)$.

DEMOSTRACIÓN. 1. Si $x \in K^r$, entonces x pertenece al interior relativo de alguna cara r-dimensional F. Sea $\vec{S}$ el subespacio de direcciones de $\text{aff}(F)$. Si $u \in N(K, x)$, entonces $u \in (\vec{S})^\perp$. Por tanto, $\dim N(K, x) \leqslant \dim(\vec{S})^\perp = n - r$.

2. Si $u \in N(K, x)$, entonces $u \perp x - y$. Por tanto, $u \in N(K, y)$. □

En general no es verdad que $\dim N(K,x) = n - r$. Los puntos de borde de una bola son caras 0-dimensionales de la bola, pero la dimensión de su cono normal es 1.

LEMA 3.5. *Si P es un poliedro, y $x \in P^r$, entonces* $\dim K(P,x) = n - r$.

Si F es una cara de F, denotaremos por $N(K,F)$ al conjunto $N(K,x)$, para cualquier $x \in F$. Por el apartado 2 del lema anterior, dicho conjunto no depende de x.

DEMOSTRACIÓN. Sea F la cara r-dimensional de P que contiene a x en su interior. Sean $H_1, \ldots, H_k$ hiperplanos tales que $P = H_1^- \cap \ldots \cap H_k^-$. Supongamos que $H_1, \ldots, H_s$ son los hiperplanos que contienen a x, y sean $u_1, \ldots, u_s$ los vectores normales unitarios exteriores.

Veamos que $(H_1 \cap \ldots \cap H_s) \cap P$ es una cara de P. Dicho conjunto es convexo. Sea $I \subset P$ un segmento tal que $\operatorname{rel\,int} I \cap (H_1 \cap \ldots \cap H_s) \cap P$. Como H_i es un hiperplano soporte de P, se tiene que $I \subset (H_1 \cap \ldots \cap H_s) \cap P$

Se tiene entonces que $\operatorname{rel\,int}(H_1 \cap \ldots \cap H_s) \cap P = \operatorname{rel\,int} F$, ya que los interiores relativos de las caras forman una partición de P, y x está en ambos conjuntos. Por tanto $(H_1 \cap \ldots \cap H_s) \cap P = F$ y $H_1 \cap \ldots \cap H_s = \operatorname{aff}(F)$.

Como $\dim F = r$, existen $n - r$ vectores independientes en el conjunto $\{u_1, \ldots, u_s$. Supondremos que son $u_1, \ldots, u_{n-r}$. Como $u_1, \ldots, u_{n-r} \in N(K,x)$, tenemos que $\dim N(K,x) \geqslant n - r$, lo que demuestra el resultado. □

TEOREMA 3.6. *Sea $P \subset \mathbb{R}^n$ un poliedro. Se tiene entonces:*

$$\operatorname{vol}(P_\varepsilon) = \operatorname{vol}(P) + c_1\varepsilon + \ldots + c_n\varepsilon^n,$$

donde:

$$c_i = \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_K \\ \dim F = n-i}} \operatorname{vol}_{n-i}(F) \operatorname{vol}_i(N_1(K,F)), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

En consecuencia, $\operatorname{vol}(P_\varepsilon)$ *es un polinomio de grado n en la variable ε.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in P_\varepsilon - P$, y sea y la proyección de x sobre P. Entonces y pertenece a alguna cara $(n-i)$-dimensional F de P contenida en el borde de P, y $x = y + tu_P(x)$, lo que demuestra que x pertenece a la imagen F_ε de la aplicación:

$$\begin{aligned} F \times N_\varepsilon(P,F) &\to \mathbb{R}^n \\ (x,u) &\mapsto x + u. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$P_\varepsilon - P = \bigcup_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ \dim F < n}} F_\varepsilon.$$

Como los conjuntos F_ε se cortan en conjuntos de medida de Lebesgue cero, se tiene que:

$$\operatorname{vol}(P_\varepsilon) - \operatorname{vol}(P) = \sum_{\substack{F \in \mathcal{F} \\ \dim F < n}} \operatorname{vol}(F_\varepsilon).$$

Como F y $N(P,F)$ están contenidos en subespacios ortogonales complementarios, podemos aplicar el Teorema de Fubini para calcular el volumen de F_ε y obtenemos

$$\mathrm{vol}(F_\varepsilon) = \mathrm{vol}_{n-i}(F)\,\mathrm{vol}_i(N_\varepsilon(P,F)).$$

Reescalando se tiene:

$$\mathrm{vol}_i(N_\varepsilon(P,F)) = \varepsilon^i\,\mathrm{vol}_i(N_1(P,F)).$$

