Capítulo 2

Distancia de Hausdorff y T$^{\text{a}}$ de selección de Blaschke

2.1. Distancia de Hausdorff

El objetivo principal de esta sección será dotar al conjunto de convexos $\mathcal{K}^n$ en $\mathbb{R}^n$ de una estructura de espacio métrico "razonable". Denotaremos por

$$\mathcal{C}^n = \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ es compacto y no vacío}\}.$$

Así, $\mathcal{K}_0^n \subset \mathcal{K}^n \subset \mathcal{C}^n$.

Llamaremos $\overline{\mathbb{B}} = \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, 1)$. Dado $K \in \mathcal{C}^n$ y $\alpha \geq 0$, el *entorno tubular cerrado* de K de radio α es

$$K + \alpha\overline{\mathbb{B}} = \cup_{x\in K} \left[x + \alpha\overline{\mathbb{B}}\right] = \cup_{x\in K}\overline{\mathbb{B}}(x, \alpha) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid d(p, K) \leq \alpha\}.$$

Dados $K, L \in \mathcal{C}^n$, por compacidad existe $\alpha \geq 0$ tal que $K \subset L + \alpha\overline{\mathbb{B}}$ y $L \subset K + \alpha\overline{\mathbb{B}}$.

Definición 2.1.1 Dados $K, L \in \mathcal{C}^n$, se define la *distancia de Hausdorff* entre K y L como

$$\delta(K, L) = \text{ínf}\{\alpha \geq 0 \mid K \subset L + \alpha\overline{\mathbb{B}}, \text{ y } L \subset K + \alpha\overline{\mathbb{B}}\}. \tag{2.1}$$

Informalmente, dos compactos están próximos en distancia de Hausdorff si todo punto del primero compacto está próximo en la distancia usual a algún punto del segundo compacto, y viceversa. Algunas observaciones sencillas:

- El ínfimo anterior es un mínimo: Supongamos que $\alpha_k \searrow \alpha \in [0, \infty)$ cumpliendo $K \subset L+\alpha_k\overline{\mathbb{B}}$ y $L \subset K+\alpha_k\overline{\mathbb{B}}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Queremos probar que $K \subset L+\alpha\overline{\mathbb{B}}$ y $L \subset K+\alpha\overline{\mathbb{B}}$. Por reducción al absurdo, supongamos que $K \not\subset L + \alpha\overline{\mathbb{B}} = \{p \in \mathbb{R}^n \mid d(p, L) \leq \alpha\}$. Así, existe $x \in K$ tal que $d(x, L) > \alpha$ luego a partir de un $k_0 \in \mathbb{N}$, es $d(x, L) > \alpha_k$, lo que contradice que $K \subset L + \alpha_k\overline{\mathbb{B}}$.

- Si $K = \{p\}$, $L = \{q\}$ con $p, q \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\delta(K, L) = \text{ínf}\{\alpha \geq 0 \mid p \in \overline{\mathbb{B}}(q, \alpha) \text{ y } q \in \overline{\mathbb{B}}(p, \alpha)\} = d(p, q),$$

  es decir, la distancia de Hausdorff generaliza a la distancia euclídea usual.

Lema 2.1.1 *Dados $K, L \in \mathcal{C}^n$, se tiene:*

$$\delta(K, L) = \text{máx}\left\{\sup_{x\in K}\,\text{ínf}_{y\in L}\, d(x, y), \sup_{y\in L}\,\text{ínf}_{x\in K}\, d(x, y)\right\}. \tag{2.2}$$

Demostración. Llamemos $(\star)$ al miembro de la derecha de la fórmula (2.2).
$\boxed{\delta(K, L) \geq (\star)}$: Sean $x \in K$, $y \in L$. Por definición de $\delta(K, L)$ (y por ser $\delta(K, L)$ un mínimo, véase la primera observación anterior), tenemos $L \subset K + \delta(K, L)\overline{\mathbb{B}} = \{p \in \mathbb{R}^n \mid d(p, K) \leq \delta(K, L)\}$, luego

$$d(y, K) \leq \delta(K, L), \ \forall y \in L.$$

Por definición de $d(y, K)$,

$$\text{ínf}_{x\in K}\, d(y, x) \leq \delta(K, L), \ \forall y \in L.$$

Tomando supremos en $y \in L$:

$$\sup_{y\in L}\,\text{ínf}_{x\in K}\, d(x, y) \leq \delta(K, L).$$

Intercambiando los papeles de x, y obtendremos que $(\star) \leq \delta(K, L)$.
$\boxed{\delta(K, L) \leq (\star)}$: Si $\delta(K, L) = 0$, no hay nada que demostrar. Supongamos que $\delta(K, L) > 0$ y sea $\lambda \in (0, \delta(K, L))$. Por definición de $\delta(K, L)$, o bien $K \not\subset L + \lambda\overline{\mathbb{B}}$ o $L \not\subset K + \lambda\overline{\mathbb{B}}$. Podemos suponer sin perder generalidad que se da lo primero (basta cambiar los papeles de K, L en lo que sigue). Así, existe $x_0 \in K$ tal que $x_0 \notin L + \lambda\overline{\mathbb{B}}$, luego $d(x_0, L) > \lambda$. Por definición de $d(x_0, L)$, tenemos

