

Capítulo 3

La desigualdad isoperimétrica

3.1. Área del borde de una hipersuperficie compacta en \mathbb{R}^n

La desigualdad isoperimétrica clásica relaciona el volumen n -dimensional de un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con el área (volumen $(n-1)$ -dimensional) de su borde $\partial\Omega$. La primera dificultad que encontramos es cómo definir este área si $\partial\Omega$ no es una hipersuperficie diferenciable. Estudiaremos a continuación un proceso para calcular $\text{area}(\partial\Omega)$ en el caso diferenciable, que podrá extenderse al caso en que $\bar{\Omega}$ sea un compacto convexo de \mathbb{R}^n .

Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ una superficie diferenciable compacta, encerrando una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Sea $N: \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^2(1)$ la aplicación de Gauss de Σ exterior a Ω . La *superficie paralela* a distancia $t > 0$ de Σ es

$$\Sigma_t = \{p + tN_p \mid p \in \Sigma\},$$

que encierra (para $t > 0$ próximo a cero) una región $\Omega_t \subset \mathbb{R}^3$.

Lema 3.1.1 *En la situación anterior, $\frac{d}{dt}\big|_0 \text{vol}(\Omega_t) = \text{area}(\Sigma)$.*

Demostración. Consideremos el campo diferenciable $X_p = p$, $\forall p \in \mathbb{R}^3$. Aplicando el Teorema de la divergencia en Ω ,

$$3\text{vol}(\Omega) = \int_{\Omega} \text{div}(X) dV = \int_{\Sigma} \langle p, N \rangle dA,$$

donde $dV = dx dy dz$ es el elemento de volumen estándar en \mathbb{R}^3 y dA el elemento de área en Σ . Aplicando la misma fórmula a Ω_t , tenemos

$$(3.1) \quad 3\text{vol}(\Omega_t) = \int_{\Sigma_t} \langle p_t, N_t \rangle dA_t,$$

donde el subíndice \bullet_t hace referencia a que todo está calculado en la geometría de Σ_t . Ahora, consideremos la aplicación $\psi_t: \Sigma \rightarrow \Sigma_t$, $\psi_t(p) = p + tN_p$, que es un difeomorfismo para $|t|$ suficientemente pequeño. Además, si $p \in \Sigma$ y $v \in T_p\Sigma$,

$$(d\psi_t)_p(v) = v + tdN_p(v) = v - tA_p v,$$

donde A_p es el endomorfismo de Weingarten de Σ asociado a N . Si e_1, e_2 son direcciones principales en p con curvaturas principales k_1, k_2 asociadas a N , entonces $(d\psi_t)_p(e_i) = (1 - tk_i)e_i$, $i = 1, 2$, de donde deducimos que

$$T_{\psi_t(p)}\Sigma_t = T_p\Sigma, \quad \text{y } N_t \circ \psi_t = N.$$

Por tanto, (3.1) se escribe

$$(3.2) \quad 3\text{vol}(\Omega_t) = \int_{p_t \in \psi_t(\Sigma)} \langle p_t, (N_t)(p_t) \rangle dA_t = \int_{p \in \Sigma} \langle p + tN_p, N_p \rangle (\psi_t^* dA_t).$$

Por otro lado, $(\psi_t^* dA_t)_p(e_1, e_2) = (dA_t)_{\psi_t(p)}((d\psi_t)_p(e_1), (d\psi_t)_p(e_2)) = (1 - tk_1)(1 - tk_2) = 1 - 2tH(p) + t^2K(p)$, donde H es la curvatura media asociada a N y K la curvatura de Gauss. Así, (3.2) se reescribe

$$(3.3) \quad 3\text{vol}(\Omega_t) = \int_{\Sigma} (\langle p, N \rangle + t) (1 - 2tH + t^2K) dA.$$

Derivando (3.3) en $t = 0$:

$$(3.4) \quad 3 \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \text{vol}(\Omega_t) = \int_{\Sigma} \left. \frac{d}{dt} \right|_0 [(\langle p, N \rangle + t)(1 - 2tH + t^2K)] dA = \int_{\Sigma} dA - 2 \int_{\Sigma} \langle p, N \rangle H dA.$$

Por otro lado, consideremos el campo diferenciable sobre Σ $p^T = p - \langle p, N \rangle N$, $p \in \Sigma$. La divergencia de este campo es

$$\begin{aligned} [\text{div}_{\Sigma}(p^T)](p) &= \sum_{i=1}^2 \langle \nabla_{e_i}(p^T), e_i \rangle && (\nabla = \text{conexión de Levi-Civita de } \Sigma) \\ &= \sum_{i=1}^2 \langle D_{e_i}(p^T), e_i \rangle && (D = \text{conexión de Levi-Civita de } \mathbb{R}^3) \\ &= \sum_{i=1}^2 \langle D_{e_i}(p - \langle p, N \rangle N), e_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^2 \langle e_i - e_i(\langle p, N \rangle)N - \langle p, N \rangle D_{e_i}N, e_i \rangle \\ &= 2 - \langle p, N \rangle \sum_{i=1}^2 \langle D_{e_i}N, e_i \rangle \\ &= 2 + 2\langle p, N \rangle H. \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema de La Divergencia en Σ , tenemos

$$(3.5) \quad 0 = \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma}(p^T) dA = \int_{\Sigma} (2 + 2\langle p, N \rangle H) dA = 2 \int_{\Sigma} dA + 2 \int_{\Sigma} \langle p, N \rangle H dA.$$

Finalmente, de (3.4) y (3.5) tenemos

$$3 \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \operatorname{vol}(\Omega_t) = \int_{\Sigma} dA - 2 \int_{\Sigma} \langle p, N \rangle H dA = 3 \int_{\Sigma} dA = 3 \operatorname{area}(\Sigma).$$

□

El Lema 3.1.1 justifica que definamos el área de un compacto convexo $A \subset \mathbb{R}^n$ de la siguiente forma: consideremos para $t \geq 0$ el conjunto $A_t = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) \leq t\}$. Si existiera el límite

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} (\operatorname{vol}(A_t) - \operatorname{vol}(A)),$$

entonces ésta sería una buena definición para el área de ∂A . Probaremos en la siguiente sección que la función $t \geq 0 \mapsto \operatorname{vol}(A_t)$ es un polinomio de grado n (relacionar con (3.3)), con lo que el límite anterior tendrá sentido. Esta propiedad se demostrará primero para polítopos y luego es extenderá por densidad a conjuntos convexos compactos cualesquiera.

3.2. Estructura de caras en un convexo

Definición 3.2.1 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo. Un subconjunto $F \subset A$ se dice una *cara* de A si:

1. F es convexo.
2. Para todo segmento $[x, y] \subset A$ tal que $(x, y) \cap F \neq \emptyset$, se tiene que $[x, y] \subset F$.

La dimensión de la cara F de A es la dimensión de F como convexo, es decir, $\dim F = \dim \operatorname{aff}(F)$.

Por ejemplo, si $A = \operatorname{conv}(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}) \subset \mathbb{R}^3$ con x_1, \dots, x_4 puntos afínmente independientes, entonces las caras de A son:

- De dimensión 3: A .
- De dimensión 2: $\operatorname{conv}(\{x_i, x_j, x_k\})$, con $1 \leq i < j < k \leq 4$ (4 caras).
- De dimensión 1: $\operatorname{conv}(\{x_i, x_j\})$, con $1 \leq i < j \leq 4$ (6 caras 1-dim = aristas).
- De dimensión 0: $\{x_i\}$, con $1 \leq i \leq 4$ (4 caras 0-dim = vértices).

Veamos algunas propiedades sencillas asociadas a esta definición.

Proposición 3.2.1 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un convexo.

- (1) Si $\text{int}(A) \neq \emptyset$, entonces $\dim(A) = n$ y A es la única cara n -dimensional de A .
- (2) Las caras 0-dimensionales de A son los puntos extremos de A (ver Definición 1.6.1).

Demostración. Para el apartado (1), como $\text{int}(A) \neq \emptyset$ entonces $\dim A = \dim \text{aff}(A) = n$ luego A es trivialmente una cara n -dimensional de A . En cuanto a la unicidad, si $F \subset A$ es una cara n -dimensional de A , entonces al ser $\dim(F) = n$ existirá un punto $x_0 \in \text{rel int}(F)$ (ver Definición 1.3.1). Así, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbb{B}(x_0, \varepsilon) \subset F$. Veamos que $A \subset F$ y habremos terminado: sea $x \in A$. Aplicando la condición 2 de la definición de cara a $[x, x_0]$, obtenemos que $[x, x_0] \subset F$ luego en particular, $x \in F$.

Veamos el apartado (2): Si $x_0 \in A$ es un punto extremo de A , entonces la condición 1 de cara se da trivialmente, y la condición 2 se cumple de forma vacía. Así que $\{x_0\}$ es una cara de A , cuya dimensión es evidentemente cero. Recíprocamente, supongamos que $F \subset A$ es una cara 0-dimensional de A . Así, F se reduce a un punto $x_0 \in A$. Si vemos que x_0 es un punto extremo de A habremos terminado. Por reducción al absurdo, si x_0 no es un punto extremo de A entonces existen $x_1, x_2 \in A$ tales que $x_0 \in (x_1, x_2)$. Por la condición 2 de cara para $F = \{x_0\}$, se tiene $[x_1, x_2] \subset F = \{x_0\}$, lo que es imposible. \square

Lema 3.2.1 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo, y $x \in A - \text{extr}(A)$. Entonces,

$$(3.6) \quad F := \bigcup_{\substack{I \subset A \text{ segmento} \\ x \in \text{rel int}(I)}} I = \bigcup_{x_1, x_2 \in A \mid x \in (x_1, x_2)} [x_1, x_2]$$

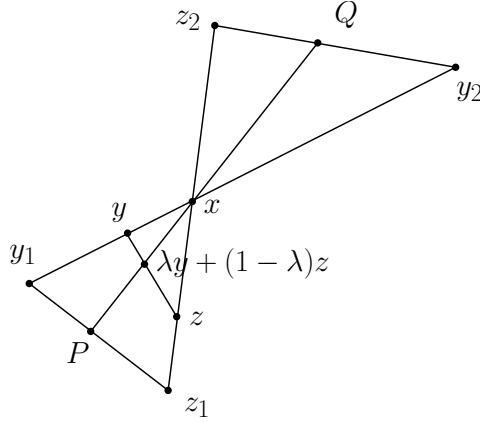
es una cara de A y $x \in \text{rel int}(F)$.

Demostración. Notemos que F es no vacío porque x no es un punto extremo de A (luego existen $x_1, x_2 \in A$ tales que $x \in (x_1, x_2)$). Veamos que F es convexo: Sean $y, z \in F$ y $\lambda \in [0, 1]$. Como $y \in F$, existen $y_1, y_2 \in A$ tales que $y \in [y_1, y_2]$ y $x \in (y_1, y_2)$. Análogamente, como $z \in F$ existen $z_1, z_2 \in A$ tales que $z \in [z_1, z_2]$ y $x \in (z_1, z_2)$. Consideremos los segmentos $[y_1, z_1], [y_2, z_2] \subset A$. Sean

$$\begin{aligned} P &= [y_1, z_1] \cap (\text{recta que pasa por } x, \lambda y + (1 - \lambda)z), \\ Q &= [y_2, z_2] \cap (\text{recta que pasa por } x, \lambda y + (1 - \lambda)z). \end{aligned}$$

Por ser A convexo, $[P, Q] \subset A$. Como $x \in (P, Q)$ y $\lambda y + (1 - \lambda)z \in [P, Q]$, tenemos $\lambda y + (1 - \lambda)z \in F$ luego F es convexo.

Veamos ahora que F cumple la propiedad 2 de la definición de cara de A (Definición 3.2.1). Sea $[y_1, y_2] \subset A$ tal que existe $z \in (y_1, y_2) \cap F$. Veamos que $[y_1, y_2] \subset F$: Como $z \in F$, existen $z_1, z_2 \in A$ tales que $z \in [z_1, z_2]$ y $x \in (z_1, z_2)$. Tenemos ahora dos opciones:



- $x = z$. Entonces, $x \in \text{rel int}([y_1, y_2])$ luego por definición de F , $[y_1, y_2] \in F$.
- $x \neq z$. En este caso, consideramos el cuadrilátero cerrado bidimensional

$$C = \text{conv}([y_1, y_2] \cup [z_1, z_2]).$$

Así, $x \in \text{rel int}(C)$.

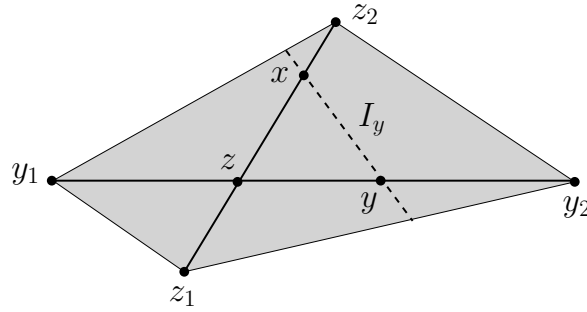


Figura 3.1: El cuadrilátero C de vértices y_1, y_2, z_1, z_2 .

Si ahora tomamos $y \in [y_1, y_2]$, entonces el segmento I_y obtenido al cortar la recta que pasa por x e y con C cumple $I_y \subset F$ (ya que $x \in \text{rel int}(I_y)$ y por definición de F). Como $y \in I_y$, concluimos que $y \in F$ luego $[y_1, y_2] \subset F$.

Por tanto, F definida por (3.6) es una cara de A . Finalmente, veamos que $x \in \text{rel int}(F)$. Por definición de $\text{aff}(F)$, existen puntos $x_1, \dots, x_k \in F$ afínmente independientes, de forma

que $\text{aff}(F) = \text{aff}(\{x_1, \dots, x_k\})$. Como cada x_i está en F , por definición existe $[y_i, z_i] \subset A$ y tal que $x \in (y_i, z_i)$, $x_i \in [y_i, z_i]$. Consideremos el politopo $P = \text{conv}(\{y_1, z_1, \dots, y_k, z_k\})$, que está contenido en F por ser F convexo. Como $x \in (y_i, z_i) \forall i$, tenemos que x está en la intersección de todas las “diagonales” (y_i, z_i) de P . En particular, x está en $\text{rel int}(P)$, que a su vez está contenido en $\text{rel int}(F)$. \square

Proposición 3.2.2 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo, y $\mathcal{F}_A = \{F \subset A \mid F \text{ es una cara de } A\}$. Entonces, $\{\text{rel int}(F) \mid F \in \mathcal{F}_A\}$ es una partición de A .*

Demostración. Sean $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_A$ y $x \in \text{rel int}(F_1) \cap \text{rel int}(F_2)$. Veamos que $F_1 = F_2$: Sea $y \in F_1$. Como $x \in \text{rel int}(F_1)$, existe un radio $r > 0$ tal que la bola m -dimensional $\mathbb{B}^m(x, r) \subset \text{aff}(F_1)$ está contenida en F_1 , donde $m = \dim(F_1)$. Como $x, y \in F_1$ y F_1 es convexo (por ser cara de A), entonces $[x, y] \subset F_1$. Prolongamos $[x, y]$ hasta un $z \in \mathbb{B}^m(x, r) - \{x\}$, es decir tal que $x \in (y, z)$. Como $[y, z] \in A$, $x \in (y, z) \cap F_2$ y F_2 es una

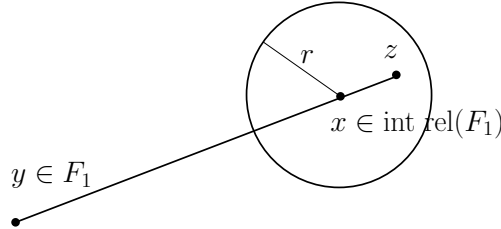


Figura 3.2: Expresando $x \in \text{rel int}(F_1)$ como punto intermedio entre $y \in F_1$ y algún punto de la bola m -dimensional $\mathbb{B}^m(x, r) \subset F$.

cara de A , entonces $[y, z] \subset F_2$ luego $y \in F_2$. Como $y \in F_1$ es arbitrario, tenemos $F_1 \subset F_2$. Análogamente se prueba que $F_2 \subset F_1$ luego se tiene la igualdad.

Sea $x \in A$. Debemos encontrar una cara $F \in \mathcal{F}_A$ tal que $x \in \text{rel int}(F)$. Tenemos dos posibilidades:

- x es un punto extremo de A . Por el apartado (2) de la Proposición 3.2.1, $\{x\}$ es una cara 0-dimensional de A . Como $x \in \text{rel int}(\{x\})$, hemos terminado en este caso.
- $x \in A - \text{extr}(A)$. En este caso, el Lema 3.2.1 asegura que F definida por (3.6) es una cara de A y $x \in \text{rel int}(A)$.

\square

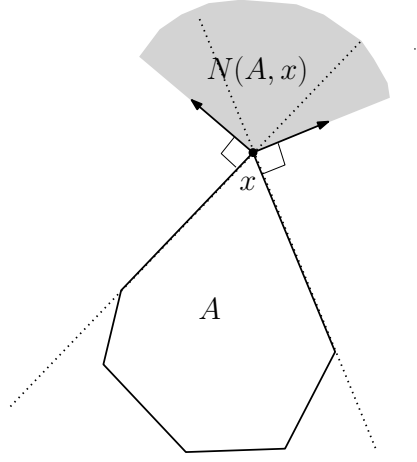


Figura 3.3: Cono normal en $x \in \partial A$ para un convexo $A \subset \mathbb{R}^2$. Las dos rectas con líneas de puntos son hiperplanos soporte de A en x , y los vectores son normales y exteriores a estos dos hiperplanos. La región sombreada (cerrada) es $x + N(A, x)$, donde $N(A, x)$ es el cono normal a A en x .

Definición 3.2.2 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ convexo y $x \in \partial A$. Se define el *cono normal* a A en x como

$$N(A, x) = \{u \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\} \mid u \text{ es vector normal exterior a } A \text{ en } x\} \cup \{\vec{0}\}.$$

Lema 3.2.2 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un convexo y $x \in \partial A$. Entonces, $N(A, x)$ es un cerrado convexo y es un cono, en el sentido del Lema 1.7.2.