□

TEOREMA 3.7. *Sea $K \in \mathcal{K}^n$. Entonces* $\mathrm{vol}(K_\varepsilon)$ *es un polinomio de grado n en la variable ε. Los coeficientes de dicho polinomios son funciones continuas para la distancia de Hausdorff.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $K \in \mathcal{K}^n$, y sea $\{P_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de poliedros que converge a K en la métrica de Hausdorff. Sea $\varepsilon_0 > 0$. Para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$, los conjuntos $(P_i)_\varepsilon$, K_ε están contenidos en un conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y, por tanto, forman un conjunto relativamente compacto para la distancia de Hausdorff. La función volumen es uniformemente continua para la distancia de Hausdorff en dicho conjunto. Como $\delta((P_i)_\varepsilon, K_\varepsilon) \leqslant \delta(P_i, K)$, esto implica que los polinomios $\varepsilon \mapsto \mathrm{vol}((P_i)_\varepsilon)$ de grado n convergen uniformemente a la función $\varepsilon \mapsto \mathrm{vol}(K_\varepsilon)$ en el intervalo $[0,\varepsilon_0]$. Se sigue entonces que $\mathrm{vol}(K_\varepsilon)$ es un polinomio de grado n en dicho intervalo.

Si $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente a K en distancia de Hausdorff, entonces las funciones $\mathrm{vol}((K_i)_\varepsilon)$ convergen uniformemente a $\mathrm{vol}(K_\varepsilon)$ en cada intervalo acotado $[0,\varepsilon_0]$. Por tanto, los coeficientes de los polinomios convergen. □

2. Contenido de Minkowski

Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo (conjunto convexo compacto). Su *contenido de Minkowski* o su *área* es la cantidad:

$$\mathrm{area}(X) = A(X) := \lim_{r\to 0} \frac{\mathrm{vol}(X_r) - \mathrm{vol}(X)}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{\mathrm{vol}(X + r\overline{B}) - \mathrm{vol}(X)}{r}.$$

La existencia del límite se sigue de que $\mathrm{vol}(X_r) - \mathrm{vol}(X)$ es un polinomio de grado n en r. El área es el coeficiente de grado uno del polinomio.

El área es siempre una cantidad no negativa por ser límite de cantidades no negativas. El perímetro de un conjunto convexo es cero, por ejemplo, cuando la dimensión del conjunto convexo es menor o igual que $n-2$. El área de un poliedro puede calcularse fácilmente:

PROPOSICIÓN 3.8. *Sea $P \subset \mathbb{R}^n$ un poliedro n-dimensional de caras $(n-1)$-dimensionales $F_1, \ldots, F_r$. Entonces:*

$$\mathrm{area}(P) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{vol}_{n-1}(F_i).$$

La continuidad del área con respecto a la métrica de Hausdorff se sigue de la continuidad de los coeficientes del polinomio $\mathrm{vol}(X_\varepsilon)$.

PROPOSICIÓN 3.9. *El área es una función continua para la distancia de Hausdorff.*

Una propiedad interesante del área, que no demostraremos ni tampoco utilizaremos, es la siguiente:

PROPOSICIÓN 3.10. *Si* $X \subset X'$, *entonces* $\operatorname{area}(X) \leqslant \operatorname{area}(X')$.

3. Simetrización de Steiner

En esta sección, consideramos un cuerpo convexo $X \subset \mathbb{R}^n$, y un hiperplano $H \subset \mathbb{R}^n$. Para $x \in H$, consideramos la recta L_x ortogonal a H que pasa por x. La intersección $L_x \cap X$ es, o bien vacía, o un conjunto convexo compacto de L_x. En el último caso, definimos $\lambda(x)$ como la longitud del segmento $L_x \cap X$.

Definimos S_x como el conjunto vacío si la intersección $L_x \cap X$ es vacía, o como el segmento en L_x centrado en x de longitud $\lambda(x)$ si $L_x \cap X \neq \emptyset$. El conjunto S_x es, o bien vacío, o un punto si $L_x \cap X$ es un punto, o un segmento de la misma longitud que $L_x \cap X$. Observamos que $y \in S_x$ si y sólo si $|y - x| \leqslant \lambda(x)/2$.

Se define el simetrizado de Steiner de X con respecto a H, que se denotará por X_H, al conjunto:

$$X_H := \bigcup_{x \in H} S_x.$$

Se dirá que X_H se obtiene de X por simetrización con respecto al hiperplano H.

Una propiedad inmediata es que X_H es simétrico con respecto al hiperplano H. Las propiedades del simetrizado de Steiner se resumen en el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 3.11.

1. *Si* $X \subset X'$, *entonces* $X_H \subset X'_H$.
2. *Si* X *es convexo, entonces* X_H *también lo es.*
3. $\operatorname{vol}(X_H) = \operatorname{vol}(X)$.
4. $\operatorname{diam}(X_H) \leqslant \operatorname{diam}(X)$.
5. $(X + v)_H = X_H + w$, *donde* w *es la proyección ortogonal de* v *sobre* H.
6. $\operatorname{area}(X_H) \leqslant \operatorname{area}(X)$. *La igualdad se da si y sólo si* X *es simétrico con respecto a un hiperplano paralelo a* H, *o bien* X *está contenido en un hiperplano ortogonal a* H.