$$\text{ínf}_{y\in L}\, d(x_0, y) > \lambda,$$

luego

$$\sup_{x\in K}\,\text{ínf}_{y\in L}\, d(x, y) \geq \text{ínf}_{y\in L}\, d(x_0, y) > \lambda,$$

de donde $(\star) > \lambda$. Como esto es válido para todo $\lambda \in (0, \delta(K, L))$, deducimos que $(\star) \geq \delta(K, L)$. □

Lema 2.1.2 *La función $\delta\colon \mathcal{C}^n \times \mathcal{C}^n \to [0, \infty)$ dada por (2.1) es una distancia.*

Demostración. Que $\delta(K,L)=\delta(L,K)$ se deduce directamente de la definición o del Lema 2.1.1. Si tomamos $K=L\in\mathcal{C}^n$, entonces $K\subset L+\alpha\overline{\mathbb{B}}$ y $L\subset K+\alpha\overline{\mathbb{B}}$ $\forall\alpha\geq 0$, luego $\delta(K,L)=0$. Recíprocamente, si $K,L\in\mathcal{C}^n$ y $\delta(K,L)=0$, entonces

$$K\subset\{p\in\mathbb{R}^n\mid d(p,L)\leq\alpha\},\quad L\subset\{q\in\mathbb{R}^n\mid d(q,K)\leq\alpha\},\qquad\forall\alpha\geq 0.$$

Dado $x\in K$, lo anterior nos dice que $d(x,L)=0$ luego $x\in\overline{L}=L$ y así, $K\subset L$. Análogamente, $L\subset K$ luego $K=L$.

Queda ver la propiedad triangular: sean $K,L,M\in\mathcal{C}^n$. Como $K\subset M+\delta(K,M)\overline{\mathbb{B}}$ y $M\subset L+\delta(M,L)\overline{\mathbb{B}}$, entonces

$$K\subset\left[L+\delta(M,L)\overline{\mathbb{B}}\right]+\delta(K,M)\overline{\mathbb{B}}=L+\left[\delta(M,L)\overline{\mathbb{B}}+\delta(K,M)\overline{\mathbb{B}}\right]\overset{(\star)}{=}L+\left[\delta(M,L)+\delta(K,M)\right]\overline{\mathbb{B}},$$

donde en $(\star)$ hemos usado el apartado (3) de la Proposición 1.1.1. Finalmente, por definición de $\delta(K,L)$ concluimos que $\delta(K,L)\leq\delta(M,L)+\delta(K,M)$. □

Lema 2.1.3 *Un subconjunto $\mathcal{A}\subset\mathcal{C}^n$ es δ-acotado*[1] *si y sólo si $\bigcup_{A\in\mathcal{A}}A$ es acotado en $(\mathbb{R}^n,d_{\text{usual}})$.*

Demostración. Si $\mathcal{A}$ es δ-acotado, existen $K\in\mathcal{C}^n$, $R>0$ tales que $\delta(A,K)<R$ $\forall A\in\mathcal{A}$. Por tanto, $A\subset K+R\overline{\mathbb{B}}$ $\forall A\in\mathcal{A}$, luego $\bigcup_{A\in\mathcal{A}}A\subset K+R\overline{\mathbb{B}}$, que es un conjunto acotado en la distancia usual en $\mathbb{R}^n$.

Recíprocamente, si $\bigcup_{A\in\mathcal{A}}A$ es acotado en $(\mathbb{R}^n,d_{\text{usual}})$, entonces existe $R>0$ tal que $\bigcup_{A\in\mathcal{A}}A\subset\overline{\mathbb{B}}(\vec{0},R)$. Así, para cada $A\in\mathcal{A}$ tenemos

$$A\subset\bigcup_{A\in\mathcal{A}}A\subset\overline{\mathbb{B}}(\vec{0},R)\subset\overline{\mathbb{B}}(\vec{0},R)+(2R)\overline{\mathbb{B}}.\tag{2.3}$$

Por otro lado, si $x\in\overline{\mathbb{B}}(\vec{0},R)$ e $y\in A$, entonces $y\in\overline{\mathbb{B}}(\vec{0},R)$ luego por la desigualdad triangular $d(x,y)\leq 2R$. Moviendo x en $\overline{\mathbb{B}}(\vec{0},R)$ tenemos

$$\overline{\mathbb{B}}(\vec{0},R)\subset\{y\}+(2R)\overline{\mathbb{B}}\subset A+(2R)\overline{\mathbb{B}}.\tag{2.4}$$

De (2.3) y (2.4) deducimos que $\delta(A,\overline{\mathbb{B}}(\vec{0},R))\leq 2R$, $\forall A\in\mathcal{A}$ luego $\mathcal{A}$ es δ-acotado. □

La propiedad más importante de esta sección será probar que el espacio métrico $(\mathcal{C}^n,\delta)$ es completo (Teorema 2.1.1). Para ello, necesitaremos un resultado previo.