Demostración. Empezaremos viendo que A es cerrado. Sea $\{u_k\}_k \subset N(A, x)$ convergiendo a $u_\infty \in \mathbb{R}^n$. Si $u_\infty = \vec{0}$, entonces $u_\infty \in N(A, x)$ y hemos terminado. Así que podemos suponer $u_\infty \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$, lo cual implica que $u_k \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ a partir de un natural (supondremos que esto se cumple $\forall k$). Por tanto, u_k es un vector normal exterior a A en x , luego existe un hiperplano soporte $H_{u_k, \alpha_k} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, u_k \rangle = \alpha_k\}$ de A en x , con $A \subset H_{u_k, \alpha_k}^-$. Como $x \in H_{u_k, \alpha_k}$, entonces $\alpha_k = \langle x, u_k \rangle$, que converge a $\alpha_\infty := \langle x, u_\infty \rangle$ cuando $k \rightarrow \infty$. Si vemos que $H_{u_\infty, \alpha_\infty}$ es un hiperplano soporte de A en x podremos concluir que $u_\infty \in N(A, x)$ y habremos terminado. Que $H_{u_\infty, \alpha_\infty}$ sea un hiperplano soporte de A en x viene implicado por las dos condiciones siguientes:

- $x \in A \cap H_{u_\infty, \alpha_\infty}$: esto se deduce de la definición de α_∞ .
- $A \subset H_{u_\infty, \alpha_\infty}^-$: Esto equivale a probar que $\langle a, u_\infty \rangle \leq \alpha_\infty \forall a \in A$, lo cual es consecuencia de $\langle a, u_k \rangle \leq \alpha_k$ tras tomar límites cuando $k \rightarrow \infty$.

Que $N(A, x)$ es un cono equivale a probar que si $u \in N(A, x)$ y $\lambda \geq 0$, entonces $\lambda u \in N(A, x)$. Esto es trivial a partir de la definición de $N(A, x)$.

A continuación probaremos que $N(A, x)$ es convexo: sean $u_1, u_2 \in N(A, x)$ y $\lambda \in [0, 1]$. Debemos comprobar que $\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2 \in N(A, x)$. Si $u_1 = \vec{0}$ o $u_2 = \vec{0}$, esto es trivial. Supongamos que ambos vectores son no nulos. Así, $A \subset H_i^- := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y - x, u_i \rangle \leq 0\}$, $i = 1, 2$. Dado $y \in H_1^- \cap H_2^-$, se tiene

$$\langle y - x, \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2 \rangle = \lambda \langle y - x, u_1 \rangle + (1 - \lambda) \langle y - x, u_2 \rangle \leq 0,$$

luego $A \subset H_1^- \cap H_2^- \subset H_\lambda^- := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y - x, \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2 \rangle \leq 0\}$, de donde obtenemos que $\lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2 \in N(A, x)$ y $N(A, x)$ es convexo. \square

En la Definición 3.2.2 habíamos exigido $x \in \partial A$. Podemos extender la definición al caso $x \in \text{int}(A)$ con $N(A, x) = \{\vec{0}\}$, con lo que el Lema 3.2.1 se sigue cumpliendo trivialmente.

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un convexo. Por la Proposición 3.2.2, si definimos

$$A^r = \bigcup_{\substack{\text{F cara de } A \\ \dim F = r}} \text{int rel } (F),$$

entonces $\{A^0, A^1, \dots, A^k\}$ es una partición de A , donde $k = \dim A$.

Lema 3.2.3 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un convexo. Entonces:*

- (1) *Para cada $x \in A^r$, la dimensión del convexo $N(A, x)$ es a lo más $n - r$.*
- (2) *Si F es una cara de A y $x, y \in \text{rel int}(F)$, entonces $N(A, x) = N(A, y)$.*

Demostración. Para el apartado (1), tomemos $x \in A^r$. Así, existe una cara r -dimensional F de A tal que $x \in \text{rel int}(F)$.

- (1.1) Si $r = n$, entonces x es interior a F en \mathbb{R}^n . Esto nos dice que $\text{int}(A) \neq \emptyset$, luego por el apartado (1) de la Proposición 3.2.1, A es la única cara n -dimensional de A . Por tanto, $F = A$ y $x \in \text{int}(A)$. Esto lleva a $N(A, x) = \{\vec{0}\}$, con lo que $\dim N(A, x) = 0 = n - n$.

- (1.2) Supongamos ahora que $r < n$ (en particular, $x \in \partial A$). Sea $\overrightarrow{\text{aff}(F)}$ la variedad de dirección de $\text{aff}(F)$. Si vemos que

$$(3.7) \quad N(A, x) \subset \left[\overrightarrow{\text{aff}(F)} \right]^\perp,$$

entonces habremos terminado, tomando dimensiones.

- Si x es un punto extremo de A , entonces la Proposición 3.2.1 asegura que $\{x\}$ es una cara 0-dimensional de A luego $F = \{x\}$. Por tanto, $\left[\overrightarrow{\text{aff}(F)}\right]^\perp = \{\vec{0}\}^\perp = \mathbb{R}^n$, que contiene a $N(A, x)$ trivialmente.
- Si $x \in A - \text{extr}(A)$, podemos aplicar el Lema 3.2.1 para concluir que la cara F de A que contiene a x viene dada por (3.6). Sea $u \in N(A, x) - \{\vec{0}\}$. Por definición de cono normal, existe un hiperplano soporte $H = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, u \rangle = \alpha\}$ de A en x de forma que $A \subset H^-$. Veamos que

$$(3.8) \quad \langle z, u \rangle = \alpha, \quad \forall z \in F.$$

En efecto, como H es un hiperplano soporte de A en x , es $x \in H$. Si $I \subset A$ es un segmento contenido en F , entonces $x \in \text{rel int}(I)$ luego $\langle z, u \rangle = \alpha$ a lo largo de I porque en caso contrario, I sería transversal a H en x lo que contradiría que $A \subset H^-$. Esto prueba (3.8). Finalmente, de (3.8) tenemos que $\langle v, u \rangle = 0$, $\forall v \in \overrightarrow{\text{aff}(F)}$, de donde deducimos (3.7) en este caso. Esto prueba (1).

En cuanto a (2), sea F una cara de A y $x, y \in \text{rel int}(F)$. Si $\dim(F) = n$ entonces $F = A$ luego $N(A, z) = \{\vec{0}\} \quad \forall z \in \text{int}(A)$ y no hay nada que probar en este caso. Supongamos ahora que $\dim F = r < n$. Sea $u \in N(A, x) - \{\vec{0}\}$. Por definición de cono normal, existe un hiperplano soporte $H = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, u \rangle = \alpha\}$ de A en x de forma que $A \subset H^-$. Si vemos que H también es hiperplano soporte de A en y tendremos $u \in N(A, y)$ luego $N(A, x) \subset N(A, y)$ y habremos terminado (el recíproco es análogo cambiando los papeles de x, y). Como $A \subset H^-$, sólo hay que probar que $y \in H$, es decir $\langle y, u \rangle = \alpha$. Esto se probó en (3.8), que es aplicable ahora. \square

Nota 3.2.1 En general no es verdad que $\dim N(A, x) = n - r$ siendo $x \in A^r$: tomemos $A = \mathbb{B}$ y $x \in \partial A$. Entonces, $\{x\}$ es una cara 0-dimensional de A pero $\dim N(A, x) = 1$. Sin embargo, este comportamiento no es posible en politopos, como veremos a continuación.

Lema 3.2.4 Sea $P \subset \mathbb{R}^n$ es un politopo y $x \in P^r$, entonces $\dim N(P, r) = n - r$.

Demostración. Sea F la única cara r -dimensional de P tal que $x \in \text{rel int}(F)$. Si $r = n$, entonces $x \in \text{int}(A)$ luego $N(P, x) = \{\vec{0}\}$ y la igualdad a probar es trivial. Supongamos en lo que sigue que $r < n$.

Como P es un politopo, P es intersección finita de semiespacios cerrados: existen $H_1, \dots, H_k \subset \mathbb{R}^n$ hiperplanos tales que $P = H_1^- \cap \dots \cap H_k^-$. Como $x \in \partial P$ (porque $\dim F = r < n$), x estará en alguno de los hiperplanos anteriores. Reordenando, podemos suponer

$$x \in H_1 \cap \dots \cap H_s, \text{ siendo } s \leq k, \text{ y } x \notin H_j \text{ para todo } j = s + 1, \dots, k.$$

Cada H_i será de la forma $\{z \in \mathbb{R}^n \mid \langle z, u_i \rangle = \alpha_i\}$, donde para cada i ,

$$(3.9) \quad u_i \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\} \text{ es el vector normal unitario exterior a } P \text{ en } x.$$

Veamos que $F' = P \cap (H_1 \cap \dots \cap H_s)$ es una cara de P : F' es convexo, por ser intersección no vacía de convexos. Sea $[y_1, y_2] \subset P$ un segmento tal que $(y_1, y_2) \cap F' \neq \emptyset$. Debemos probar que $[y_1, y_2] \subset F'$: Para ello, basta probar que $[y_1, y_2] \subset H_i \forall i = 1, \dots, s$. Fijamos $i \in \{1, \dots, s\}$. Entonces, $(y_1, y_2) \cap F' \subset (y_1, y_2) \cap H_i$ y $P \subset H_i^-$ luego $[y_1, y_2]$ no puede ser transversal a H_i , de donde $[y_1, y_2] \subset H_i$. Por tanto, F' es una cara de P .

Notemos que $x \in F' \subset \text{aff}(F')$ y $x \in \text{int}(F)^{\text{aff}(F)} = \text{int}(F)^{H_1 \cap \dots \cap H_s}$, ya que en caso contrario x estará en el borde de F en la topología inducida de $H_1 \cap \dots \cap H_s$, luego existirá $j \in \{s+1, \dots, k\}$ tal que $x \in H_j$, contradicción. Como los interiores relativos de las caras de P forman una partición de P y $x \in \text{int rel}(F) \cap \text{int rel}(F')$, deducimos que $F = F'$ luego $\text{aff}(F) = H_1 \cap \dots \cap H_s$. Finalmente,

$$\begin{aligned} r &= \dim \text{aff}(F) = \dim(H_1 \cap \dots \cap H_s) = \dim(\langle u_1 \rangle^\perp \cap \dots \cap \langle u_s \rangle^\perp) = \dim(\langle u_1, \dots, u_s \rangle^\perp) \\ &= n - \dim \langle u_1, \dots, u_s \rangle, \end{aligned}$$

luego existen $n - r$ vectores linealmente independientes en el subespacio vectorial de \mathbb{R}^n generado por u_1, \dots, u_s . Reordenando, podemos suponer que estos vectores linealmente independientes son u_1, \dots, u_r . Como cada uno de estos u_i está en $N(P, x)$ por (3.9), se tiene $\dim N(P, x) \geq n - r$. La igualdad se deduce del apartado (1) del Lema 3.2.3. \square

3.3. Volumen del ε -entorno de un politopo

A lo largo de esta sección dado $K \in \mathcal{K}^n$ y $\varepsilon \geq 0$, denotaremos por

$$K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, P) \leq \varepsilon\}$$

al entorno tubular de K de radio ε .

Consideremos un politopo $P \in \mathcal{K}^n$. A continuación calcularemos el volumen de P_ε , y comprobaremos que $\varepsilon \geq 0 \mapsto \text{vol}(P_\varepsilon)$ es un polinomio de grado n . Para entender la estrategia, veamos lo que ocurre si $P \in \mathcal{K}^2$: En este caso, P es un polígono compacto y convexo de \mathbb{R}^2 , con caras 1-dimensionales (aristas) y 0-dimensionales (vértices) en su borde.

Para producir P_ε , añadimos a P una cantidad finita de recintos, de dos tipos distintos:

- Rectángulos de base las aristas de P y altura ε . El área de cada uno de estos rectángulos puede calcularse a partir de la longitud de la correspondiente arista F de P , multiplicada por la “altura” ε . Pero $\text{longitud}(F) = \text{vol}_1(F)$ (volumen de Lebesgue

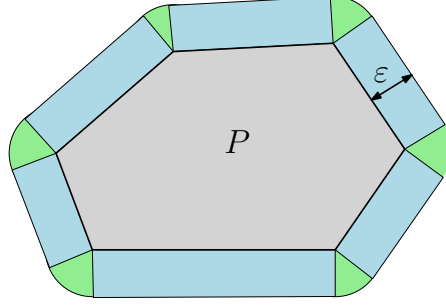


Figura 3.4: El ε -entorno tubular de un polígono $P \in \mathcal{K}^2$, compuesto de rectángulos de base las aristas de P y altura ε , y sectores circulares $N_\varepsilon(P, x)$ donde x es un vértice de P .

1-dimensional) y $\varepsilon = \text{vol}_1(N_\varepsilon(P, F))$, donde $N(P, F) = N(P, z)$ donde z es cualquier punto en $\text{int rel}(F)$ (no depende de z por el apartado (2) del Lema 3.2.3) y $N_\varepsilon(P, F) = \{u \in N(P, F) \mid \|u\| \leq \varepsilon\}$. Así, el volumen 2-dimensional (área) de cada rectángulo es $\text{vol}_1(F) \text{vol}_1(N_\varepsilon(P, F))$.

- Sectores circulares en cada uno de los vértices x de P , de la forma $N_\varepsilon(P, x) = \{u \in N(P, x) \mid \|u\| \leq \varepsilon\}$, que también puede verse como producto: $\text{vol}_0(\{x\}) \text{vol}_2(N_\varepsilon(P, x))$ (hemos asignado a $\{x\}$ el volumen 0-dimensional 1). Es decir, el volumen 2-dimensional de cada sector circular es $\text{vol}_0(\{x\}) \text{vol}_2(N_\varepsilon(P, x))$.

Los dos volúmenes anteriores pueden unificarse escribiendo $\text{vol}_{2-i}(F) \text{vol}_i(N_\varepsilon(P, F))$, donde F es una cara $(2-i)$ -dimensional de P , $i = 1, 2$. Siguiendo la notación de la Proposición 3.2.2, denotaremos por $\mathcal{F}_P = \{F \mid F \text{ es una cara de } P\}$. Entonces, el volumen 2-dimensional de P_ε puede escribirse así:

$$\begin{aligned} \text{vol}_2(P_\varepsilon) &= \text{vol}_2(P) + \sum_{i=1}^2 \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_P \\ \dim F = 2-i}} \text{vol}_{2-i}(F) \text{vol}_i(N_\varepsilon(P, F)) \\ &= \text{vol}_2(P) + \sum_{i=1}^2 \left(\sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_P \\ \dim F = 2-i}} \text{vol}_{2-i}(F) \text{vol}_i(N_1(P, F)) \right) \varepsilon^i. \end{aligned}$$

Como las sumas entre paréntesis no dependen de ε , podemos verlas como coeficientes c_i de un polinomio de grado 2 con término independiente $\text{vol}_2(P)$.

Ahora haremos lo anterior para cualquier politopo $P \in \mathcal{K}^n$. Fijemos $\varepsilon > 0$ y tomemos un punto $x \in P_\varepsilon - P$. Consideremos la proyección métrica $p_P: \mathbb{R}^n \rightarrow P$. Así, $y := p_P(x)$

es el único punto de ∂P tal que $t := d(x, y) = d(x, P)$ (que es menor o igual que ε por definición de P_ε). Además,

$$(3.10) \quad x = y + tu_P(x), \quad \text{donde } u_P(x) = \frac{x - y}{\|x - y\|}.$$

Aplicando la Proposición 3.2.2, existe una única cara $F \in \mathcal{F}_P$ tal que $y \in \text{rel int}(F)$. Como $y \in \partial P$, entonces $\dim F < n$ luego podemos escribir $\dim F = n - i$, siendo $i \in \{1, \dots, n\}$. Definimos

$$(3.11) \quad \begin{aligned} N(P, F) &:= N(P, z), \quad \text{donde } z \text{ es cualquier punto de } \text{rel int}(F), \\ N_\varepsilon(P, z) &:= \{u \in N(P, F) \mid \|u\| \leq \varepsilon\}, \end{aligned}$$

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \phi_{F,\varepsilon} &: \text{int rel}(F) \times N_\varepsilon(P, F) \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (y, u) &\mapsto y + u \end{aligned}$$

(La definición (3.11) no depende de z por el apartado (2) del Lema 3.2.3). Por tanto, (3.10) prueba la inclusión $\boxed{\subseteq}$ (la otra inclusión es trivial) de

$$(3.13) \quad P_\varepsilon - P = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{\substack{F \in \mathcal{F}_P \\ \dim F = n-i}} \text{im}(\phi_{F,\varepsilon}).$$

Por otro lado, como $\{\text{rel int}(F) \mid F \in \mathcal{F}_P\}$ es una partición de P (Proposición 3.2.2), entonces $\{\text{rel int}(F) \mid F \in \mathcal{F}_P, \dim F < n\}$ es una partición de ∂P . Por tanto, las imágenes de $\phi_{F,\varepsilon}$ para $F \in \mathcal{F}_P, \dim F < n$, son todas disjuntas. Esto y (3.13) nos dicen que el volumen de Lebesgue n -dimensional de $P_\varepsilon - P$ puede expresarse

$$(3.14) \quad \text{vol}_n(P_\varepsilon - P) = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_P \\ \dim F = n-i}} \text{vol}_n[\text{im}(\phi_{F,\varepsilon})].$$

Ahora calculamos cada uno de los volúmenes anteriores:

$$\begin{aligned} \text{vol}_n[\text{im}(\phi_{F,\varepsilon})] &= \int_{\phi_{F,\varepsilon}[\text{int rel}(F) \times N_\varepsilon(P, F)]} dV_n \quad (dV_n = \text{elemento de volumen } n\text{-dim}) \\ &= \int_{\text{int rel}(F) \times N_\varepsilon(P, F)} \phi_{F,\varepsilon}^* dV_n \quad (\text{fórmula de cambio de variable}) \end{aligned}$$