Iremos demostrando estas propiedades a lo largo de esta sección. Comenzaremos con el siguiente lema técnico:

LEMA 3.12. *En las condiciones anteriores, sean* $x \in H$, $\lambda(x)$ *la longitud del intervalo* $S_x = L_x \cap X \neq \emptyset$. *Entonces:*

1. $\limsup_{i \to \infty} \lambda(x_i) \leqslant \lambda(x)$ *si* $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset H$, $L_{x_i} \cap H \neq \emptyset$, *y y* $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \to x$.
2. $\lambda\big((1-\mu)\, x_1 + \mu x_2\big) \geqslant (1-\mu)\, \lambda(x_1) + \mu \lambda(x_2)$, *donde* $\mu \in [0,1]$, $x_1, x_2 \in H$. *Es decir, la función* $\lambda : H \to \mathbb{R}^+$ *es convexa.*

DEMOSTRACIÓN. Demostramos la primera parte. Podemos suponer que $L_{x_i} \cap X$ es distinto del conjunto vacío e igual a $[a_i, b_i]$, con $a_i = b_i$ eventualmente. Pasando a una subsucesión si es preciso, podemos suponer que $\{\lambda(x_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ converge a $\limsup_{i \to \infty} \lambda(x_i)$ y, por la compacidad de X, que $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} \to a$, $\{b_i\}_{i \in \mathbb{N}} \to b$. Por la continuidad de la proyección ortogonal, los puntos a y b se proyectan sobre x. Por la convexidad de X, $[a,b] \subset L_x \cap X$. Por tanto $\lambda(x) \geqslant |b-a|$, de modo que $\lambda(x_i) = |b_i - a_i| \to |b-a| \leqslant \lambda(x)$, como queríamos demostrar.

Para probar la segunda parte, supongamos que $L_{x_1} \cap X = [a_1, b_1]$, $L_{x_2} \cap X = [a_2, b_2]$. Supongamos además que los vectores $b_1 - a_1$ y $b_2 - a_2$ apuntan en la misma dirección, es decir, que $b_1 - a_1 = \rho\,(b_2 - a_2)$, donde $\rho > 0$. Tomamos $\mu \in [0,1]$. Por la convexidad de X, $\mu a_1 + (1-\mu)\,a_2$, $\mu b_1 + (1-\mu)\,b_2 \in X$ y se proyectan ortogonalmente sobre $\mu x_1 + (1-\mu)\,x_2$. De nuevo por la convexidad de X se tiene:

$$[\mu a_1 + (1-\mu)\,a_2, \mu b_1 + (1-\mu) b_2] \subset L_{\mu x_1 + (1-\mu)\,x_2} \cap X.$$

Tomando medidas, teniendo en cuenta que $b_1 - a_1$ y $b_2 - a_2$ son proporcionales y apuntan en la misma dirección:

$$\begin{aligned} |\mu b_1 + (1-\mu)\,b_2 - \mu a_1 - (1-\mu)\,a_2| &= \mu\,|b_1 - a_1| + (1-\mu)\,|b_2 - a_2| \\ &= \mu\lambda(x_1) + (1-\mu)\,\lambda(x_2) \leqslant \lambda(\mu x_1 + (1-\mu)\,x_2), \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. □

Demostramos en el siguiente resultado todas las propiedades de la simetrización de Steiner, excepto las relativas al área.

TEOREMA 3.13. *Si $X \subset \mathbb{R}^n$ es un cuerpo convexo, entonces X_H también lo es. Además* $\operatorname{vol}(X_H) = \operatorname{vol}(X)$ *y* $\operatorname{diam}(X_H) \leqslant \operatorname{diam}(X)$.

DEMOSTRACIÓN. Probamos en primer lugar que X_H es un cuerpo convexo si X lo es.

Veamos que X_H es acotado. Como X lo es, existe una bola B tal que $X \subset B$. Entonces se tiene que $X_H \subset B_H$. Pero B es simétrica con respecto a un hiperplano paralelo a H, de modo que $B_H = B + v = B'$ para un cierto vector v. Por tanto, X_H está contenido en la bola B', del mismo radio que B, y es acotado.

Veamos que X_H es cerrado. Sea $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset X_H$ una sucesión convergente a un punto x. Queremos probar que $x \in X_H$. Para cada $i \in \mathbb{N}$, sea $z_i \in H$ la proyección de x_i sobre H. Entonces $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}} \to z$, donde $z \in H$ es la proyección ortogonal de x sobre H. Como $x_i \in X_H$ se tiene que $|x_i - z_i| \leqslant \frac{1}{2}\,\lambda(z_i)$. Por tanto:

$$|x - z| = \lim_{i\to\infty} |x_i - z_i| \leqslant \limsup_{i\to\infty} \frac{1}{2}\,\lambda(z_i) \leqslant \frac{1}{2}\,\lambda(z).$$

Esto prueba que $x \in X_H$.

Veamos que X_H es convexo. Sean x_1, $x_2 \in X_H$, y sean z_1, z_2, respectivamente, las proyecciones sobre H. Sea $\mu \in [0,1]$. El punto $x_\mu := \mu x_1 + (1-\mu)\,x_2$ se proyecta sobre el punto $z_\mu := \mu z_1 + (1-\mu)\,z_2$. Entonces:

$$\begin{aligned} |x_\mu - z_\mu| &\leqslant \mu|x_1 - z_1| + (1-\mu)\,|x_2 - z_2| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\big(\mu\lambda(z_1) + (1-\mu)\,\lambda(z_2)\big) \\ &\leqslant \frac{1}{2}\lambda(x_\mu), \end{aligned}$$

por tanto $x_\mu \in X_H$ para $\mu \in [0,1]$, de donde se deduce que X_H es convexo.

Al ser X_H un conjunto acotado, cerrado y convexo, concluimos que es un cuerpo convexo.

La igualdad $\mathrm{vol}(X_H) = \mathrm{vol}(X)$ es una aplicación del Teorema de Fubini.

Veamos por último que $\mathrm{diam}(X_H) \leqslant \mathrm{diam}(X)$. Sean x_1, $x_2 \in X_H$ tales que $d(x_1, x_2) = \mathrm{diam}(X_H)$. Llamamos z_1, z_2 a las proyecciones de x_1, x_2, respectivamente, sobre H. Supongamos que $L_{x_1} \cap X = [a_1, b_1]$, $L_{x_2} \cap X = [a_2, b_2]$. Es fácil ver que:

$$d(x_1, x_2)^2 = d(z_1, z_2)^2 + \left(\frac{1}{2}\left(\lambda(z_1) + \lambda(z_2)\right)\right)^2,$$

y que … □

TEOREMA 3.14. *Si* $X \subset \mathbb{R}^n$ *es un cuerpo convexo, entonces* $\mathrm{area}(X_H) \leqslant \mathrm{area}(X)$.

DEMOSTRACIÓN. De la definición de área y de la igualdad $\mathrm{vol}(X_H) = \mathrm{vol}(X)$, basta probar que $\mathrm{vol}(X_H + \rho\overline{B}) \leqslant \mathrm{vol}(X + \rho\overline{B})$, donde $\overline{B}$ es la bola cerrada unidad centrada en el origen, para deducir que $\mathrm{area}(X_H) \leqslant \mathrm{area}(X)$. Más aún, como $\mathrm{vol}(X + \rho\overline{B}) = \mathrm{vol}((X + \rho\overline{B})_H)$, es suficiente demostrar que $X_H + \rho\overline{B} \subset (X + \rho\overline{B})_H$.

Probemos esta última inclusión. Sean $x \in X_H$, $v \in \overline{B}$, y sean $z \in H$ la proyección ortogonal de x sobre H, y w la proyección del vector v en la dirección de H. Veamos que $x + \rho v \in (X + \rho\overline{B})_H$.

Sean $\lambda(q)$, $\tilde{\lambda}(q)$ las longitudes de $L_q \cap (X + \rho\overline{B})$, $L_q \cap X$, respectivamente. La proyección ortogonal de $x + \rho v$ sobre H es $z + \rho w$. Así se tiene:

$$|(x + \rho v) - (z + \rho w)| \leqslant |x - z| + \rho\sqrt{|v|^2 - |w|^2} \leqslant \frac{1}{2}\,\tilde{\lambda}(z) + \rho\sqrt{1 - |w|^2}.$$

Por tanto, para probar que $x + \rho v \in (X + \rho\overline{B})_H$ basta comprobar que:

$$\frac{1}{2}\,\tilde{\lambda}(z) + \rho\sqrt{1 - |w|^2} \leqslant \frac{1}{2}\,\lambda(z + \rho w).$$

Supongamos que $L_z \cap X = [a, b]$, con $\tilde{\lambda}(z) = |b - a|$. Elegimos v_1, $v_2 = -v_1$ perpendiculares a H de forma que $|v_1 + w| = 1 = |v_2 + w|$. Supongamos que $v_1 = \lambda\,(b - a)$, con $\lambda > 0$. Los puntos $b + \rho\,(w + v_1)$, $a + \rho\,(w + v_2)$ pertenecen a $X + \rho\overline{B}$. Además, como $v_1, v_2 \perp \vec{H}$, se tiene que ambos puntos se proyectan sobre $z + \rho w$. Es decir, ambos puntos pertenecen a $L_{z+\rho w}$. De todo esto se sigue:

$$\begin{aligned}
\lambda(z + \rho w) &\geqslant |a + \rho\,(w + v_2) - b - \rho\,(w + v_1)| = \\
&= |a - b + 2\rho v_2| \\
&= |b - a| + 2\rho|v_1| \\
&= \tilde{\lambda}(z) + 2\rho\sqrt{1 - |w|^2},
\end{aligned}$$

lo que prueba el resultado. □

TEOREMA 3.15. *Sea* $X \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto convexo,* H *un hiperplano. Entonces* $\mathrm{area}(X_H) = \mathrm{area}(X)$ *si y sólo si* X *es simétrico con respecto a un hiperplano paralelo a* H*, o* X *está contenido en un hiperplano ortogonal a* H.