$\phi_{F,\varepsilon}^* dV_n$ es una n -forma diferencial en la variedad n -dimensional $\text{int rel}(F) \times N_\varepsilon(P, F) \subset \mathbb{R}^{n-i} \times \mathbb{R}^i$, donde estamos identificando el segundo factor \mathbb{R}^i con $\text{aff}(N(P, F))$ (aquí usamos el Lema 3.2.4 para deducir que $\dim N(P, F) = i$). Por tanto, $\phi_{F,\varepsilon}^* dV_n$ será un múltiplo de $dV_{n-i} \wedge dV_i$. Calculamos dicho múltiplo: tomemos una base ortonormal positiva u_1, \dots, u_{n-i}

de $\overrightarrow{\text{aff}(F)} \equiv \mathbb{R}^{n-i}$ y una base ortonormal positiva v_1, \dots, v_i de $\overrightarrow{\text{aff}(N(P, F))} \equiv \mathbb{R}^i$. Así, $dV_{n-i}(u_1, \dots, u_{n-i}) = dV_i(v_1, \dots, v_i) = 1$. Por tanto,

$$\begin{aligned} & (\phi_{F,\varepsilon}^* dV_n)(u_1, \dots, u_{n-i}, v_1, \dots, v_i) \\ &= dV_n((\phi_{F,\varepsilon})_*(u_1), \dots, (\phi_{F,\varepsilon})_*(u_{n-i}), (\phi_{F,\varepsilon})_*(v_1), \dots, (\phi_{F,\varepsilon})_*(v_i)) \\ &\stackrel{(*)}{=} dV_n(u_1, \dots, u_{n-i}, v_1, \dots, v_i) \stackrel{(**)}{=} 1, \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado que $\phi_{F,\varepsilon}(y, u) = y + u$, y en $(**)$ que $\{u_1, \dots, u_{n-i}\}, \{v_1, \dots, v_i\}$ son mutuamente ortogonales luego juntos forman una base ortonormal positiva de \mathbb{R}^n . Por tanto,

$$(3.15) \quad \phi_{F,\varepsilon}^* dV_n = dV_{n-i} \wedge dV_i, \quad y$$

$$\begin{aligned} \text{vol}_n[\text{im}(\phi_{F,\varepsilon})] &= \int_{\text{int rel}(F) \times N_\varepsilon(P, F)} \phi_{F,\varepsilon}^* dV_n \\ &= \int_{\text{int rel}(F) \times N_\varepsilon(P, F)} dV_{n-i} \times dV_i \quad (\text{por (3.15)}) \\ &= \left(\int_{\text{int rel}(F)} dV_{n-i} \right) \left(\int_{N_\varepsilon(P, F)} dV_i \right) \quad (\text{Teorema de Fubini}) \\ &= \text{vol}_{n-i}(\text{int rel}(F)) \text{vol}_i(N_\varepsilon(P, F)) \\ &= \text{vol}_{n-i}(F) \text{vol}_i(N_\varepsilon(P, F)) \\ &= \text{vol}_{n-i}(F) \text{vol}_i(N_1(P, F)) \varepsilon^i, \end{aligned}$$

luego usando lo anterior en (3.14) tenemos

$$(3.16) \quad \text{vol}_n(P_\varepsilon - P) = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_P \\ \dim F = n-i}} \text{vol}_{n-i}(F) \text{vol}_i(N_1(P, F)) \varepsilon^i.$$

En resumen:

Teorema 3.3.1 *Sea $P \in \mathcal{K}^n$ un politopo. Dado $\varepsilon > 0$, el volumen de Lebesgue n -dimensional de $P_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, P) \leq \varepsilon\}$ es el polinomio de grado n en la variable ε siguiente:*

$$(3.17) \quad \text{vol}_n(P_\varepsilon) = \text{vol}_n(P) + \sum_{i=1}^n c_i \varepsilon^i, \quad \text{donde } c_i = \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_P \\ \dim F = n-i}} \text{vol}_{n-i}(F) \text{vol}_i(N_1(P, F)).$$

El siguiente objetivo es estudiar la dependencia de los coeficientes de (3.17) respecto a la distancia de Hausdorff, lo que será útil para extender el Teorema 3.3.1 por densidad a \mathcal{K}^n . Necesitaremos tres lemas.

Lema 3.3.1 Si $K, L \in \mathcal{K}^n$ y $\varepsilon > 0$, entonces $K_\varepsilon, L_\varepsilon \in \mathcal{K}^n$ y $\delta(K_\varepsilon, L_\varepsilon) \leq \delta(K, L)$.

Demostración. Como $K_\varepsilon = K + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}$ y $K, \overline{\mathbb{B}} \in \mathcal{K}^n$, tenemos que $K_\varepsilon \in \mathcal{K}^n$ por ser \mathcal{K}^n un semigrupo. Análogamente, $L_\varepsilon \in \mathcal{K}^n$ luego tiene sentido la distancia de Hausdorff $\delta(K_\varepsilon, L_\varepsilon)$. Por definición de $\delta(K, L)$,

$$K_\varepsilon = K + \varepsilon \overline{\mathbb{B}} \subset [L + \delta(K, L)]\overline{\mathbb{B}} + \varepsilon \overline{\mathbb{B}} = [L + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}] + \delta(K, L)\overline{\mathbb{B}} = L_\varepsilon + \delta(K, L)\overline{\mathbb{B}}.$$

Análogamente, $L_\varepsilon \subset K_\varepsilon + \delta(K, L)\overline{\mathbb{B}}$ luego $\delta(K_\varepsilon, L_\varepsilon) \leq \delta(K, L)$. \square

Lema 3.3.2 Sea $\varepsilon_0 > 0$. Si $\{P_m\}_m \subset \mathcal{K}^n$ es una sucesión de politopos que converge a $K \in \mathcal{K}^n$ en distancia de Hausdorff, entonces la sucesión de polinomios $\{\text{vol}_n[(P_m)_\varepsilon]\}_m$ converge uniformemente a la función $\varepsilon \mapsto \text{vol}_n(K_\varepsilon)$ en el intervalo $[0, \varepsilon_0]$.

Demostración. Como $P_m, K \in \mathcal{K}^n$, el Lema 3.3.1 asegura que $(P_m)_\varepsilon, K_\varepsilon \in \mathcal{K}^n \forall \varepsilon \geq 0$, y fijado $\varepsilon \geq 0$, se tiene

$$(3.18) \quad \delta((P_m)_\varepsilon, K_\varepsilon) \leq \delta(P_m, K).$$

Como $\delta(P_m, K) \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$, (3.18) implica que $\{(P_m)_\varepsilon\}_m$ converge a K_ε en distancia de Hausdorff, $\forall \varepsilon \geq 0$. Por ser $\text{vol}: (\mathcal{K}^n, \delta) \rightarrow [0, \infty)$ continua (Teorema 2.3.1), concluimos que

$$(3.19) \quad \text{vol}[(P_m)_\varepsilon] \xrightarrow{(m \rightarrow \infty)} \text{vol}(K), \quad \forall \varepsilon \geq 0.$$

Recordemos del Teorema 3.3.1 que fijado $m \in \mathbb{N}$, la función $\varepsilon \geq 0 \mapsto \text{vol}[(P_m)_\varepsilon]$ es un polinomio de grado n en la variable ε . Fijemos $\varepsilon_0 > 0$ y veamos que la sucesión de polinomios $\{\text{vol}[(P_m)_\varepsilon]\}_m$ converge uniformemente a la función $\varepsilon \mapsto \text{vol}_n(K_\varepsilon)$ en el intervalo $[0, \varepsilon_0]$: Consideremos el conjunto

$$\mathcal{A} = \{K_\varepsilon \mid 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\} \cup \{(P_m)_\varepsilon \mid 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0, m \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{K}^n.$$

Como $\{P_m\}_m \rightarrow K$ en distancia de Hausdorff, entonces $\{P_m\}_m \cup \{K\}$ es un conjunto δ -acotado. Esto implica que existen $R > 0$ y $Q \in \mathcal{K}^m$ tales que $\delta(P_m, Q) \leq R$ para todo $m \in \mathbb{N}$, y $\delta(K, Q) \leq R$. Dado $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, tenemos

$$\begin{aligned} \delta((P_m)_\varepsilon, Q) &\leq \delta((P_m)_\varepsilon, Q_\varepsilon) + \delta(Q_\varepsilon, Q) && \text{(desigualdad triangular)} \\ &\leq \delta(P_m, Q) + \delta(Q_\varepsilon, Q) && \text{(Lema 3.3.1)} \\ &\leq \delta(P_m, Q) + \varepsilon \\ &\leq R + \varepsilon_0, \end{aligned}$$

y análogamente,

$$\begin{aligned}\delta(K_\varepsilon, Q) &\leq \delta(K_\varepsilon, Q_\varepsilon) + \delta(Q_\varepsilon, Q) \\ &\leq \delta(K, Q) + \delta(Q_\varepsilon, Q) \\ &\leq R + \varepsilon_0.\end{aligned}$$

Lo anterior implica que \mathcal{A} es un conjunto acotado de (\mathcal{K}^n, δ) , y por tanto \mathcal{A} es un conjunto acotado de (\mathcal{C}^n, δ) (recordemos que \mathcal{C}^n es el conjunto de compactos no necesariamente convexos de \mathbb{R}^n). Por el Corolario 2.2.1, el cierre de \mathcal{A} en (\mathcal{C}^n, δ) es compacto. Como \mathcal{K}^n es cerrado en (\mathcal{C}^n, δ) (Proposición 2.2.1) y $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}^n$, concluimos que el cierre de \mathcal{A} en (\mathcal{C}^n, δ) está contenido en \mathcal{K}^n , y por tanto dicho cierre es un compacto de (\mathcal{K}^n, δ) . Por la continuidad de $\text{vol}: (\mathcal{K}^n, \delta) \rightarrow [0, \infty)$ y la compacidad de \mathcal{A} obtenemos que $\text{vol}: \overline{\mathcal{A}} \rightarrow [0, \infty)$ es uniformemente continua. Para terminar, veamos que $\{\text{vol}[(P_m)_\varepsilon]\}_m$ converge uniformemente a la función $\varepsilon \mapsto \text{vol}_n(K_\varepsilon)$ en el intervalo $[0, \varepsilon_0]$: Sea $\delta > 0$. Se trata de probar que existe un $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(3.20) \quad |\text{vol}[(P_m)_\varepsilon] - \text{vol}(K_\varepsilon)| < \delta \quad \forall m \geq m_0, \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].$$

Para el $\delta > 0$ anterior, la continuidad uniforme de $\text{vol}|_{\overline{\mathcal{A}}}$ implica que existe $\mu > 0$ tal que si $L, L' \in \overline{\mathcal{A}}$ y $\delta(L, L') < \mu$, entonces $|\text{vol}(L) - \text{vol}(L')| < \delta$. Fijemos $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Como $\{(P_m)_\varepsilon\}_m$ converge a K_ε en δ , existe $m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ de forma que si $m \geq m_0(\varepsilon)$, entonces $\delta((P_m)_\varepsilon, K_\varepsilon) < \mu$. Como $(P_m)_\varepsilon, K_\varepsilon \in \mathcal{A}$, lo anterior implica que $|\text{vol}[(P_m)_\varepsilon] - \text{vol}(K_\varepsilon)| < \delta \quad \forall m \geq m_0(\varepsilon)$. Lo único que resta probar es que $m_0(\varepsilon)$ puede tomarse independiente de $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Si esto no se diera, tendríamos una sucesión $\{\varepsilon_k\}_k$ convergiendo a un $\varepsilon_\infty \in [0, \varepsilon_0]$ y una sucesión $\{m_0(\varepsilon_k)\}_k \subset \mathbb{N}$ divergiendo a ∞ de forma que

$$(3.21) \quad \delta((P_m)_{\varepsilon_k}, K_{\varepsilon_k}) < \mu \quad \forall m \geq m_0(\varepsilon_k), \quad \text{pero} \quad \delta((P_{m_0(\varepsilon_k)-1})_{\varepsilon_k}, K_{\varepsilon_k}) \geq \mu.$$

La última desigualdad contradice que

$$\delta((P_{m_0(\varepsilon_k)-1})_{\varepsilon_k}, K_{\varepsilon_k}) \leq \delta(P_{m_0(\varepsilon_k)-1}, K) \xrightarrow{(k \rightarrow \infty)} 0,$$

y el lema está probado. \square

Lema 3.3.3 Si $\{p_m = p_m(x)\}_m$ es una sucesión de polinomios de una variable real x , todos con grado a lo más $k \in \mathbb{N}$, y $\{p_m\}_m$ converge uniformemente en $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, entonces f es la restricción a $[a, b]$ de un polinomio de grado a lo más k .

Demostración. La convergencia uniforme de $\{p_m\}_m$ a f implica f es de clase C^∞ en $[a, b]$, y que la sucesión de derivadas de cualquier orden fijo de $\{p_m\}_m$ converge a la correspondiente derivada de ese orden de f . Como el grado de p_m no supera a k , entonces la $(k+1)$ -ésima

derivada de p_m es idénticamente nula, $\forall m \in N$. Por tanto, $f^{(k+1)} \equiv 0$ en $[a, b]$, luego f es la restricción a $[a, b]$ de un polinomio de grado a lo más k . \square

Como consecuencia directa de los Lemas 3.3.2, 3.3.2 y 3.3.3 tenemos:

Teorema 3.3.2 Sea $K \in \mathcal{K}^n$ y $\varepsilon_0 > 0$. Entonces, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \mapsto \text{vol}_n(K_\varepsilon)$ es un polinomio de grado a lo más n en la variable ε . Además, los coeficientes de dicho polinomio son funciones continuas en la distancia de Hausdorff.

3.4. Contenido de Minkowski

Definición 3.4.1 Sea $K \in \mathcal{K}^n$. Por el Teorema 3.3.2, la función $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0] \mapsto \text{vol}_n(K_\varepsilon)$ es un polinomio de grado a lo más n en la variable ε . Por tanto, tiene sentido el límite

$$\text{area}(K) = A(K) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} [\text{vol}_n(K_\varepsilon) - \text{vol}_n(K)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} [\text{vol}_n(K + \varepsilon \mathbb{B}) - \text{vol}_n(K)],$$

Al que llamaremos el *contenido de Minkowski* de K . Como $\text{vol}_n(K_\varepsilon) \geq \text{vol}_n(K)$, $\forall \varepsilon > 0$, deducimos que $A(K) \in [0, \infty)$, $\forall K \in \mathcal{K}^n$.

Por el Lema 3.1.1, si $n = 3$ y ∂K es una superficie regular de \mathbb{R}^3 , el contenido de Minkowski es el área de ∂K . En el caso de un politopo, el contenido de Minkowski coincide con el volumen $(n-1)$ -dimensional de la frontera topológica:

Lema 3.4.1 Si $P \subset \mathbb{R}^n$ un politopo con caras $(n-1)$ -dimensionales F_1, \dots, F_r , entonces

$$A(P) = \sum_{i=1}^r \text{vol}_{n-1}(F_i).$$

Demostración. Usando la notación del Teorema 3.3.1, tenemos

$$\text{vol}_n(P_\varepsilon) = \text{vol}_n(P) + \sum_{i=1}^n c_i \varepsilon^i, \text{ donde } c_i = \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_P \\ \dim F = n-i}} \text{vol}_{n-i}(F) \text{ vol}_i(N_1(P, F)).$$

Como por definición $A(P)$ es la derivada en $\varepsilon = 0$ del polinomio $\varepsilon \mapsto \text{vol}_n(P_\varepsilon)$, es decir, el coeficiente del término de grado 1 de dicho polinomio, tenemos

$$A(P) = c_1 = \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_P \\ \dim F = n-1}} \text{vol}_{n-1}(F) \text{ vol}_1(N_1(P, F)).$$

Así que basta probar que $\text{vol}_1(N_1(P, F)) = 1$, $\forall F \in \mathcal{F}_P$ con $\dim F = n-1$. Recordemos que dada una cara $(n-1)$ -dimensional de P ,

$$N_1(P, F) = \{u \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\} \mid u \text{ es vector normal exterior a } F, \|u\| \leq 1\} \cup \{\vec{0}\} = [0, 1] \cdot u_0,$$

donde $u_0 \in N_1(P, x)$ con $\|u_0\| = 1$ y x es cualquier punto en $\text{rel int}(F)$ por el apartado (2) del Lema 3.2.3. Por tanto, $\text{vol}_1(N_1(P, F)) = \text{longitud}([0, 1]) = 1$. \square

Proposición 3.4.1 *La función Area: $(\mathcal{K}^n, \delta) \rightarrow [0, \infty)$ es continua.*

Demostración. Sea $K \in \mathcal{K}^n$. Por definición, $A(K)$ es la derivada en $\varepsilon = 0$ del polinomio $\varepsilon \geq 0 \mapsto \text{vol}_n(K_\varepsilon)$. Por tanto, $A(K)$ es el coeficiente del término de grado 1 de dicho polinomio. Como los coeficientes de este polinomio son continuos en la distancia de Hausdorff (Teorema 3.3.2), se tiene la proposición. \square

Corolario 3.4.1 *Si $K \in \mathcal{K}^n$ tiene dimensión a lo más $n - 2$, entonces su contenido de Minkowski es cero.*

Demostración. En el caso de que K sea un politopo, el Lema 3.4.1 implica que $A(K) = 0$, ya que K no tiene caras no tendrá caras $(n - 1)$ -dimensionales. Para el caso general usaremos la continuidad del contenido de Minkowski dada por la Proposición 3.4.1. \square

Nota 3.4.1 Una propiedad interesante del área del borde, que no demostraremos ni usaremos, es que si $K, K' \in \mathcal{K}^n$ cumplen $K \subset K'$, entonces $A(K) \leq A(K')$.