DEMOSTRACIÓN. Si X está contenido en un hiperplano ortogonal a H, entonces $\operatorname{area}(X) = 2\operatorname{vol}_{n-1}(X) = \operatorname{area}(X_H)$.

Supongamos entonces que X no está contenido en ningún hiperplano ortogonal a H. Proyectamos X ortogonalmente sobre H y obtenemos un conjunto convexo $X_0 \subset H$ con puntos interiores en H. Supondremos por simplicidad que $H = \{x_n = 0\}$.

Para cada $(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in X_0$ se definen dos funciones $f(x_1, \dots, x_{n-1})$, $g(x_1, \dots, x_{n-1})$ del siguiente modo: $(x_1, \dots, x_n) \in X$ si y sólo si $g(x_1, \dots, x_{n-1}) \leqslant x_n \leqslant f(x_1, \dots, x_{n-1})$. La función f es cóncava y la función g es convexa.

El área de X puede calcularse como:

$$\operatorname{area}(X) = \int_{\partial X_0} (f-g) + \int_{X_0} \left(\sqrt{1+|\nabla f|^2} + \sqrt{1+|\nabla g|^2} \right),$$

donde ∇f, ∇g existen en casi todo punto por ser funciones cóncava y convexa, respectivamente.

El simetrizado de Steiner de S con respecto a H es:

$$\left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ (x_1, \dots, x_{n-1}) \in X_0, -\left(\frac{f-g}{2}\right) \leqslant x_n \leqslant \left(\frac{f+g}{2}\right) \right\}.$$

Aplicando el cálculo anterior del área:

$$\operatorname{area}(X_H) = \int_{\partial X_0} (f-g) + \int_{X_0} 2\sqrt{1 + \left|\nabla\left(\frac{f-g}{2}\right)\right|^2}.$$

Observamos que:

$$2\left(1, \nabla\left(\frac{f-g}{2}\right)\right) = (1, \nabla f) + (1, -\nabla g).$$

Por la desigualdad triangular:

$$2\sqrt{1 + \left|\nabla\left(\frac{f-g}{2}\right)\right|^2} \leqslant \sqrt{1+|\nabla f|^2} + \sqrt{1+|\nabla g|^2}.$$

Integrando sobre X_0 y añadiendo $\int_{\partial X_0} (f-g)$ obtenemos que $\operatorname{area}(X_0) \leqslant \operatorname{area}(X)$.

Si $\operatorname{area}(X_H) = \operatorname{area}(X)$ obtenemos igualdad en la aplicación anterior de la desigualdad triangular, de modo que $(1, \nabla f)$ y $(1, -\nabla g)$ son proporcionales. Concluimos que $\nabla f = -\nabla g$, de donde obtenemos que la diferencia $f - g$ es una constante $2a$. Esto implica que X es simétrico con respecto al hiperplano $\{x_n = a\}$, paralelo a $H = \{x_n = 0\}$. $\square$

4. La desigualdad isoperimétrica

TEOREMA 3.16 (La desigualdad isoperimétrica para conjuntos convexos). *Sea $Z \subset \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo. Sea $\overline{B} \subset \mathbb{R}^n$ una bola cerrada del mismo volumen que Z. Entonces* $\operatorname{area}(Z) \geqslant \operatorname{area}(\overline{B})$. *La igualdad se da si y sólo si Z y $\overline{B}$ difieren en una traslación.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $v = \mathrm{vol}(Z) = \mathrm{vol}(\overline{B})$. Como $\mathrm{vol}(Z) > 0$, Z tiene puntos interiores. Consideramos la familia:

$$\mathcal{U}_r := \{Y \in \mathcal{K}_0^n;\ \exists \overline{B}_r \subset Y, \mathrm{vol}(Y) = v\}.$$

Los elementos de $\mathcal{U}_r$ son cuerpos convexos de volumen v que contienen una bola cerrada $\overline{B}_r$ de radio $r > 0$. Elegimos $r > 0$ de modo que $Z \in \mathcal{U}_r$. Fijamos un punto $x \in \mathbb{R}^n$ y llamamos:

$$\mathcal{B}_r := \{Y \in \mathcal{K}_0^n;\ \overline{B}(x,r) \subset Y, \mathrm{vol}(Y) = v\}.$$

Se tiene que $\mathcal{B}_r \subset \mathcal{U}_r$, y que todo elemento de $\mathcal{U}_r$ puede trasladarse a un elemento de $\mathcal{B}_u$. De esta forma se obtiene:

$$\inf_{Y \in \mathcal{U}_r} \mathrm{area}(Y) = \inf_{Y \in \mathcal{B}_r} \mathrm{area}(Y).$$

La justificación para utilizar el espacio $\mathcal{B}_r$ en lugar de $\mathcal{U}_r$ es la acotación de $\mathcal{B}_r$ con la medida de Hausdorff ($\mathcal{U}_r$ no lo es).

Veamos que:

$$\mathcal{D}_r := \sup_{Y \in \mathcal{U}_r} \mathrm{diam}(Y) = \sup_{Y \in \mathcal{B}_r} \mathrm{diam}(Y) < \infty.$$

Sea $Y \in \mathcal{U}_r$. Por definición existe $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $\overline{B}(z,r) \subset Y$. Dado $y \in Y - \overline{B}(z,r)$, consideramos el hiperplano H ortogonal a $\vec{zy}$ que pasa por z. La intersección $H \cap \overline{B}(z,r)$ es un disco D de radio r y dimensión $n-1$. El cono de base D y vértice y verifica $\mathrm{conv}(D \cup \{y\}) \subset Y$. Sea $h := d(z,y)$. Entonces:

$$\mathrm{vol}(\mathrm{conv}(D \cup \{y\})) = \int_0^h cr(t)^{n-1} dt = cr^{n-1}\frac{h}{n},$$

donde c es el volumen $n-1$ dimensional del disco de la misma dimensión y radio 1, y $r(t) = r\,(h-t)/h$. Como $\mathrm{conv}(D \cup \{y\}) \subset Y$, obtenemos la desigualdad:

$$d(z,y) = h \leqslant \frac{n}{cr^{n-1}}\, v,$$

para cualquier $y \in Y - \overline{B}(z,r)$. En consecuencia:

$$\mathrm{diam}(Y) \leqslant \frac{2n}{cr^{n-1}}\, v,$$

y, por tanto, $\mathcal{B}_r$ es acotado para la métrica de Hausdorff.

Sea $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}_r$ una sucesión tal que:

$$\lim_{i \to \infty} \mathrm{area}(X_i) = \inf_{Y \in \mathcal{B}_r} \mathrm{area}(Y) := A.$$

Como $\mathcal{B}_r$ es acotado para la distancia de Hausdorff, podemos extraer una subsucesión convergente de $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ a un cuerpo convexo X. Por la continuidad del volumen y del área para la métrica de Hausdorff, obtenemos que $\mathrm{vol}(X) = v$ y $\mathrm{area}(X) = A$. Además $\overline{B}(x,r) \subset X$, por lo que $X \in \mathcal{B}_r$.

Veamos que X es una bola. Sea H un hiperplano cualquiera. Afirmamos que existe H' hiperplano paralelo a H tal que X es simétrico. Para probar esta afirmación, sea R una recta ortogonal a H que corta a X en un segmento I que contiene más de un punto. Tomamos como H' el hiperplano paralelo a H que pasa por el punto medio de I. El simetrizado de Steiner de X con respecto a H', $X_{H'}$, satisface las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{vol}(X_{H'}) = \mathrm{vol}(X)$,
2. $\mathrm{area}(X_{H'}) \leqslant \mathrm{area}(X)$ y la desigualdad es estricta si X no es simétrico con respecto a un hiperplano paralelo a H', y
3. $X_{H'}$ contiene una bola cerrada de radio $r > 0$.

Por la tercera propiedad, y ser X el conjunto de área mínima de $\mathcal{B}_r$, se tiene que X es simétrico con respecto a un hiperplano paralelo a H'. Pero la elección de H' fuerza a que X sea simétrico con respecto a dicho hiperplano.

Sean $x_1, \ldots, x_n$ direcciones ortogonales de $\mathbb{R}^n$. Consideramos n hiperplanos de simetría de X ortogonales a las direcciones anteriores. Sea o el único punto de corte de dichos hiperplanos. Se tiene entonces que X es invariante con respecto a la simetría central de centro o. Por la convexidad de X, también se tiene que $o \in X$.

Si H es un hiperplano arbitrario que pasa por o, entonces X es simétrico con respecto a H. Para probar esto, tomamos un hiperplano de simetría H' de X paralelo a H. Si $o \in H'$, entonces $H = H'$ y hemos terminado. Si $o \notin H'$, sea o' el simétrico de o con respecto a H'. La intersección de la recta oo' con X será un segmento no trivial I. Como la simetría central de centro o deja invariante a X, el punto o es el centro del segmento I. Concluiríamos que $o \in H'$, lo cual es imposible.

Probemos finalmente que X es una bola. Sean $x_1, x_2 \in \partial X$, y supongamos que $(x_1, x_2) \subset \mathrm{int}(X)$. Consideramos el hiperplano H ortogonal a x_1x_2 que pasa por el punto medio de x_1 y x_2. Argumentando como antes, se demuestra que H es hiperplano de simetría de X y $d(x_1, o) = d(x_2, o)$.

Veamos que el caso $(x_1, x_2) \subset \partial X$ no puede darse. Si así fuera, tomamos la recta R determinada por x_1, x_2. Supongamos que $R \cap X = [y_1, y_2] \supset [x_1, x_2]$. Sea H el hiperplano ortogonal a R que pasa por el punto medio de $[y_1, y_2]$. Sea H' un hiperplano que pasa por o y tiene vector normal en el plano determinado por o y por R. Dicho hiperplano es de simetría, de modo que reflejando el segmento $[y_1, y_2]$ se obtienen puntos de X. Esto contradice que los puntos de $[y_1, y_2]$ sean puntos frontera de X.