3.5. Simetrización de Steiner

Sea $A \in \mathcal{K}^n$ y $H \subset \mathbb{R}^n$ un hiperplano. Dado $x \in H$, llamemos $L_x = x + (\vec{H})^\perp$ a la recta afín ortogonal a H que pasa por x . Tenemos dos posibilidades para la posición relativa de L_x y A :

1. $L_x \cap A \neq \emptyset$. En este caso, $L_x \cap A$ es un segmento cerrado y finito (por ser A convexo y compacto). Sea $\lambda(x) \in [0, \infty)$ su longitud, y sea S_x el segmento cerrado de L_x centrado en x y de longitud $\lambda(x)$. Notemos que puede ser $S_x = \{x\}$, cuando $\lambda(x) = 0$.
2. $L_x \cap A = \emptyset$. En este caso, definimos $S_x = \emptyset$.

Definición 3.5.1 En la situación anterior, se define el *simetrizado de Steiner* de A respecto a H como

$$A_H = \bigcup_{x \in H} S_x \subset \mathbb{R}^n,$$

y decimos que A_H se obtiene a partir de A por *simetrización*. Es claro que A_H es simétrico por reflexión en H , y que si A es simétrico por reflexión en H , entonces $A_H = A$.

Lema 3.5.1 Si $A, A' \in \mathcal{K}^n$ y $A \subset A'$, entonces dado un hiperplano $H \subset \mathbb{R}^n$ se tiene $A_H \subset A'_H$.

Demostración. Dado $x \in H$, claramente $L_x \cap A \subset L_x \cap A'$ y si $L_x \cap A \neq \emptyset$, entonces

$$\lambda(x) = \text{long}(L_x \cap A) \leq \text{long}(L_x \cap A') := \lambda'(x),$$

de donde los correspondientes segmentos simetrizados S_x, S'_x cumplen $S_x \subset S'_x$. Como esto es cierto $\forall x \in H$, obtenemos $A_H \subset A'_H$. \square

Veamos algunas propiedades más elaboradas del proceso de simetrización.

Lema 3.5.2 Sean $A \in \mathcal{K}^n$, $H \subset \mathbb{R}^n$ un hiperplano y $x \in H$ con $L_x \cap A \neq \emptyset$. Entonces:

(1) Para cualquier sucesión $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset H$ convergiendo a x tal que $L_{x_i} \cap A \neq \emptyset \forall i$, se tiene que

$$\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \lambda(x_i) \leq \lambda(x),$$

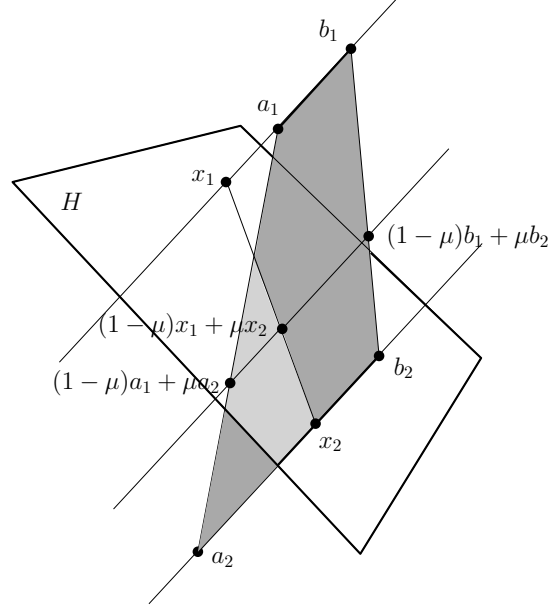
es decir, $\lambda = \lambda(x)$ es semicontinua superiormente¹.

(2) Sea $\Pi_H: \mathbb{R}^n \rightarrow H$ la proyección ortogonal de \mathbb{R}^n sobre H . Entonces, $\Pi_H(A)$ es convexo y $\forall x_1, x_2 \in \Pi_H(A)$, $\mu \in [0, 1]$, se tiene $\lambda((1-\mu)x_1 + \mu x_2) \geq (1-\mu)\lambda(x_1) + \mu\lambda(x_2)$, es decir, $\lambda = \lambda(x)$ es una función cóncava en $\Pi_H(A)$ (en particular, λ es Lipschitziana en $\Pi_H(A)$ por el Lema 1.7.1; sin embargo, la continuidad de λ puede fallar en $\partial\Pi_H(A)$).

Demostración. Para el apartado (1), llamemos $u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$ a un vector ortogonal a H de forma que $L_{x_i} \cap A = [x_i + a_i u, x_i + b_i u]$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $a_i \leq b_i$. Así, $\lambda(x_i) = b_i - a_i$. Pasando a una parcial podemos suponer que $\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \lambda(x_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda(x_i)$. Por compacidad de A y por ser $\{x_i\}_i$ convergente a x , la sucesión de segmentos $[x_i + a_i u, x_i + b_i u]$ converge tras pasar a una parcial a un segmento de la forma $[x + au, x + bu] \subset A$, donde $a = \lim_i a_i \leq \lim_i b_i = b \in \mathbb{R}$. Esto implica que $\lambda(x) \geq \text{long}([x + au, x + bu]) = b - a = \lim_i (b_i - a_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda(x_i)$.

Para el apartado (2), $\Pi_H(A)$ es convexo por ser A convexo y Π_H una aplicación afín (apartado (2) de la Proposición 1.1.1). En cuanto a la concavidad de λ , sean $x_1, x_2 \in \Pi_H(A)$, $\mu \in [0, 1]$. Así, $L_{x_i} \cap A$ es de la forma $[a_i, b_i]$ con $a_i, b_i \in x_i + H^\perp$ (podría ser $a_i = b_i$). Como $[a_i, b_i] \subset A$, $i = 1, 2$, y A es convexo, el cuadrilátero cerrado $D = \text{conv}([a_1, b_1] \cup [a_2, b_2])$ está contenido en A . Por otro lado, como $\Pi_H(A)$ es convexo, $(1-\mu)x_1 + \mu x_2 \in \Pi_H(A)$ luego $L_{(1-\mu)x_1 + \mu x_2} \cap A \neq \emptyset$. Además, la recta $L_{(1-\mu)x_1 + \mu x_2}$ corta al cuadrilátero C en el segmento $[(1-\mu)a_1 + \mu a_2, (1-\mu)b_1 + \mu b_2]$ (ver Figura 3.5).

¹Si $A \in \mathcal{K}^2$, la función $\lambda(x)$ es continua (Sección 1.2, página 29 de [1]). No usaremos esto.

Figura 3.5: El cuadrilátero gris es C .

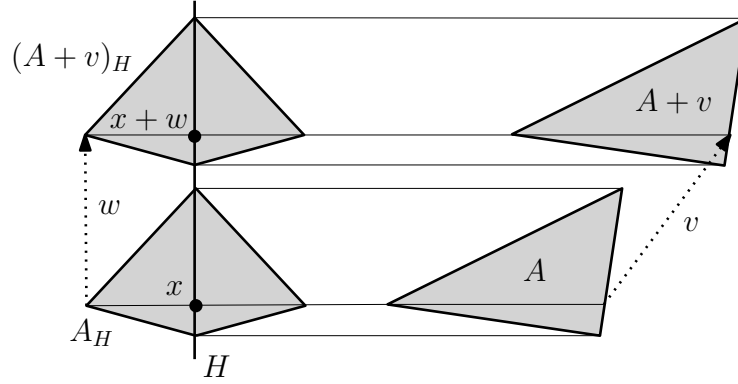
En particular,

$$\begin{aligned}
 \lambda((1-\mu)x_1 + \mu x_2) &\geq \text{long}([(1-\mu)a_1 + \mu a_2, (1-\mu)b_1 + \mu b_2]) \\
 &= \|(1-\mu)b_1 + \mu b_2 - (1-\mu)a_1 - \mu a_2\| \\
 &= \|(1-\mu)(b_1 - a_1) + \mu(b_2 - a_2)\| \\
 &\stackrel{(*)}{=} (1-\mu)\|b_1 - a_1\| + \mu\|b_2 - a_2\| \\
 &= (1-\mu)\lambda(x_1) + \lambda(x_2),
 \end{aligned}$$

donde en $(*)$ hemos usado que $b_1 - a_1, b_2 - a_2$ llevan la misma dirección y el mismo sentido (alguno podría anularse). \square

Lema 3.5.3 *Dados $A \in \mathcal{K}^n$ y $v \in \mathbb{R}^n$, se tiene $(A + v)_H = A_H + w$, donde w es la proyección ortogonal de v sobre \vec{H} , es decir, $u = w + w^\perp$ con $w \in \vec{H}$, $w^\perp \in \vec{H}^\perp$.*

Demostración. Dado $x \in H$, $L_{x+w} \cap (A + v) = (L_x + w) \cap (A + v) = (L_x + w) \cap [(A + w) + w^\perp] \stackrel{(*)}{=} [(L_x + w) \cap (A + w)] + w^\perp = [(L_x \cap A) + w] + w^\perp$, donde en $(*)$ hemos usado que w^\perp lleva la dirección de la recta $L_x + w$.



Por tanto, si denotamos por λ_A , λ_{A+v} a las funciones longitud de los segmentos producidos por simetrización de Steiner de A , $A+v$ respecto a H , tenemos

$$\lambda_{A+v}(x+w) = \text{long}[(L_{x+w}) \cap (A+v)] = \text{long}(L_x \cap A) = \lambda_A(x),$$

lo que implica que el segmento cerrado $S_A(x) = L_x \cap A_H$ centrado en x y de longitud $\lambda_A(x)$ y su correspondiente en $A+v$, $S_{A+v}(x+w) = L_{x+w} \cap (A+v)_H$, cumplen $S_{A+v}(x+w) = S_A(x) + w$, $\forall x \in H$. Esto equivale a $(A+v)_H = A_H + w$. \square

Lema 3.5.4 Sean $A \in \mathcal{K}^n$ y $H \subset \mathbb{R}^n$ un hiperplano tal que A está contenido en un hiperplano ortogonal a H . Entonces, $\text{area}(A) = 2\text{vol}_{n-1}(A)$.

Demostración. Supondremos que A es un politopo. El caso general se obtendrá a partir de este caso particular, por el Teorema de densidad 2.4.1, la continuidad del contenido de Minkowski (Proposición 3.4.1) y la continuidad del volumen (Teorema 2.3.1). Tomemos entonces un politopo $A \subset \mathbb{R}^n$ contenido en un hiperplano $H_1 \subset \mathbb{R}^n$ ortogonal a un hiperplano dado $H \subset \mathbb{R}^n$. Podemos escribir A como límite en distancia de Hausdorff de una sucesión de politopos n -dimensionales $A_m \subset \mathbb{R}^n$ obtenidos multiplicando A por un intervalo de anchura $2/m$, centrado en H_1 y en la dirección ortogonal a H_1 , ver Figura 3.6.

Fijado $m \in \mathbb{N}$, las caras $(n-1)$ -dimensionales de A_m son de dos tipos: las dos caras paralelas a A , que son $A - \frac{1}{m}u_1$, $A + \frac{1}{m}u_1$ donde $u_1 \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$ es ortogonal a H_1 , y el resto de caras de A_m , que son ortogonales a H_1 (tantas como caras $(n-2)$ -dimensionales tiene A). Llamemos a estas últimas $F_1(m), \dots, F_k(m)$. Por el Lema 3.4.1,

$$\text{area}(A_m) = \text{vol}_{n-1}(A - \frac{1}{m}u_1) + \text{vol}_{n-1}(A + \frac{1}{m}u_1) + \sum_{i=1}^k \text{vol}_{n-1}(F_i(m)).$$

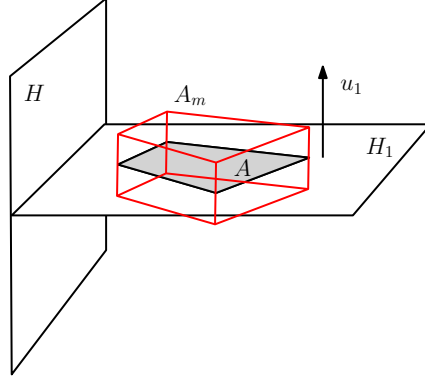


Figura 3.6: u_1 es un vector unitario ortogonal a H_1 . La anchura del politopo A_m (en rojo) en la dirección de u_1 es $2/m$.

Cuando $m \rightarrow \infty$, las caras $F_i(m)$ colapsan a las caras $(n-2)$ -dimensionales de A , luego los volúmenes $(n-1)$ -dimensionales de las $F_i(m)$ tienden a cero. Por tanto,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{area}(A_m) = 2\text{vol}_{n-1}(A).$$

Finalmente, el límite de la izquierda en la última expresión es $\text{area}(A)$, por la Proposición 3.4.1. \square

Teorema 3.5.1 Sean $A \in \mathcal{K}^n$ y H un hiperplano de \mathbb{R}^n . Entonces:

- (1) $A_H \in \mathcal{K}^n$.
- (2) $\text{vol}(A_H) = \text{vol}(A)$.
- (3) $\text{diam}(A_H) \leq \text{diam}(A)$.
- (4) $\text{area}(A_H) \leq \text{area}(A)$, y la igualdad es cierta si y sólo si A es simétrico respecto a un hiperplano paralelo a H o bien A está contenido en un hiperplano ortogonal a H .

Demostración. Veamos el apartado (1). Como $A \in \mathcal{K}^n$, A es acotado luego existe $x_0 \in H$, $R > 0$ tales que $A \subset \overline{\mathbb{B}}(x_0, R)$. Por el Lema 3.5.1, $A_H \subset \overline{\mathbb{B}}(x_0, R)_H = \overline{\mathbb{B}}(x_0, R)$, luego A_H también es acotado. Para ver que A_H es cerrado, sea $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset A_H$ convergiendo a $x \in \mathbb{R}^n$. Si $\Pi_H: \mathbb{R}^n \rightarrow H$ es la proyección ortogonal de \mathbb{R}^n sobre H , entonces por continuidad de Π_H tenemos $\{\Pi_H(x_i)\}_i \rightarrow \Pi_H(x)$. Por otro lado, como $x_i \in A_H$ entonces $\|x_i - \Pi_H(x_i)\| \leq \frac{1}{2}\lambda(\Pi_H(x_i))$. Así,

$$\|x - \Pi_H(x)\| = \lim_i \|x_i - \Pi_H(x_i)\| \leq \frac{1}{2} \overline{\lim} \lambda(\Pi_H(x_i)) \stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{2} \lambda(\Pi_H(x)),$$

donde en (\star) hemos usado el apartado (1) del Lema 3.5.2. De lo anterior deducimos que $x \in A_H$ y A_H es cerrado.

Veamos que A_H es convexo. Dados $x_1, x_2 \in A_H$ y $\mu \in [0, 1]$, llamemos $z_i = \Pi_H(x_i)$, $i = 1, 2$. Tenemos $\Pi_H(\mu x_1 + (1 - \mu)x_2) = \mu \Pi_H(x_1) + (1 - \mu) \Pi_H(x_2) = \mu z_1 + (1 - \mu)z_2$ luego

$$\begin{aligned}
 \|(\mu x_1 + (1 - \mu)x_2) - \Pi_H(\mu x_1 + (1 - \mu)x_2)\| &= \|(\mu x_1 + (1 - \mu)x_2) - (\mu z_1 + (1 - \mu)z_2)\| \\
 &= \|\mu(x_1 - z_1) + (1 - \mu)(x_2 - z_2)\| \\
 &\leq \mu\|x_1 - z_1\| + (1 - \mu)\|x_2 - z_2\| \\
 &\stackrel{(\star)}{\leq} \frac{\mu}{2}\lambda(z_1) + \frac{1-\mu}{2}\lambda(z_2) \\
 &\stackrel{(\star\star)}{\leq} \frac{1}{2}\lambda(\mu z_1 + (1 - \mu)z_2)
 \end{aligned}$$

donde en (\star) hemos usado que $x_i \in A_H$, $i = 1, 2$, y $(\star\star)$ es consecuencia del apartado (2) del Lema 3.5.2. Por tanto, A_H es convexo y el apartado (1) está demostrado.

El apartado (2) es consecuencia directa del Teorema de Fubini.

Veamos el apartado (3): Como A_H es compacto, $\exists x_1, x_2 \in A_H$ tales que $\text{diam}(A_H) = \|x_1 - x_2\|$. Sean $z_i = \Pi_H(x_i)$, $i = 1, 2$. Como x_1, x_2 maximizan la distancia entre puntos de A_H entonces x_1, x_2 son los extremos de los segmentos $L_{z_1} \cap A_H$, $L_{z_2} \cap A_H$ y están en lados opuestos de H , ver Figura 3.7.

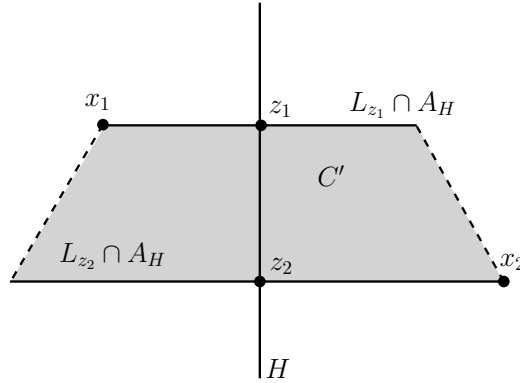


Figura 3.7: El trapecio C' es la envolvente convexa de los segmentos $L_{z_1} \cap A_H$, $L_{z_2} \cap A_H$.

Consideremos los cuadriláteros cerrados siguientes (C' es un trapecio simétrico respecto a H):

$$C = \text{conv}([L_{z_1} \cap A] \cup [L_{z_2} \cap A]), \quad C' = \text{conv}([L_{z_1} \cap A_H] \cup [L_{z_2} \cap A_H]).$$

Entonces, $\text{diam}(A_H) = \|x_1 - x_2\| = \text{diam}(C')$. Por otro lado, como A es convexo y $L_{z_i} \cap A \subset A$, $i = 1, 2$, tenemos $C \subset A$ de donde $\text{diam}(C) \leq \text{diam}(A)$. Así que para probar que $\text{diam}(A_H) \leq \text{diam}(A)$ basta demostrar que $\text{diam}(C') \leq \text{diam}(C)$. Como C, C' están contenidos en el plano ortogonal a H que pasa por z_1, z_2 , deducimos que basta probar este apartado (3) en el caso $n = 2$, es decir, $A \in \mathcal{K}^2$. En este caso, H es una recta afín en \mathbb{R}^2 .

Vamos a cambiar la notación ligeramente. Consideremos en \mathbb{R}^2 una recta afín H , dos puntos $z_1, z_2 \in H$ y las rectas $r_i = z_i + H^\perp$, $i = 1, 2$. Dados $L_1, L_2 \geq 0$, consideremos el conjunto \mathcal{F} de todas las parejas (S_1, S_2) de segmentos cerrados $S_i \subset r_i$ de longitudes $\text{long}(S_i) = L_i$, $i = 1, 2$. Existe una única pareja $(S_1^H, S_2^H) \in \mathcal{F}$ formada por segmentos simétricos respecto a H . Claramente, el simetrizado de Steiner de cualquier $(S_1, S_2) \in \mathcal{F}$ es (S_1^H, S_2^H) . Para cada $(S_1, S_2) \in \mathcal{F}$ consideramos el cuadrilátero $\text{conv}(S_1 \cup S_2)$. Así, debemos probar que

$$(3.22) \quad \text{diam}[\text{conv}(S_1^H \cup S_2^H)] \leq \text{diam}[\text{conv}(S_1 \cup S_2)], \quad \forall (S_1, S_2) \in \mathcal{F}.$$

Para ello, fijemos $(S_1, S_2) \in \mathcal{F}$ y llamemos $S_1 = [x_1, x'_1]$, $S_2 = [x'_2, x_2]$ como en la Figura 3.8. Consideremos los 4 triángulos rectángulos A, B, \hat{A}, \hat{B} obtenidos al unir en cruz x_1 con x_2 , x'_1 con x'_2 junto con la perpendicular común a r_1, r_2 que pasa por el punto de corte de $[x_1, x_2]$ y $[x'_1, x'_2]$. Llamemos α_1, β_1 a las longitudes de los catetos de A (β_1 está medido sobre r_1) y δ_1 a su hipotenusa, ver Figura 3.8. Notemos que A, \hat{A} son triángulos semejan-

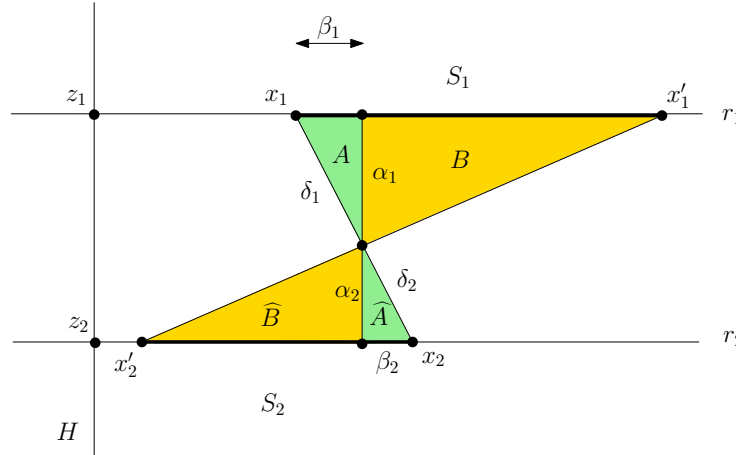


Figura 3.8: Los cuatro triángulos rectángulos A, B, \hat{A}, \hat{B} .

tes (lo mismo que B, \hat{B}). Así, $\exists \lambda > 0$ tales que los catetos α_2, β_2 y la hipotenusa δ_2 de \hat{A} cumplen

$$\alpha_2 = \lambda \alpha_1, \quad \beta_2 = \lambda \beta_1, \quad \delta_2 = \lambda \delta_1.$$

Por tanto, $\|x_1 - x_2\|^2 = (\delta_1 + \delta_2)^2 = (1 + \lambda)^2 \delta_1^2$, que por el Teorema de Pitágoras se escribe $(1 + \lambda)^2(\alpha_1^2 + \beta_1^2) = (1 + \lambda)^2 \alpha_1^2 + (1 + \lambda)^2 \beta_1^2$; es decir,

$$(3.23) \quad \|x_1 - x_2\|^2 = d(r_1, r_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2.$$

Si hacemos el mismo razonamiento con los triángulos B, \widehat{B} obtenemos $\|x'_1 - x'_2\|^2 = d(r_1, r_2)^2 + ([\|x_1 - x'_1\| - \beta_1] + [\|x_2 - x'_2\| - \beta_2])^2$. Pero $\|x_1 - x'_1\| = L_1$, $\|x_2 - x'_2\| = L_2$ son independientes del par $(S_1, S_2) \in \mathcal{F}$, es decir,

$$(3.24) \quad \|x'_1 - x'_2\|^2 = d(r_1, r_2)^2 + (L - \beta)^2,$$

donde $L = L_1 + L_2$ (fijo en \mathcal{F}) y $\beta = \beta_1 + \beta_2$. Veamos ya (3.22):

$$\begin{aligned} \text{diam} [\text{conv}(S_1 \cup S_2)] &= \max\{d(x_1, x_2), d(x'_1, x'_2)\} \\ &\stackrel{(3.23), (3.24)}{=} \max \left\{ \left(d(r_1, r_2)^2 + \beta^2 \right)^{1/2}, \left(d(r_1, r_2)^2 + (L - \beta)^2 \right)^{1/2} \right\}. \end{aligned}$$

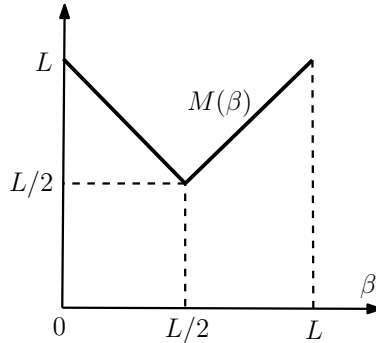
Las dos expresiones que aparecen en el máximo anterior son del tipo $f(t) = (d^2 + t^2)^{1/2}$, donde $d = d(r_1, r_2)$. La función f es no decreciente en $t \in [0, \infty)$ y $\beta, L - \beta \geq 0$, luego la última expresión se escribe

$$\max\{f(\beta), f(L - \beta)\} = f(\max\{\beta, L - \beta\}) = \left[d(r_1, r_2)^2 + (\max\{\beta, L - \beta\})^2 \right]^{1/2},$$

de donde

$$(3.25) \quad \text{diam} [\text{conv}(S_1 \cup S_2)] = \left[d(r_1, r_2)^2 + M(\beta)^2 \right]^{1/2},$$

donde $M(\beta) = \max\{\beta, L - \beta\}$. Ahora estimamos $M(\beta)$ por abajo. $\beta = \beta_1 + \beta_2$ se mueve en $[0, L = L_1 + L_2]$ ya que $\beta_i \in [0, L_i]$, $i = 1, 2$. La gráfica de $\beta \in [0, L] \mapsto M(\beta)$ es



Por tanto, de (3.25) tenemos

$$(3.26) \quad \text{diam} [\text{conv}(S_1 \cup S_2)] \geq [d(r_1, r_2)^2 + M(L/2)^2]^{1/2} = [d(r_1, r_2)^2 + (L/2)^2]^{1/2}.$$

El caso simétrico en la familia \mathcal{F} , es decir, cuando producimos el miembro de la izquierda de (3.22), es cuando $\beta_i = L_i/2$, en cuyo caso $\beta = \beta_1 + \beta_2 = L/2$. Esto no es otra cosa que el miembro de la derecha de (3.26), con lo que (3.22) está probado. Esto termina la demostración del apartado (3) del Teorema 3.5.1.

Para el apartado (4), tomemos $A \in \mathcal{K}^n$.

$$\begin{aligned} \text{area}(A_H) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} [\text{vol}_n(A_H + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}) - \text{vol}_n(A_H)] \\ &\stackrel{(\text{apdo (2)})}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} [\text{vol}_n(A_H + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}) - \text{vol}_n(A)]. \end{aligned}$$

Si probamos que

$$(3.27) \quad \text{vol}_n(A_H + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}) \leq \text{vol}_n(A + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}) \quad \forall \varepsilon \geq 0,$$

entonces tendremos la desigualdad $\text{area}(A_H) \leq \text{area}(A)$ que buscábamos. Supongamos probado que

$$(3.28) \quad A_H + \varepsilon \overline{\mathbb{B}} \subseteq (A + \varepsilon \overline{\mathbb{B}})_H \quad \forall \varepsilon \geq 0.$$

En tal caso,

$$\text{vol}_n(A_H + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}) \stackrel{(3.28)}{\leq} \text{vol}_n[(A + \varepsilon \overline{\mathbb{B}})_H] \stackrel{(\text{apdo (2)})}{=} \text{vol}_n(A + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}),$$

que es (3.27). Es decir, basta probar (3.28).

Tomemos $x \in A_H$ y $v \in \overline{\mathbb{B}}$. Sea $\Pi_H: \mathbb{R}^n \rightarrow H$ la proyección ortogonal de \mathbb{R}^n sobre H y $\overrightarrow{\Pi}_H: \mathbb{R}^n \rightarrow \overrightarrow{H}$ su aplicación lineal asociada. Llamemos $z = \Pi_H(x)$, $w = \overrightarrow{\Pi}_H(v)$. Así, $\Pi_H(x + \varepsilon v) = z + \varepsilon w$. Por definición de simetrización de Steiner para $A + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}$, para probar que $x + \varepsilon v \in (A + \varepsilon \overline{\mathbb{B}})_H$ (que es lo que queremos ver ya que esto implicaría (3.28)), basta comprobar que la siguiente desigualdad se cumple:

$$(3.29) \quad \|(x + \varepsilon v) - (z + \varepsilon w)\| \leq \frac{1}{2} \text{long} [L_{\Pi_H(x + \varepsilon v)} \cap (A + \varepsilon \overline{\mathbb{B}})],$$

donde $L_{\Pi_H(x + \varepsilon v)}$ es la recta ortogonal a H que pasa por $\Pi_H(x + \varepsilon v)$.

Para probar (3.29), simplificaremos un poco la notación. Dado $q \in H$, llamaremos

$$\lambda(q) = \text{long}(L_q \cap A), \quad \lambda_\varepsilon(q) = \text{long}[L_q \cap (A + \varepsilon \overline{\mathbb{B}})].$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\|(x + \varepsilon v) - (z + \varepsilon w)\|^2 &= \|(x - z) + \varepsilon(v - w)\|^2 \\
&= \|x - z\|^2 + \varepsilon^2\|v - w\|^2 + 2\varepsilon\langle x - z, v - w \rangle \\
&\stackrel{(\star)}{=} \|x - z\|^2 + \varepsilon^2(\|v\|^2 - \|w\|^2) + 2\varepsilon\langle x - z, v - w \rangle \\
&\leq \|x - z\|^2 + \varepsilon^2(\|v\|^2 - \|w\|^2) + 2\varepsilon\|x - z\|\|v - w\| \\
&\stackrel{(\star)}{=} \|x - z\|^2 + \varepsilon^2(\|v\|^2 - \|w\|^2) + 2\varepsilon\|x - z\|(\|v\|^2 - \|w\|^2)^{1/2} \\
&= (\|x - z\| + \varepsilon(\|v\|^2 - \|w\|^2)^{1/2})^2,
\end{aligned}$$

donde en (\star) hemos usado que la descomposición $v = w + (v - w)$ es ortogonal. Como $x \in A_H$ y $z = \Pi_H(x)$, por definición de simetrización de Steiner de A tenemos $\|x - z\| \leq \frac{1}{2}\lambda(z)$ luego lo anterior se escribe

$$(3.30) \quad \|(x + \varepsilon v) - (z + \varepsilon w)\| \leq \frac{1}{2}\lambda(z) + \varepsilon(\|v\|^2 - \|w\|^2)^{1/2}.$$

Por otro lado, recordemos que $\|w\| \leq \|v\| \leq 1$ y que $w \in \vec{H}$. Tomemos $v_1 \in (\vec{H})^\perp$ tal que $\|w + v_1\| = 1$. Así, $z + (w + v_1), z + (w - v_1) \in \mathbb{S}^{n-1}(z, 1)$. Por tanto, si llamamos $L_z \cap A = [a, b]$, entonces $a + \varepsilon(w - v_1), b + \varepsilon(w + v_1) \in A + \varepsilon\mathbb{B}$, ver Figura 3.9.

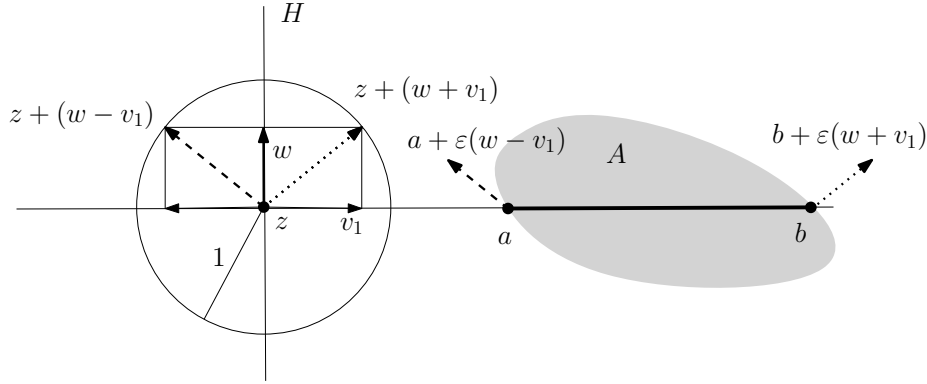


Figura 3.9: Los puntos $a + \varepsilon(w - v_1), b + \varepsilon(w + v_1)$ están en $A + \varepsilon\mathbb{B}$.

Además, $\Pi_H(a + \varepsilon(w - v_1)) = \Pi_H(b + \varepsilon(w + v_1)) = z + \varepsilon w$. Como $A + \varepsilon\mathbb{B}$ es convexo, tenemos $[a + \varepsilon(w - v_1), b + \varepsilon(w + v_1)] \subset L_{z+\varepsilon w} \cap (A + \varepsilon\mathbb{B})$, luego

$$\lambda_\varepsilon(z + \varepsilon w) \geq \text{long}([a + \varepsilon(w - v_1), b + \varepsilon(w + v_1)]) = \|b - a + 2\varepsilon v_1\|.$$

Como $b - a$ y v_1 son vectores con la misma dirección y sentido,

$$\|b - a + 2\varepsilon v_1\| = \|b - a\| + 2\varepsilon\|v_1\| = \lambda(z) + 2\varepsilon(1 - \|w\|^2)^{1/2},$$

y por tanto,

$$(3.31) \quad \frac{1}{2}\lambda_\varepsilon(z + \varepsilon w) \geq \frac{1}{2}\lambda(z) + \varepsilon(1 - \|w\|^2)^{1/2}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \|(x + \varepsilon v) - (z + \varepsilon w)\| &\stackrel{(3.30)}{\leq} \frac{1}{2}\lambda(z) + \varepsilon(\|v\|^2 - \|w\|^2)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{2}\lambda(z) + \varepsilon(1 - \|w\|^2)^{1/2} \stackrel{(3.31)}{\leq} \frac{1}{2}\lambda_\varepsilon(z + \varepsilon w), \end{aligned}$$

lo que prueba (3.29). Esto prueba la desigualdad del apartado (4) del Teorema 3.5.1 (veremos otra demostración de esta desigualdad en las página 103).

Terminaremos la demostración del Teorema 3.5.1 analizando cuándo se da la igualdad en el apartado (4).

- Si $A \in \mathcal{K}^n$ es simétrico respecto a un hiperplano paralelo a H , que podrá escribirse $H + v$ para algún $v \in \vec{H}^\perp$, entonces

$$\begin{aligned} A_H &= [(A - v) + v]_H \\ &= (A - v)_H && \text{(por el Lema 3.5.3)} \\ &= A - v && \text{(por ser } A - v \text{ simétrico respecto a } H) \end{aligned}$$

luego $\text{area}(A_H) = \text{area}(A - v) = \text{area}(A)$.

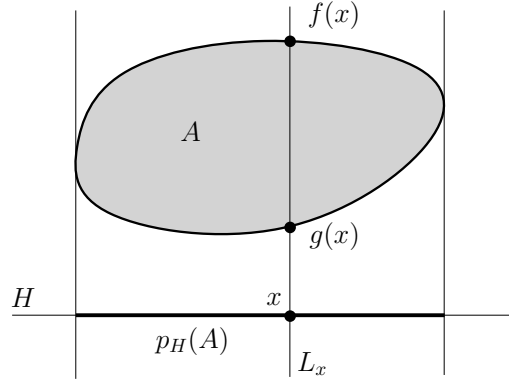
- Si A está contenido en un hiperplano ortogonal a H , el Lema 3.5.4 implica que $\text{area}(A) = 2 \text{vol}_{n-1}(A)$. En este caso, A_H también está contenido en el mismo hiperplano ortogonal a H , luego análogamente $\text{area}(A_H) = 2 \text{vol}_{n-1}(A_H)$. En esta situación, podemos aplicar el apartado (2) de este teorema (viendo A, A_H en $H_1 \equiv \mathbb{R}^{n-1}$ donde la simetrización se hace respecto al hiperplano $H \cap H_1$ de H_1) para concluir que $\text{vol}_{n-1}(A) = \text{vol}_{n-1}(A_H)$ luego $\text{area}(A) = \text{area}(A_H)$.

Los dos puntos anteriores prueban la condición suficiente en la igualdad del apartado (4) del teorema. Para la condición necesaria, supongamos que $A \in \mathcal{K}^n$ cumple $\text{area}(A) = \text{area}(A_H)$ y que A no está contenido en ningún hiperplano ortogonal a H . Debemos comprobar que

$$(3.32) \quad \exists v \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } A \text{ es simétrico respecto al hiperplano } H + v.$$

Para ello, calcularemos $\text{area}(A)$ a partir de la geometría de $\Pi_H(A)$, la proyección ortogonal de A sobre H , y haremos lo mismo con $\text{area}(A_H)$. Esto nos dará otra demostración de que $\text{area}(A_H) \leq \text{area}(A)$, como habíamos adelantado en la página 103. Obviaremos algunas cuestiones de regularidad en lo que sigue.