Por tanto ∂X es un subconjunto de una esfera S de centro o. Si $\partial X \neq S$, obtendríamos fácilmente una contradicción, con lo que concluye la demostración. Por tanto, X es una bola cerrada.

Si $\mathrm{area}(X) = \mathrm{area}(X')$, entonces X' es también un mínimo del área con volumen fijo, por lo que X' es una bola del mismo radio que X, por lo que X' es una traslación de X. □

5. La desigualdad isodiamétrica

TEOREMA 3.17 (Desigualdad isodiamétrica en $\mathbb{R}^n$). *Si $X \subset \mathbb{R}^n$ es un cuerpo convexo, entonces:*

$$\mathrm{vol}(X) \leqslant \omega_n \left(\frac{\mathrm{diam}(X)}{2} \right)^n,$$

donde $\omega_n := \mathrm{vol}(\overline{B}(0,1))$.

La igualdad se da si y sólo si X es una bola cerrada de radio $\mathrm{diam}(X)/2$.

Es decir, la bola minimiza el diámetro de entre todos los conjuntos con volumen dado. La desigualdad isodiamétrica es cierta para conjuntos cerrados arbitrarios. Para demostrarlo basta pasar a la envolvente convexa y aplicar la desigualdad para conjuntos convexos.

La demostración de la desigualdad se basa en los dos siguientes lemas:

LEMA 3.18. *Sea X un cuerpo convexo, y sea:*

$$\mathcal{N}(X) := \{C \in \mathcal{K}^n;\ \mathrm{vol}(C) \geqslant \mathrm{vol}(X), \mathrm{diam}(C) \leqslant \mathrm{diam}(X)\}.$$

Existe entonces en $\mathcal{N}(X)$ un cuerpo convexo que minimiza el circunradio.

DEMOSTRACIÓN. Como $X \in \mathcal{N}(X)$, si $r(X)$ es el circunradio de X, y D_X la circumbola, entonces:

$$r_0 := \min_{K \in \mathcal{N}(X)} r(K) \leqslant r(X).$$

Sea $\mathcal{H} := \{F \in \mathcal{K}^n;\ F \subset \mathcal{D}_X\}$. Entonces $\mathcal{H} \cap \mathcal{N}(X)$ es acotado en la métrica de Hausdorff, y:

$$\min_{K \in \mathcal{H} \cap \mathcal{N}(X)} r(K) = \min_{K \in \mathcal{N}(X)} r(X).$$

Sea $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H} \cap \mathcal{N}(X)$ una sucesión tal que $r(X_i) \to r_0$. Por el Teorema de Selección de Blaschke podemos suponer que $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}} \to X_\infty \in \mathcal{K}^n$. Como $\mathrm{diam}(X_i) \leqslant \mathrm{diam}(X)$ y $\mathrm{vol}(X_i) \geqslant \mathrm{vol}(X)$, y el diámetro y el volumen son continuos para la métrica de Hausdorff se tiene que $\mathrm{diam}(X_\infty) \leqslant \mathrm{diam}(X)$ y que $\mathrm{vol}(X_\infty) \geqslant \mathrm{vol}(X)$. Por tanto, $X_\infty \in \mathcal{N}(X)$. Puesto que el circunradio es continuo para la métrica de Hausdorff se obtiene que:

$$r(X_\infty) = \min_{K \in H \cap \mathcal{N}(X)} r(K) = \min_{K \in \mathcal{N}(X)} r(K),$$

lo que prueba el resultado. □

LEMA 3.19. *Sea X un cuerpo convexo. Supongamos que $X \neq \mathcal{D}_X$. Entonces existe un número finito de simetrizaciones de Steiner con respecto a hiperplanos $H_1, \ldots, H_k$ de modo que:*

$$r\big[(\ldots(X_{H_1})_{H_2} \ldots)_{H_k}\big] < r(X).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $S := \partial \mathcal{D}_X$. Existe $x \in S - X$ (en caso contrario, $S \subset X$ y, por tanto, $\mathcal{D}_X \subset X$ y se sigue que $\mathcal{D}_X = X$, lo que contradice la hipótesis). Al ser X cerrado, $S - X$ es abierto en S. Existe entonces $\varepsilon > 0$ tal que $B_S(x, \varepsilon) = B(x, \varepsilon) \cap S \subset S - X$. Por otra parte $S \cap X$ es compacto, por lo que existen $x_1, \ldots, x_k \in S \cap X$ tales que:

$$S \cap X \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_S(x_i, \varepsilon).$$

Sean $H_1, \ldots, H_k$ los hiperplanos que bisecan los segmentos $[x, x_i]$ y son ortogonales a la recta xx_i, $i = 1, \ldots, k$, respectivamente. El centro de la circumbola está contenido en todos los hiperplanos H_i.