Salvo un cambio en el sistema de referencia, podemos suponer $H = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}^{n-1}\}$. $\Pi_H(A)$ es un convexo de H con interior relativo no vacío, porque A no está contenido en ningún hiperplano de \mathbb{R}^n ortogonal a H . Definimos dos funciones $f, g: \Pi_H(A) \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente forma: dado $x \in \Pi_H(A)$, la recta afín $L_x = x + \vec{H}^\perp = x + \langle e_n \rangle$ corta a A en un segmento cerrado S_x (que puede ser un punto), que será de la forma $S_x = [x + g(x)e_n, x + f(x)e_n]$.



La convexidad de A hace que f sea cóncava y g convexa. Además,

$$\partial A = \text{grafo}(f) \cup \text{grafo}(g) \cup C,$$

donde $C = \partial A - [\text{grafo}(f) \cup \text{grafo}(g)]$ está contenida en $\Pi_H^{-1}(\partial \Pi_H(A))$. Como g es convexa en el compacto $\Pi_H(A)$, es Lipschitziana por el Lema 1.7.1. Por tanto, existe el gradiente ∇g de g casi por doquier (c.p.d.) en $\Pi_H(A)$; para esto, usar derivadas débiles, o bien usar el capítulo 1.5 de [2]. Análogamente, existe ∇f c.p.d. en $\Pi_H(A)$.

Ya podemos escribir el contenido de Minkowski de A :

$$\begin{aligned} \text{area}(A) &= \text{area}[\text{grafo}(f)] + \text{area}[\text{grafo}(g)] + \text{area}(C) \\ &= \int_{\Pi_H(A)} \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} dV_{n-1} + \int_{\Pi_H(A)} \sqrt{1 + \|\nabla g\|^2} dV_{n-1} \\ &\quad + \int_{\partial \Pi_H(A)} (f - g) dV_{n-2}, \end{aligned}$$

donde dV_k es el elemento de volumen métrico de \mathbb{R}^k . A continuación describimos de forma análoga $\text{area}(A_H)$: Dado $x \in \Pi_H(A)$, el punto medio del segmento S_x es $\frac{1}{2}(f(x) + g(x))$, luego por simetrización respecto a $H = \{x_n = 0\}$, S_x se transforma en el segmento

$$\left[x + \left(g(x) - \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) \right) e_n, x + \left(f(x) - \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) \right) e_n \right]$$

$$= \left[x - \frac{1}{2}(f(x) - g(x))e_n, x + \frac{1}{2}(f(x) - g(x))e_n \right],$$

es decir,

$$A_H = \{(x, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid x \in \Pi_H(A), \tilde{g}(x) \leq x_n \leq \tilde{f}(x)\},$$

donde $\tilde{f}, \tilde{g}: \Pi_H(A) \rightarrow \mathbb{R}$ viene dadas por

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}(f + g)(x), \quad \tilde{g}(x) = -\frac{1}{2}(f - g)(x), \quad \forall x \in \Pi_H(A).$$

Aplicando el desarrollo anterior para expresar el contenido de Minkowski de A_H :

$$\begin{aligned} \text{area}(A_H) &= \int_{\Pi_H(A)} \sqrt{1 + \|\nabla \tilde{f}\|^2} dV_{n-1} + \int_{\Pi_H(A)} \sqrt{1 + \|\nabla \tilde{g}\|^2} dV_{n-1} \\ &\quad + \int_{\partial \Pi_H(A)} (\tilde{f} - \tilde{g}) dV_{n-2}, \\ &= 2 \int_{\Pi_H(A)} \sqrt{1 + \|\nabla \left(\frac{f+g}{2} \right)\|^2} dV_{n-1} + \int_{\partial \Pi_H(A)} (f - g) dV_{n-2}. \end{aligned}$$

Por otro lado, en $\Pi_H(A)$ tenemos $2 \left(1, \nabla \left(\frac{f+g}{2} \right) \right) = (1, \nabla f) + (1, -\nabla g)$ luego tomando normas,

$$\begin{aligned} 2 \sqrt{1 + \|\nabla \left(\frac{f+g}{2} \right)\|^2} &= 2 \left\| \left(1, \nabla \left(\frac{f+g}{2} \right) \right) \right\| \\ &\stackrel{(\star)}{\leq} \|(1, \nabla f)\| + \|(1, -\nabla g)\| \\ &= \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} + \sqrt{1 + \|\nabla g\|^2}, \end{aligned}$$

donde en (\star) hemos usado la desigualdad triangular. Usando esto en la expresión anterior de $\text{area}(A_H)$, deducimos:

$$\begin{aligned} \text{area}(A_H) &\leq \int_{\Pi_H(A)} \sqrt{1 + \|\nabla f\|^2} dV_{n-1} + \int_{\Pi_H(A)} \sqrt{1 + \|\nabla g\|^2} dV_{n-1} \\ &\quad + \int_{\partial \Pi_H(A)} (f - g) dV_{n-2} \\ &= \text{area}(A). \end{aligned}$$

Notemos que el desarrollo anterior nos proporciona otra forma de probar la desigualdad del apartado (4) del teorema. Veamos ya (3.32): Si $\text{area}(A_H) = \text{area}(A)$, entonces se da la igualdad en (\star) c.p.d. en $\Pi_H(A)$, luego $\nabla f = -\nabla g$ c.p.d. en $\Pi_H(A)$. Por tanto, $\nabla(f + g) = 0$ c.p.d. en $\Pi_H(A)$, lo que implica que $f + g$ es constante $2a \in \mathbb{R}$ en $\Pi_H(A)$. Así, A es simétrico respecto al hiperplano $\{x_n = a\}$, que es paralelo a H . \square

3.6. La desigualdad isoperimétrica

Veremos a continuación que la bola es el convexo que encierra más volumen para un perímetro dado, y que es el único convexo con esta propiedad de minimización.

Teorema 3.6.1 *Sea $A \in \mathcal{K}_0^n$ y $\bar{\mathbb{B}} \subset \mathbb{R}^n$ una bola cerrada con $\text{vol}_n(A) = \text{vol}_n(\bar{\mathbb{B}})$. Entonces, $\text{area}(\bar{\mathbb{B}}) \leq \text{area}(A)$, y la igualdad es cierta si y sólo si $\exists v \in \mathbb{R}^n$ tal que $A = \bar{\mathbb{B}} + v$.*

Demostración. Como $A \in \mathcal{K}_0^n$, tenemos $\text{int}(A) \neq \emptyset$ y $\text{vol}_n(A) > 0$. Dado $r > 0$, sea

$$\mathcal{F}_r = \{X \in \mathcal{K}_0^n \mid \text{vol}_n(X) = \text{vol}_n(A), \text{ y } X \text{ contiene una bola cerrada de radio } r\}.$$

Fijado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sea

$$\mathcal{F}_r(x_0) = \{X \in \mathcal{F}_r \mid X \text{ contiene a } \bar{\mathbb{B}}(x_0, r)\}.$$

Es evidente que $\forall X \in \mathcal{F}_r$, $\exists v \in \mathbb{R}^n$ tal que $X + v \in \mathcal{F}_r(x_0)$. Por tanto,

$$\inf_{X \in \mathcal{F}_r} \text{area}(X) = \inf_{X \in \mathcal{F}_r(x_0)} \text{area}(X).$$

La razón de que usemos la familia $\mathcal{F}_r(x_0)$ en vez de \mathcal{F} es que $\mathcal{F}(x_0)$ es acotada en distancia de Hausdorff (Afirmación 3.6.2) mientras que \mathcal{F} no lo es: esto es consecuencia directa del Lema 2.1.3, ya que podemos tomar $X \in \mathcal{F}_r$ conteniendo a una bola cerrada de radio r a distancia arbitrariamente grande del origen. Llamemos

$$D_r = \sup_{X \in \mathcal{F}_r} \text{diam}(X) = \sup_{X \in \mathcal{F}_r(x_0)} \text{diam}(X).$$

(El diámetro anterior está medido en la distancia usual de \mathbb{R}^n).

Afirmación 3.6.1 *En la situación anterior, $D_r < \infty$.*

Demostración. Basta comprobar que $\exists R > 0$ tal que $X \subseteq \bar{\mathbb{B}}(\vec{0}, R) \forall X \in \mathcal{F}_r(x_0)$. Por reducción al absurdo, supongamos que existe una sucesión $\{X_m\}_m \subset \mathcal{F}_r(x_0)$ y puntos $x_m \in X_m$ tales que $\|x_m\| \rightarrow \infty$ cuando $m \rightarrow \infty$. Como X_m es convexo y contiene a $\bar{\mathbb{B}}(x_0, r)$ y a x_m , X_m contendrá un cono cerrado $C(x_m, r)$ de vértice x_m y base un disco $(n-1)$ -dimensional centrado en x_0 de radio r . Usando la fórmula (2.16),

$$\text{vol}_n(C(x_m, r)) = \frac{\omega_{n-1}}{n} r^{n-1} \|x_m - x_0\| \rightarrow \infty,$$

lo que contradice que $\text{vol}_n(X_m) = \text{vol}_n(A)$ para todo m . □

Afirmación 3.6.2 *$\mathcal{F}_r(x_0)$ es acotado en distancia de Hausdorff.*

Demostración. Por el Lema 2.1.3, basta probar que $\cup_{X \in \mathcal{F}_r(x_0)} X$ es acotado en \mathbb{R}^n con la distancia usual. Pero $X \subset \overline{\mathbb{B}}(x_0, D_r) \ \forall X \in \mathcal{F}_r(x_0)$ por definición de diámetro, luego $\cup_{X \in \mathcal{F}_r(x_0)} X \subset \overline{\mathbb{B}}(x_0, D_r)$, luego $\cup_{X \in \mathcal{F}_r(x_0)} X$ es acotado en \mathbb{R}^n . \square

Afirmación 3.6.3 *Existe un mínimo para el área en $\mathcal{F}_r(x_0)$, al que llamaremos X_∞ .*

Demostración. Sea $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_r(x_0)$ una sucesión con $\text{area}(X_i) \searrow \inf_{X \in \mathcal{F}_r(x_0)} \text{area}(X)$. Como $\{X_i\}_i \subset \mathcal{K}^n$ es acotada en distancia de Hausdorff por serlo $\mathcal{F}_r(x_0)$, el Teorema de selección de Blaschke (Teorema 2.2.2) asegura que tras pasar a una parcial, $\{X_i\}_i$ converge en distancia de Hausdorff a un compacto $X_\infty \in \mathcal{K}^n$. Como $\text{vol}_n: (\mathcal{K}^n, \delta) \rightarrow [0, \infty)$ es continua (Teorema 2.3.1) y $\text{area}: (\mathcal{K}^n, \delta) \rightarrow [0, \infty)$ es continua (Proposición 3.4.1), tenemos

$$\begin{aligned} \text{vol}_n(X_\infty) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \text{vol}_n(X_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \text{vol}_n(A) = \text{vol}_n(A), \\ \text{area}(X_\infty) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \text{area}(X_i) = \inf_{X \in \mathcal{F}_r(x_0)} \text{area}(X). \end{aligned}$$

Además, para cada $\varepsilon > 0$, existe $i_0 \geq i$ tal que $\forall i \geq i_0$, $\overline{\mathbb{B}}(x_0, r) \subset X_i \subset X_\infty + \varepsilon \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, 1)$ luego X_∞ contiene a $\overline{\mathbb{B}}(x_0, r)$, es decir, $X_\infty \in \mathcal{F}_r(x_0)$. \square

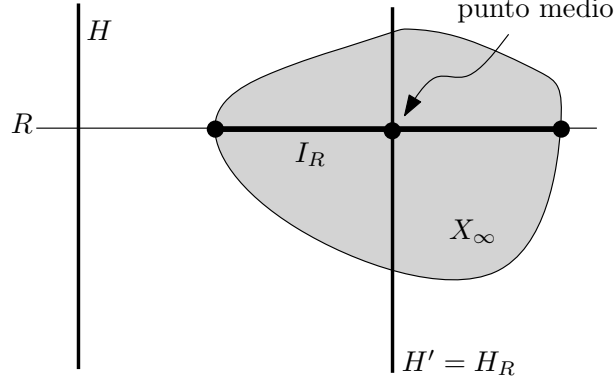
Nuestro siguiente objetivo será probar que X_∞ es una bola cerrada. Lo haremos en cuatro pasos.

Afirmación 3.6.4 *Dado cualquier hiperplano $H \subset \mathbb{R}^n$, existe un hiperplano H' paralelo a H tal que X_∞ es simétrico respecto a H' .*

Demostración. Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ una recta ortogonal a H , que corte a X_∞ en al menos dos puntos. Así, $R \cap X_\infty$ es un segmento cerrado no trivial $I_R \subset R$. Sea H_R el hiperplano paralelo a H (es decir, ortogonal a R) que pasa por el punto medio de I_R . Si vemos que X_∞ es simétrico respecto a $H' = H_R$ habremos terminado.

Sea $(X_\infty)_{H'}$ el simetrizado de Steiner de X_∞ respecto a H' . Por el Teorema 3.5.1 tenemos $(X_\infty)_{H'} \in \mathcal{K}^n$, $\text{vol}_n[(X_\infty)_{H'}] = \text{vol}_n(X_\infty)$ ($= \text{vol}_n(A)$) y $\text{area}[(X_\infty)_{H'}] \leq \text{area}(X_\infty)$ con igualdad si y sólo si X_∞ es simétrico respecto a un hiperplano paralelo a H' o bien X_∞ está contenido en un hiperplano ortogonal a H' . Esta última opción no puede darse, ya que $\text{vol}_n(X_\infty) > 0$. Por otro lado, como $\overline{\mathbb{B}}(x_0, r) \subset X_\infty$, por definición de simetrización de Steiner tenemos que $(X_\infty)_{H'}$ contiene a la bola cerrada $\overline{\mathbb{B}}(\Pi_{H'}(x_0), r)$, donde $\Pi_{H'}: \mathbb{R}^n \rightarrow H'$ es la proyección ortogonal sobre H' . Por tanto, $(X_\infty)_{H'} \in \mathcal{F}_r$ luego $\text{area}(X_\infty) \leq \text{area}[(X_\infty)_{H'}]$. Esto implica que $\text{area}(X_\infty) = \text{area}[(X_\infty)_{H'}]$, luego X_∞ es simétrico respecto a un hiperplano paralelo a H' . Como H' pasa por el punto medio de I_R , deducimos que X_∞ es simétrico respecto a H' . \square

A continuación definiremos el centro de la “futura” bola cerrada X_∞ . Tomemos una base ortonormal v_1, \dots, v_n de \mathbb{R}^n . Por la Afirmación 3.6.4, existen hiperplanos H_1, \dots, H_n de



\mathbb{R}^n , ortogonales a estas direcciones, de forma que X_∞ es simétrico respecto a H_i , $i = 1, \dots, n$. Sea $y_0 \in \mathbb{R}^n$ el único punto de intersección en $H_1 \cap \dots \cap H_n$. Así, X_∞ es simétrico respecto a la simetría central $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de centro y_0 . Por el mismo argumento de la demostración de la Afirmación 3.6.4, X_∞ contiene a $\bar{\mathbb{B}}(y_0, r)$; en particular, $y_0 \in \text{int}(X_\infty)$.

Afirmación 3.6.5 *Dado cualquier hiperplano $H \subset \mathbb{R}^n$ que pase por y_0 , X_∞ es simétrico respecto a H (en particular, X_∞ sólo es simétrico respecto a hiperplanos que pasan por y_0).*

Demostración. Por la Afirmación 3.6.4, existe un hiperplano $H' \subset \mathbb{R}^n$ paralelo a H tal que X_∞ es simétrico respecto a H' . Se trata de comprobar que $y_0 \in H'$ (con lo que $H = H'$ y habremos terminado). Por reducción al absurdo, supongamos que $y_0 \notin H'$ y llamemos y'_0 al simétrico de y_0 respecto a H' . Como $y_0 \in \text{int}(X_\infty)$, la intersección de la recta r que pasa por y_0, y'_0 con X_∞ es un segmento cerrado I no trivial. Como X_∞ es simétrico respecto a ϕ , se tiene

$$\phi(I) = \phi(X_\infty \cap r) = \phi(X_\infty) \cap \phi(r) = X_\infty \cap r = I,$$

luego y_0 es el punto medio de I . Pero X_∞ es simétrico respecto a H' , e I es ortogonal a H' (por pasar por y_0, y'_0), luego I también es simétrico respecto a H' . Esto nos dice que $y_0 \in H'$, contradicción. \square

Afirmación 3.6.6 *Si $x_1, x_2 \in \partial X_\infty$, $x_1 \neq x_2$, entonces $(x_1, x_2) \subset \text{int}(X_\infty)$.*

Demostración. Caso 1: Existe $z \in (x_1, x_2) \mid z \in \text{int}(X_\infty)$. Usando dos veces el Lema 1.1.3 concluimos que $\overline{(x_1, z]} \cap [z, x_2) \subset \text{int}(X_\infty)$, luego $(x_1, x_2) \subset \text{int}(X_\infty)$.

Caso 2: $[x_1, x_2] \subset \partial X_\infty$. Ampliamos $[x_1, x_2]$ al mayor intervalo posible $[y_1, y_2]$ contenido en ∂X_∞ . Por la Afirmación 3.6.4, existe un hiperplano H_1 ortogonal a $[y_1, y_2]$ tal que X_∞

es simétrico respecto a H_1 . Por la Afirmación 3.6.5, H_1 pasa por y_0 . Como $y_0 \in \text{int}(X_\infty)$ y $[x_1, x_2] \subset \partial X_\infty$, concluimos que $y_0 \notin [y_1, y_2]$. Además por simetría de X_∞ respecto a H_1 y por la propiedad de maximalidad de $[y_1, y_2]$, tenemos que $[y_1, y_2]$ corta a H_1 en el punto medio $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ de y_1 e y_2 . Para seguir debemos quitarnos los casos $n = 1, 2$.