Se tiene que:

$$X_{H_1} \cap B_S(x, \varepsilon) = \emptyset, \qquad X_{H_1} \cap B_S(x_1, \varepsilon) = \emptyset.$$

De esta forma, hemos sustituido X por un conjunto que ya no toca a S en $S \cap B(x_1, \varepsilon)$. Reiterando el proceso:

$$(X_{H_1})_{H_2} \cap (B_S(x, \varepsilon) \cup B_S(x_2, \varepsilon) = \emptyset,$$

y además se mantiene $(X_{H_1})_{H_2} \cap B_S(x_1, \varepsilon) = \emptyset$ porque $X_{H_1} \cap B_S(x_1, \varepsilon) = \emptyset$. Repitiendo el proceso, obtenemos un conjunto $\big(\ldots (X_{H_1})_{H_2} \ldots\big)_{H_k}$, que no corta a ningún punto de S porque $X \cap \left(S - \bigcup_{i=1}^{k} B_S(x_i, \varepsilon)\right) = \emptyset$ (si $z \in S - X$, al hacer simetrización de Steiner con respecto a cualquier hiperplano H que pasa por el centro de $\mathcal{D}_X$ se tiene que $z \in S - X_H$).

Puesto que $\big(\ldots (X_{H_1})_{H_2} \ldots\big)_{H_k}$ no corta a S podemos disminuir el radio de $\mathcal{D}_X$ y obtenemos así que el circunradio de $\mathcal{D}_X$ es estrictamente menor que el circunradio de X. $\square$

Demostración de la desigualdad isodiamétrica. Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ convexo y compacto. La desigualdad que queremos probar es trivial si $\operatorname{vol}(X) = 0$. Supondremos entonces que $\operatorname{vol}(X) > 0$. Sea $B \in \mathcal{N}(X) = \{K \in \mathcal{K}^n;\ \operatorname{vol}(K) \geqslant \operatorname{vol}(X), \operatorname{diam}(K) \leqslant \operatorname{diam}(X)\}$ el cuerpo convexo que minimiza el circunradio en $\mathcal{N}(X)$.

Afirmamos ahora que $B = \mathcal{D}_B$. En caso contrario, el lema anterior garantiza que existe un cuerpo convexo B' obtenido a partir de B por una cantidad finita de simetrizaciones de Steiner con $r(B') < r(B)$. Por las propiedades de la simetrización de Steiner:

$$\operatorname{vol}(B') = \operatorname{vol}(B) \geqslant \operatorname{vol}(X), \qquad \operatorname{diam}(B') \leqslant \operatorname{diam}(B) \leqslant \operatorname{diam}(X).$$

Por tanto, $B' \in \mathcal{N}(X)$ y $r(B') < r(B)$, lo que contradice que B sea el conjunto de $\mathcal{N}(X)$ donde se alcanza el mínimo del circunradio. Por tanto, $B = \mathcal{D}_B$ como afirmábamos.

Concluimos que:

$$\operatorname{vol}(X) \leqslant \operatorname{vol}(B) = \omega_n r(B)^n = \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam}(B)}{2}\right)^n \leqslant \omega_n \left(\frac{\operatorname{diam}(X)}{2}\right)^n,$$

lo que prueba el resultado. $\square$

Observamos que el circunradio no es sólo continuo para la métrica de Hausdorff, sino que verifica la desigualdad:

$$|r(K) - r(L)| \leqslant \delta(K, L).$$

Recordemos que $r(K) = \inf\{r > 0;\ K \subset B(x, r) \text{ para algún } x \in \mathbb{R}^n\}$. Supongamos que $\delta(K, L) = d$. Entonces $K \subset L + d\overline{B}$, $L \subset K + d\overline{B}$. Por otro lado, existen y, $z \in \mathbb{R}^n$ tales que $K \subset \overline{B}(y, r(K)) = \{y\} + r(K)\overline{B}$ y $L \subset \overline{B}(z, r(L)) = \{z\} + r(L)\overline{B}$. Entonces:

$$K \subset L + d\overline{B} \subset \{z\} + r(L)\overline{B} + d\overline{B} = \overline{B}(z, r(L) + d),$$

de modo que $r(K) \leqslant r(L) + d$. Análogamente se demuestra que $r(L) \leqslant r(K) + d$, lo que prueba la desigualdad que queríamos demostrar.

Bibliografía

[BF] T. Bonnesen and W. Fenchel, *Theory of convex bodies*, BCS Associates, Moscow, ID, 1987, Translated from the German and edited by L. Boron, C. Christenson and B. Smith.

[BZ] Yu. D. Burago and V. A. Zalgaller, *Geometric inequalities*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 285, Springer-Verlag, Berlin, 1988, Translated from the Russian by A. B. Sosinskiĭ, Springer Series in Soviet Mathematics.

[Ch] Isaac Chavel, *Isoperimetric inequalities*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 145, Cambridge University Press, Cambridge, 2001, Differential geometric and analytic perspectives.

[E] H. G. Eggleston, *Convexity*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 47, Cambridge University Press, New York, 1958.

[Sch] Rolf Schneider, *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.