Si $n = 1$, entonces $y_0 \in X_\infty = [y_1, y_2]$, contradicción. Supongamos $n = 2$ y consideremos una simetría $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ respecto a una recta que pase por y_0 y que corte al segmento $(\frac{1}{2}(y_1 + y_2), y_2)$ como en la Figura 3.10. Entonces, X_∞ es simétrico respecto a

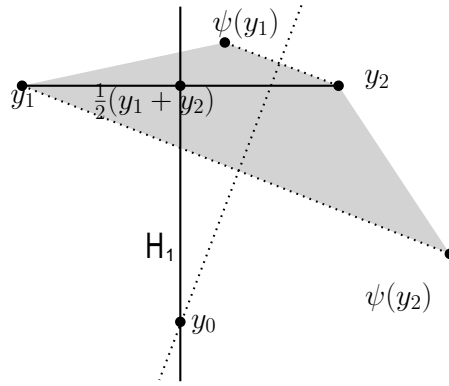


Figura 3.10: La zona sombreada está contenida en X_∞ .

ψ (Afirmación 3.6.5) luego $\psi(y_1), \psi(y_2)$ están en $\psi(\partial X_\infty) = \partial X_\infty$. Por ser X_∞ convexo, esto implica que $\text{conv}(\{y_1, y_2, \psi(y_1), \psi(y_2)\}) \subset X_\infty$, lo que contradice que $[y_1, y_2] \subset \partial X_\infty$. Así, que en lo que resta supondremos $n \geq 3$.

Sea $L \subset \mathbb{R}^n$ la recta que pasa por $y_0, \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$. Los hiperplanos de \mathbb{R}^n con base L están parametrizados por $H_\theta, \theta \in SO(n-2)$.

Dado H_θ , sea $\psi_\theta: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la simetría respecto a H_θ . Así,

$$D := \bigcup_{\theta \in SO(n-2)} \psi_\theta([y_1, y_2])$$

es el disco $(n-1)$ -dimensional contenido en el hiperplano $\frac{1}{2}(y_1 + y_2) + L^\perp$, centrado en $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ y con $y_1, y_2 \in \partial D$. Como X_∞ es simétrico respecto a ψ_θ (Afirmación 3.6.5), tenemos $\psi_\theta([y_1, y_2]) \subset \psi_\theta(X_\infty) = X_\infty$ para todo $\theta \in SO(n-2)$ luego $D \subset X_\infty$. Ahora consideramos simetrías $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ respecto a hiperplanos “inclinados” que pasan por y_0 y que cortan al disco D , tal y como hicimos en el caso $n = 2$ anterior, llegando a contradicción. Esto termina el caso 2 y con ello la demostración de la afirmación. \square

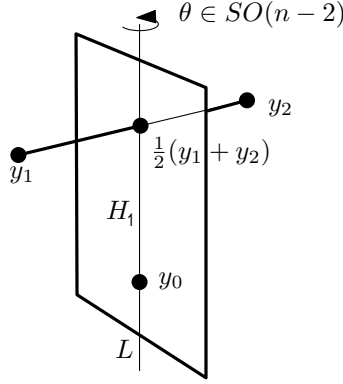


Figura 3.11: Las rotaciones alrededor de la recta L forman un grupo isomorfo a $SO(n-2)$.

Afirmación 3.6.7 *Existe $R > 0$ tal que $X_\infty = \overline{\mathbb{B}}(y_0, R)$.*

Demostración. Fijemos $x_1, x_2 \in \partial X_\infty$, $x_1 \neq x_2$, que existen por el Teorema 1.2.1. Por la Afirmación 3.6.6, $(x_1, x_2) \subset \text{int}(X_\infty)$. Por la Afirmación 3.6.5, X_∞ es simétrico respecto al hiperplano H ortogonal a $[x_1, x_2]$ que pasa por y_0 . Como $[x_1, x_2]$ es ortogonal a H , $(x_1, x_2) \subset \text{int}(X_\infty)$ y $x_1, x_2 \in \partial X_\infty$, deducimos que $[x_1, x_2]$ es simétrico respecto a H , es decir, H pasa por el punto medio de x_1, x_2 . Esto implica que $d(y_0, x_1) = d(y_0, x_2)$. Fijando $x_1 \in \partial X_\infty$ y moviendo $x_2 \in \partial X_\infty - \{x_1\}$, obtenemos que $d(y_0, x)$ es una constante (positiva) independiente de $x \in \partial X_\infty$. Por tanto, $\partial X_\infty \subset \mathbb{S}^{n-1}(y_0, R)$. Finalmente, por el Teorema 1.2.1, ∂X_∞ es homeomorfo a una esfera $(n-1)$ -dimensional, luego $\partial X_\infty = \mathbb{S}^{n-1}(y_0, R)$. Esto implica que $X_\infty = \overline{\mathbb{B}}(y_0, R)$. Esto termina de demostrar el teorema. \square

Nota 3.6.1

- (1) Cabe preguntarse si la desigualdad isoperimétrica puede extenderse a $A \in \mathcal{K}^n$, es decir cuando $\text{Vol}(A) = 0$. Esto implica que $k := \dim(A) < n$. En este caso, aplicaremos la desigualdad isoperimétrica en $\text{aff}(A) \equiv \mathbb{R}^k$ (recordemos que el interior relativo de A en $\text{aff}(A)$ es no vacío por la Proposición 1.3.1, luego podemos considerar A como un elemento de \mathcal{K}_0^k para aplicar el Teorema 3.6.1, para concluir que la desigualdad isoperimétrica sigue siendo cierta, comparando A con una bola de su mismo volumen k -dimensional.
- (2) La desigualdad isoperimétrica y la caracterización de la igualdad son ciertas sin imponer convexidad sobre $A \subset \mathbb{R}^n$, siempre que su volumen n -dimensional y el área de su borde tengan sentido. Por ejemplo, es válida si A es la región encerrada por una hipersuperficie compacta y orientable de \mathbb{R}^n .

3.7. La desigualdad isodiamétrica

Definición 3.7.1 Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, se define su *inradio* y *circunradio* como

$$\text{inradio}(A) = \sup\{r > 0 \mid \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ con } \mathbb{B}(x, r) \subset A\},$$

$$\text{circunradio}(A) = \inf\{R > 0 \mid \exists y \in \mathbb{R}^n \text{ con } A \subset \mathbb{B}(y, R)\}.$$

A una bola $\mathbb{B}(x, r) \subset A$ con $r = \text{inradio}(A)$ se le llama *in-bola*, y a una bola $\mathbb{B}(y, R) \supset A$ con $R = \text{circunradio}(A)$ se le llama *circumbola*.

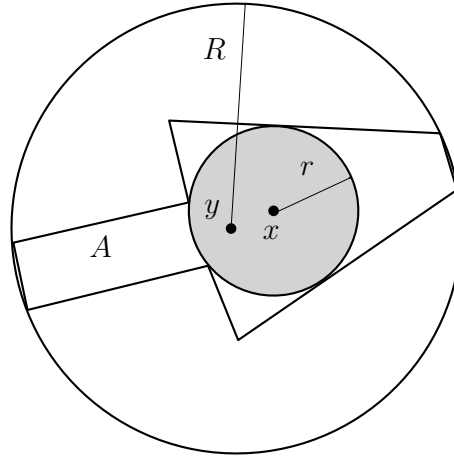


Figura 3.12: $\mathbb{B}(x, r)$ es una in-bola y $\mathbb{B}(y, R)$ es la circumbola de A .

Es fácil comprobar que la in-bola, si existe, no tiene porqué ser única. Sin embargo, la circumbola es única caso de existir: si $\mathbb{B}(y_1, R), \mathbb{B}(y_2, R)$ son dos circumbolas de $A \subset \mathbb{R}^n$ con $y_1 \neq y_2$, entonces $A \subset \mathbb{B}(y_1, R) \cap \mathbb{B}(y_2, R)$ luego existen $R' \in (0, R)$ e $y_3 \in \mathbb{R}^n$ tales que $\mathbb{B}(y_1, R) \cap \mathbb{B}(y_2, R) \subset \mathbb{B}(y_3, R')$, lo que contradice la definición de circunradio.

Recordemos que \mathcal{C}^n es la familia de compactos no vacíos en \mathbb{R}^n .

Lema 3.7.1 *El circunradio $\text{cr}: (\mathcal{C}^n, \delta) \rightarrow [0, \infty)$ es una aplicación contractiva (en particular, es continua en la distancia de Hausdorff):*

$$|\text{cr}(A) - \text{cr}(A')| \leq \delta(A, A'), \quad \forall A, A' \in \mathcal{C}^n.$$

Demostración. Sean $A, A' \in \mathcal{C}^n$. Denotemos por $\overline{\mathbb{B}} = \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, 1)$. Por definición de circunradio de A' , existe $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $A' \subset \overline{\mathbb{B}}(x, \text{cr}(A'))$. Así,

$$A \subset A' + \delta(A, A')\overline{\mathbb{B}} \subset \overline{\mathbb{B}}(x, \text{cr}(A')) + \delta(A, A')\overline{\mathbb{B}}$$

$$= \{x\} + \text{cr}(A')\overline{\mathbb{B}} + \delta(A, A')\overline{\mathbb{B}} = \overline{\mathbb{B}}(x, \text{cr}(A') + \delta(A, A')),$$

luego por definición de circunradio de A , $\text{cr}(A) \leq \text{cr}(A') + \delta(A, A')$. Análogamente se prueba que $\text{cr}(A') \leq \text{cr}(A) + \delta(A, A')$. \square

Lema 3.7.2 *La aplicación diámetro, $\text{diam}: (\mathcal{C}^n, \delta) \rightarrow [0, \infty)$, es continua.*

Demostración. Sea $\{A_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^n$ una sucesión convergente a $A \in \mathcal{C}^n$ en distancia de Hausdorff, y sea $\varepsilon > 0$. Veamos que $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\text{diam}(A_m) - \text{diam}(A) \leq \varepsilon \forall m \geq m_0$. Invirtiendo los papeles de A_m, A se probará análogamente que $\text{diam}(A) - \text{diam}(A_m) \leq \varepsilon$ a partir de un natural (dependiendo de ε), y habremos terminado.

Necesitaremos la siguiente caracterización del diámetro (que es evidente):

$$(3.33) \quad \text{diam}(A) = \inf\{R > 0 \mid A \subset \overline{\mathbb{B}}(x, R), \forall x \in A\}.$$

Tomemos $x \in A_m$. Como $A_m \subset A + \delta(A_m, A)\overline{\mathbb{B}}$, existe $y_m \in A$ tal que $x \in \overline{\mathbb{B}}(y_m, \delta(A_m, A))$. Como $y_m \in A$, por definición de diámetro tenemos $A \subset \overline{\mathbb{B}}(y_m, \text{diam}(A))$. Por tanto,

$$(3.34) \quad A_m \subset A + \delta(A_m, A)\overline{\mathbb{B}} \subset \overline{\mathbb{B}}(y_m, \text{diam}(A)) + \delta(A_m, A)\overline{\mathbb{B}}.$$

Por otro lado, dado $z \in \overline{\mathbb{B}}(y_m, \text{diam}(A))$ se tiene $d(z, x) \leq d(z, y_m) + d(y_m, x) \leq \text{diam}(A) + d(y_m, x) \leq \text{diam}(A) + \delta(A_m, A)$. Por tanto,

$$(3.35) \quad \overline{\mathbb{B}}(y_m, \text{diam}(A)) \subset \overline{\mathbb{B}}(x, \text{diam}(A) + \delta(A_m, A)).$$

De (3.34) y (3.35) se tiene

$$(3.36) \quad A_m \subset \overline{\mathbb{B}}(x, \text{diam}(A) + \delta(A_m, A)) + \delta(A_m, A)\overline{\mathbb{B}} \subset \overline{\mathbb{B}}(x, \text{diam}(A) + 2\delta(A_m, A)).$$

Como $\delta(A_m, A) \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ a partir del cual $2\delta(A_m, A) < \varepsilon$, luego (3.36) nos dice que $A_m \subset \overline{\mathbb{B}}(x, \text{diam}(A) + \varepsilon) \forall m \geq m_0$. Como x es arbitrario en A_m y m_0 no depende de x , de la caracterización (3.33) para el diámetro de A_m obtenemos que $\text{diam}(A_m) \leq \text{diam}(A) + \varepsilon \forall m \geq m_0$. \square

Ahora vamos a minimizar el circunradio en cierta familia de compactos convexos dependiendo de un $A \in \mathcal{K}_0^n$:

Lema 3.7.3 *Dado $A \in \mathcal{K}_0^n$, consideremos la familia*

$$\mathcal{N}(A) = \{C \in \mathcal{K}_0^n \mid \text{vol}(A) \leq \text{vol}(C), \text{diam}(C) \leq \text{diam}(A)\}.$$

Entonces, existe $C \in \mathcal{N}(A)$ tal que $\text{cr}(C) = \min_{C' \in \mathcal{N}(A)} \text{cr}(C')$.

Demostración. Notemos que la familia $\mathcal{N}(A)$ es no vacía porque $A \in \mathcal{N}(A)$. Como $\mathcal{N}(A)$ es cerrada por traslaciones en \mathbb{R}^n , $\mathcal{N}(A)$ no puede ser acotada en distancia de Hausdorff (Lema 2.1.3). Dado $C \in \mathcal{N}(A)$, denotaremos por $\overline{\mathbb{B}}_C$ al cierre de la circumbola de C . $\overline{\mathbb{B}}_C$ no pertenece en general a $\mathcal{N}(A)$, porque no tiene porqué cumplir $\text{diam}(\overline{\mathbb{B}}_C) \leq \text{diam}(A)$.

Consideremos la subfamilia

$$\mathcal{H}(A) = \{C \in \mathcal{N}(A) \mid C \subset \overline{\mathbb{B}}_A\}.$$

De nuevo $\mathcal{H}(A) \neq \emptyset$ porque $A \in \mathcal{H}(A)$. Como $\cup_{C \in \mathcal{H}(A)} C \subset \overline{\mathbb{B}}_A$, entonces $\cup_{C \in \mathcal{H}(A)} C$ es acotado en \mathbb{R}^n con la distancia usual. Por el Lema 2.1.3, $\mathcal{H}(A)$ es acotado en la distancia de Hausdorff.

Veamos que

$$(3.37) \quad \inf_{C \in \mathcal{H}(A)} \text{cr}(C) = \inf_{C \in \mathcal{N}(A)} \text{cr}(C).$$

La desigualdad \geq se deduce de que $\mathcal{H}(A) \subset \mathcal{N}(A)$. Por reducción al absurdo, supongamos que $\inf_{C \in \mathcal{H}(A)} \text{cr}(C) > \inf_{C \in \mathcal{N}(A)} \text{cr}(C)$. Así, existe $C_0 \in \mathcal{N}(A) - \mathcal{H}(A)$ tal que $\text{cr}(C_0) < \inf_{C' \in \mathcal{H}(A)} \text{cr}(C')$. Dado $C' \in \mathcal{H}(A)$, tenemos $C' \subset \overline{\mathbb{B}}_A$ luego $\text{cr}(C') \leq \text{cr}(\overline{\mathbb{B}}_A) = \text{cr}(A)$, de donde

$$\text{cr}(C_0) < \inf_{C' \in \mathcal{H}(A)} \text{cr}(C') \leq \text{cr}(A).$$

Lo anterior implica que existe $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $C_0 + v \subset \overline{\mathbb{B}}_A$, luego $C_0 + v \in \mathcal{H}(A)$ y así,

$$\inf_{C' \in \mathcal{H}(A)} \text{cr}(C') \leq \text{cr}(C_0 + v) = \text{cr}(C_0) < \inf_{C' \in \mathcal{H}(A)} \text{cr}(C'),$$

contradicción. Esto prueba (3.37).

Finalmente, tomemos una sucesión $\{C_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}(A)$ tal que $\text{cr}(C_i) \searrow \inf_{C \in \mathcal{H}(A)} \text{cr}(C)$. Como $\{C_i\}_i \subset \mathcal{K}^n$ es acotada en distancia de Hausdorff por serlo $\mathcal{H}(A)$, el Teorema de selección de Blaschke (Teorema 2.2.2) asegura que tras pasar a una parcial, $\{C_i\}_i$ converge en distancia de Hausdorff a un compacto convexo $C_\infty \in \mathcal{K}^n$. Como $\text{vol}_n(A) \leq \text{vol}_n(C_i) \forall i$ y $\text{vol}_n: (\mathcal{K}^n, \delta) \rightarrow [0, \infty)$ es continua (Teorema 2.3.1), tenemos $\text{vol}_n(A) \leq \text{vol}_n(C_\infty)$. En particular, $\text{vol}_n(C_\infty) > 0$ luego $C_\infty \in \mathcal{K}_0^n$.

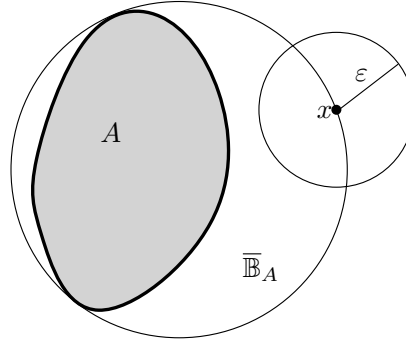
Como $\text{diam}(C_i) \leq \text{diam}(A) \forall i$ y $\text{diam}: (\mathcal{K}^n, \delta) \rightarrow [0, \infty)$ es continua (Lema 3.7.2), tenemos $\text{diam}(C_\infty) \leq \text{diam}(A)$. Por tanto, $C_\infty \in \mathcal{N}(A)$. Además,

$$\text{cr}(C_\infty) \geq \inf_{C' \in \mathcal{N}(A)} \text{cr}(C') \stackrel{(3.37)}{=} \inf_{C' \in \mathcal{H}(A)} \text{cr}(C') = \lim_{i \rightarrow \infty} \text{cr}(C_i) \stackrel{(\text{Lema 3.7.1})}{=} \text{cr}(C_\infty),$$

de donde deducimos que C_∞ minimiza el circunradio en $\mathcal{N}(A)$. □

Lema 3.7.4 Sea $A \in \mathcal{K}_0^n$ y sea $\overline{\mathbb{B}}_A = \overline{\mathbb{B}}(c, \text{cr}(A))$ su circumbola cerrada. Si $A \neq \overline{\mathbb{B}}_A$, entonces tras simetrizar A una cantidad finita de veces en hiperplanos podemos decrecer estrictamente su circunradio. Es decir, existen hiperplanos $H_1, \dots, H_k \subset \mathbb{R}^n$ tales que $\text{cr}([\dots (A_{H_1})_{H_2} \dots]_{H_k}) < \text{cr}(A)$.

Demostración. Veamos que $\partial\overline{\mathbb{B}}_A - A \neq \emptyset$: en caso contrario, $\partial\overline{\mathbb{B}}_A \subset A$ luego por convexidad de A , $\overline{\mathbb{B}}_A \subset A$ y por tanto $\overline{\mathbb{B}}_A = A$, contradicción. Por tanto, podemos elegir un punto $x \in \partial\overline{\mathbb{B}}_A - A$. Como A es cerrado, $\partial\overline{\mathbb{B}}_A - A$ es abierto en $\partial\overline{\mathbb{B}}_A$ luego existe $\varepsilon > 0$ tal que $\mathbb{B}(x, \varepsilon) \cap \partial\overline{\mathbb{B}}_A$ no contiene puntos de A .

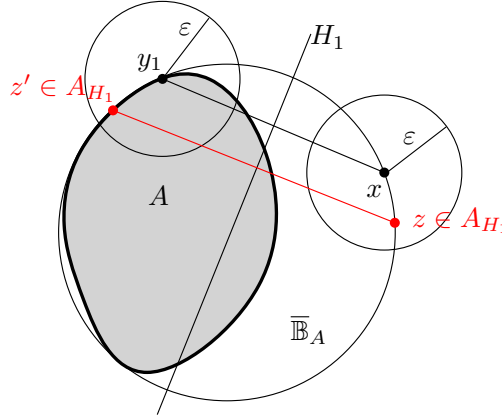


Vamos a localizar ahora los puntos de $A \cap \partial\overline{\mathbb{B}}_A$: consideremos el recubrimiento por abiertos $\{\mathbb{B}(y, \varepsilon) \cap \partial\overline{\mathbb{B}}_A \mid y \in A \cap \partial\overline{\mathbb{B}}_A\}$ del compacto $A \cap \partial\overline{\mathbb{B}}_A$ (aquí $\varepsilon > 0$ es fijo, definido arriba). Por compacidad, existen $y_1, \dots, y_k \in A \cap \partial\overline{\mathbb{B}}_A$ tales que

$$(3.38) \quad A \cap \partial\overline{\mathbb{B}}_A \subset \left[\bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}(y_i, \varepsilon) \right] \cap \partial\overline{\mathbb{B}}_A.$$

Dado $i = 1, \dots, k$, notemos que $x \neq y_i$ (ya que $x \in \partial\overline{\mathbb{B}}_A - A$ e $y \in A \cap \partial\overline{\mathbb{B}}_A$). Sea $H_i \subset \mathbb{R}^n$ el hiperplano ortogonal al segmento $[x, y_i]$ que pasa por el punto medio de dicho segmento. Como H_i biseca a $[x, y_i]$, el centro c de $\overline{\mathbb{B}}_A$ pertenece a H_i . Como esto puede hacerse para cada i , tenemos $c \in H_1 \cap \dots \cap H_k$.

El siguiente paso consiste en hacer simetrización de Steiner de A respecto a H_1 . Veamos que $A_{H_1} \cap [\mathbb{B}(x, \varepsilon) \cap \partial\overline{\mathbb{B}}_A] = \emptyset$: por reducción al absurdo, supongamos que $\exists z \in A_{H_1} \cap [\mathbb{B}(x, \varepsilon) \cap \partial\overline{\mathbb{B}}_A]$. Como A_{H_1} es simétrico respecto a H_1 , el simétrico z' de z respecto a H_1 estará en A_{H_1} . Como A_{H_1} es convexo, $[z, z'] \subset A_{H_1}$ luego por definición de simetrización de Steiner, A contendrá un segmento de longitud $\|z - z'\|$ en la recta afín ortogonal a H_1 que pasa por z . Pero $A \subset \overline{\mathbb{B}}_A$, luego $[z, z'] \subset A$. En particular, $z \in A$, lo que contradice que $\mathbb{B}(x, \varepsilon) \cap \partial\overline{\mathbb{B}}_A$ no contiene puntos de A .



El mismo argumento prueba que $A_{H_1} \cap [\mathbb{B}(y_1, \varepsilon) \cap \partial \overline{\mathbb{B}}_A] = \emptyset$. Con esto, hemos cambiado A por A_{H_1} y hemos obtenido que A_{H_1} no corta a $\partial \overline{\mathbb{B}}_A$ en $\mathbb{B}(x, \varepsilon) \cup \mathbb{B}(y_1, \varepsilon)$.

Ahora repetimos el proceso simetrizando A_{H_1} respecto al hiperplano H_2 , obteniendo $(A_{H_1})_{H_2}$, que por lo anterior no corta a $\partial \overline{\mathbb{B}}_A$ en $\mathbb{B}(x, \varepsilon) \cup \mathbb{B}(y_2, \varepsilon)$. Pero $(A_{H_1})_{H_2}$ tampoco corta a $\partial \overline{\mathbb{B}}_A$ en $\mathbb{B}(y_1, \varepsilon)$: si existiera $z \in (A_{H_1})_{H_2} \cap [\mathbb{B}(y_1, \varepsilon) \cap \partial \overline{\mathbb{B}}_A]$, entonces por simetría de $(A_{H_1})_{H_2}$ respecto a H_2 , el simétrico z' de z respecto a H_2 estaría en $(A_{H_1})_{H_2}$. Como $(A_{H_1})_{H_2}$ es convexo, $[z, z']$ estaría contenido en $(A_{H_1})_{H_2}$ luego por definición de simetrización de Steiner, A_{H_1} contendría un segmento de longitud $\|z - z'\|$ en la recta afín ortogonal a H_2 que pasa por z . Pero $A_{H_1} \subset \overline{\mathbb{B}}_A$, luego $[z, z'] \subset A_{H_1}$. En particular, $z \in A_{H_1}$, lo que contradice que $A_{H_1} \cap [\mathbb{B}(y_1, \varepsilon) \cap \partial \overline{\mathbb{B}}_A] = \emptyset$. Por tanto, $(A_{H_1})_{H_2}$ no corta a $\partial \overline{\mathbb{B}}_A$ en $\mathbb{B}(x, \varepsilon) \cup \mathbb{B}(y_1, \varepsilon) \cup \mathbb{B}(y_2, \varepsilon)$.

Reiterando el proceso, obtenemos que la simetrización de Steiner $[\dots (A_{H_1})_{H_2} \dots]_{H_k}$ no corta a $\partial \overline{\mathbb{B}}_A$ en $\mathbb{B}(x, \varepsilon) \cup \mathbb{B}(y_1, \varepsilon) \cup \dots \cup \mathbb{B}(y_k, \varepsilon)$. Por (3.38), $[\dots (A_{H_1})_{H_2} \dots]_{H_k}$ no corta a $\partial \overline{\mathbb{B}}_A$ en ningún punto. Esto nos permite decrecer *estrictamente* el radio de la circumbola de $[\dots (A_{H_1})_{H_2} \dots]_{H_k}$ en relación con el radio $\text{cr}(A)$ de $\overline{\mathbb{B}}_A$. \square

Ya estamos en condiciones de probar el resultado central de esta sección. Recordemos que $\omega_n = \text{vol}_n(\overline{\mathbb{B}}(1))$.

Teorema 3.7.1 (Desigualdad isodiamétrica) Sea $A \in \mathcal{K}_0^n$. Entonces,

$$(3.39) \quad \text{vol}_n(A) \leq \omega_n \left(\frac{1}{2} \text{diam}(A) \right)^n,$$

y la igualdad es cierta si y sólo si A es una bola cerrada.

Demostración. Consideremos la familia $\mathcal{N}(A) = \{C \in \mathcal{K}_0^n \mid \text{vol}(A) \leq \text{vol}(C), \text{diam}(C) \leq \text{diam}(A)\}$ del Lema 3.7.3. Por ese lema, existe $C \in \mathcal{N}(A)$ tal que $\text{cr}(C) = \min_{C' \in \mathcal{N}(A)} \text{cr}(C')$.

Veamos que $C = \overline{\mathbb{B}}_C$, la circumbola cerrada de C : si $C \neq \overline{\mathbb{B}}_C$, entonces el Lema 3.7.4 asegura que tras aplicar a C una cantidad finita de simetrizaciones de Steiner, producimos un nuevo compacto convexo C' que cumple $\text{cr}(C') < \text{cr}(C)$. Pero $\text{vol}_n(C') = \text{vol}_n(C)$ (apartado (2) del Teorema 3.5.1) y $\text{diam}(C') \leq \text{diam}(C)$ (apartado (3) del Teorema 3.5.1), luego $C' \in \mathcal{N}(A)$, lo que contradice que C minimiza el circunradio en $\mathcal{N}(A)$. Por tanto, $C = \overline{\mathbb{B}}_C$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} \text{vol}(A) &\leq \text{vol}(C) && (\text{def. de } \mathcal{N}(A)) \\ &= \text{vol}(\overline{\mathbb{B}}_C) \\ &= \omega_n \left(\frac{1}{2} \text{diam}(\overline{\mathbb{B}}_C) \right)^n \\ &\leq \omega_n \left(\frac{1}{2} \text{diam}(A) \right)^n. && (C = \overline{\mathbb{B}}_C \in \mathcal{N}(A)) \end{aligned}$$

Si la igualdad se da en (3.39), entonces como el miembro de la derecha de (3.39) es el volumen de la circumbola cerrada $\overline{\mathbb{B}}_A$ de A , tenemos que $A \subset \overline{\mathbb{B}}_A$ ambos con el mismo volumen. Por tanto, $\text{vol}(\overline{\mathbb{B}}_A - A) = 0$. Como $\overline{\mathbb{B}}_A - A$ es abierto en $\overline{\mathbb{B}}_A$, tenemos $\overline{\mathbb{B}}_A - A = \emptyset$, es decir, $A = \overline{\mathbb{B}}_A$. \square

Finalmente, extenderemos la desigualdad isodiamétrica a compactos no necesariamente convexos.

Corolario 3.7.1 *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un compacto con interior no vacío. Entonces,*

$$(3.40) \quad \text{vol}_n(X) \leq \omega_n \left(\frac{1}{2} \text{diam}(X) \right)^n,$$

y la igualdad es cierta si y sólo si X es una bola cerrada.

Demostración. Como X es compacto, $\text{conv}(X)$ es también compacto. Como $\emptyset \neq \text{int}(X) \subset \text{int}(\text{conv}(X))$, tenemos $\text{conv}(X) \in \mathcal{K}_0^n$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{vol}(X) &\leq \text{vol}(\text{conv}(X)) \\ &\stackrel{(\star)}{\leq} \omega_n \left(\frac{1}{2} \text{diam}(\text{conv}(X)) \right)^n && (\text{Teorema 3.7.1}) \\ &= \omega_n \left(\frac{1}{2} \text{diam}(X) \right)^n. && (\text{Teorema 1.6.2}) \end{aligned}$$

Si la igualdad se da en (3.40), entonces $\text{vol}(X) = \text{vol}(\text{conv}(X))$. Como $X \subset \text{conv}(X)$, entonces $\text{vol}(\text{conv}(X) - X) = 0$. Como $\text{conv}(X) - X$ es abierto en $\text{conv}(X)$, tenemos $\text{conv}(X) - X = \emptyset$, es decir, $X = \text{conv}(X)$. Además, la igualdad en (\star) implica que $\text{conv}(X)$ es una bola cerrada de radio $\text{diam}(X)/2$, y hemos terminado. \square

3.8. Ejercicios.

1. Dados $K_1, \dots, K_r \in \mathcal{K}^n$, consideremos la función

$$(3.41) \quad f_n(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) = \text{vol}_n(\varepsilon_1 K_1 + \dots + \varepsilon_r K_r), \quad \forall \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r \geq 0.$$

Es posible probar que la función $f_n(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ es un polinomio homogéneo de grado n en las variables $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$, es decir, una suma finita de monomios de la forma

$$c(i_1, \dots, i_r) \varepsilon_1^{i_1} \dots \varepsilon_r^{i_r},$$

donde $i_1, \dots, i_r \in \{0, \dots, n\}$ con $i_1 + \dots + i_r = n$ y $c(i_1, \dots, i_r) \in \mathbb{R}$. Estos coeficientes $c(i_1, \dots, i_r)$ dependen de los compactos convexos K_1, \dots, K_r de forma continua en distancia de Hausdorff.

- (A) Probar que dado $K \in \mathcal{K}^n$, el volumen de Lebesgue de $K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, K) \leq \varepsilon\}$ es $f_n(1, \varepsilon)$, donde hemos tomado $K_1 = K$, $K_2 = \overline{\mathbb{B}}$ en (3.41).
 (B) Sean $K_1 = [-1, 2] \times [-1, 2]$, $K_2 = [-2, -1] \times [1, 2]$. Calcular $f_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ en este caso.

2. Se define el *volumen mixto* de $K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}^n$ como

$$(3.42) \quad V_n(K_1, \dots, K_n) = \frac{\partial^n}{\partial \varepsilon_1 \dots \partial \varepsilon_n} \bigg|_{(0, \dots, 0)} \text{vol}_n(\varepsilon_1 K_1 + \dots + \varepsilon_n K_n).$$

Calcular el volumen mixto $V_2(K_1, K_2)$, donde K_1, K_2 son las siguientes parejas de compactos convexos en \mathbb{R}^2 :

- (A) $K_1 = [0, 3] \times [-2, 1]$, $K_2 = \text{conv}(\{(0, 0), (0, 1), (2, 1), (3, 0)\})$.
 (B) $K_1 = [-1, 2] \times [-1, 2]$, $K_2 = [-2, -1] \times [1, 2]$. Calcular también $V_2(K_1, K_1)$, $V_2(K_2, K_2)$, $V_2(K_2, K_1)$.
 (C) $K_1 = \overline{\mathbb{B}}((-1, 0), 1)$, $K_2 = \overline{\mathbb{B}}((1, 4), 3)$, $K_3 = \overline{\mathbb{B}}((2, 1), 2)$. Calcular en este caso $V_2(K_i, K_j)$, $1 \leq i, j \leq 3$.

3. Con la definición anterior de volumen mixto, probar que para cada $K \in \mathcal{K}^2$ se tienen

- (A) $V_2(K, K) = 2 \text{vol}_2(K)$, $V_2(K, \overline{\mathbb{B}}) = \text{contenido de Minkowski}(K)$.
 (B) Generalizar las fórmulas del apartado anterior probando que si $K \in \mathcal{K}^n$, entonces $V_n(K, \dots, K) = n! \text{vol}_n(K)$,
 $V_n(K, \overset{n-1}{\overline{\mathbb{B}}}, K, \overline{\mathbb{B}}) = (n-1)! \text{contenido de Minkowski}(K)$.

4. Sean $P = \text{conv}(\{(0, 0), (-1, 2), (2, 0)\}) \subset \mathbb{R}^2$ y H la recta en \mathbb{R}^2 de ecuación $x = y$. Calcular P_H , $\text{area}(P)$ y $\text{area}(P_H)$.

5. Sean $P = \text{conv}(\{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}) \subset \mathbb{R}^2$ y $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y\}$. Calcular P_H , $\text{area}(P)$ y $\text{area}(P_H)$.
6. Probar que la desigualdad isoperimétrica (Teorema 3.6.1) es equivalente a la siguiente propiedad: Sea $A \in \mathcal{K}_0^n$ y \mathbb{B} cualquier bola cerrada. Entonces,

$$(3.43) \quad \left(\frac{\text{vol}_n(A)}{\text{vol}_n(\mathbb{B})} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{\text{area}(A)}{\text{area}(\mathbb{B})} \right)^{\frac{1}{n-1}},$$

y la igualdad es cierta si y sólo si A es una bola cerrada n -dimensional.

7. Sean $K, L \in \mathcal{K}_0^n$. Probar que las siguientes desigualdades son equivalentes:

- (A) $\text{vol}_n(K)^{\frac{1}{n}} + \text{vol}_n(L)^{\frac{1}{n}} \leq \text{vol}_n(K + L)^{\frac{1}{n}}$.
- (B) $(1 - \lambda)\text{vol}_n(K)^{\frac{1}{n}} + \lambda \text{vol}_n(L)^{\frac{1}{n}} \leq \text{vol}_n((1 - \lambda)K + \lambda L)^{\frac{1}{n}}, \forall \lambda \in (0, 1)$.
- (C) $s \text{vol}_n(K)^{\frac{1}{n}} + t \text{vol}_n(L)^{\frac{1}{n}} \leq \text{vol}_n(sK + tL)^{\frac{1}{n}}, \forall s, t \geq 0$.

La *desigualdad de Brunn-Minkowski* asegura que cualquiera de las anteriores desigualdades es cierta, y que la igualdad se cumple si y sólo si K y L difieren en una traslación y una dilatación (es decir, K, L son homotéticos). Usar la definición de contenido de Minkowski de un compacto convexo para deducir la desigualdad isoperimétrica (en su forma (3.43), sin la caracterización de igualdad²) a partir de la desigualdad de Brunn-Minkowski.

²La caracterización de la igualdad en la desigualdad isoperimétrica también puede deducirse de la igualdad en la desigualdad de Brunn-Minkowski, pero el argumento es algo más complicado.

Bibliografía

- [1] Richard J. Gardner, *Geometric Tomography*, Cambridge University Press, 1995.
- [2] R. Schneider, *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 44, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.