Proposición 2.1.1 *Sea $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{C}^n$ no creciente (es decir, $K_{i+1}\subseteq K_i$, $\forall i$). Entonces, $\cap_{i\in\mathbb{N}}K_i$ es el límite en $(\mathcal{C}^n,\delta)$ de $\{K_i\}_i$ (en particular, dicha intersección es no vacía).*

[1] Es decir, acotado en distancia de Hausdorff.

Demostración. Veamos que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i \neq \emptyset$: Como $\{K_i\}_i$ es no creciente y cada K_i es no vacío, entonces $\mathcal{F} := \{K_i\}_i$ es una familia de compactos en el espacio topológico K_1, y $\mathcal{F}$ cumple la propiedad de intersección finita[2]. Por la compacidad de K_1, esto implica[3] que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i \neq \emptyset$.

$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i$ es cerrado (la intersección arbitraria de cerrados es cerrada en cualquier espacio topológico) dentro del compacto K_1, luego $\cap_{i\in\mathbb{N}} K_i$ es compacto. Por tanto, $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i \in \mathcal{C}^n$. Para probar que $\{K_i\}_i$ converge a $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i$ en distancia de Hausdorff, debemos comprobar lo siguiente: Dado $\varepsilon > 0$, ¿existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\delta\left(K_j, \bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i\right) < \varepsilon \ \forall j \geq i_0$? es decir,

$$¿\ K_j \subset \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i\right) + \varepsilon\overline{\mathbb{B}} \tag{2.5}$$

y

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i \subset K_j + \varepsilon\overline{\mathbb{B}} \tag{2.6}$$

para todo $j \geq i_0$? (2.6) es trivial: $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i \subset K_j \subset K_j + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$, $\forall \varepsilon > 0$. Así que nos ocupamos de (2.5): Razonando por reducción al absurdo, supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $i_0 \in \mathbb{N}$, existe $j(i_0) \geq i_0$ siendo $K_{j(i_0)} \not\subset \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i\right) + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$. Consideremos el compacto

$$C_{j(i_0)} = K_{j(i_0)} - \operatorname{int}\left[\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i\right) + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}\right] \neq \emptyset.$$

La sucesión $\{C_{j(i_0)}\}_{i_0\in\mathbb{N}}$ es no creciente, y toda sucesión no creciente de compactos no vacíos tiene intersección no vacía por el argumento del primer párrafo. Por tanto,

$$\emptyset \neq \bigcap_{i_0\in\mathbb{N}} \left\{K_{j(i_0)} - \operatorname{int}\left[\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i\right) + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}\right]\right\} = \left(\bigcap_{i_0\in\mathbb{N}} K_{j(i_0)}\right) - \operatorname{int}\left[\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i\right) + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}\right].$$

Notemos que al ser $\{K_i\}_i$ monótona no creciente, entonces $\bigcap_{i_0\in\mathbb{N}} K_{j(i_0)} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i$. Si comprobamos que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i \subset \operatorname{int}\left[\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i\right) + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}\right]$ entonces lo anterior será el conjunto

[2] Es decir, la intersección de cualquier subfamilia finita de $\mathcal{F}$ es no vacía.

[3] Sea X un espacio topológico. Entonces, X es compacto si para toda familia $\mathcal{F}$ de cerrados de X que cumpla la propiedad de intersección finita, se tiene que $\cap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$. Esta caracterización de la compacidad se prueba fácilmente: dada una familia $\mathcal{F}$ de cerrados de X, se considera la familia de abiertos $\mathcal{A} = \{X - C \mid C \in \mathcal{F}\}$. Entonces, que $\cap_{F\in\mathcal{F}} F = \emptyset$ equivale a que $\mathcal{A}$ sea un recubrimiento por abiertos de X, y que $\mathcal{F}$ cumpla la propiedad de intersección finita equivale a que de $\mathcal{A}$ no pueda extraerse un subrrecubrimiento finito. De aquí, la demostración de la caracterización de compacidad de X en términos de intersección no vacía de familias $\mathcal{F}$ de cerrados cumpliendo la propiedad de intersección finita, es evidente.

vacío, contradicción. Para comprobar esto último simplificaremos la notación: dado $A \subset \mathbb{R}^n$ no vacío, veamos que $A \subset \text{int}(A + \varepsilon\overline{\mathbb{B}})$ para todo $\varepsilon > 0$ y habremos terminado. Tomemos $a \in A$. Entonces,

$$\mathbb{B}(a, \varepsilon/2) \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) \leq \varepsilon\} = A + \varepsilon\overline{\mathbb{B}},$$

luego $a \in \text{int}(A + \varepsilon\overline{\mathbb{B}})$. Como esto es cierto para cualquier $a \in A$, deducimos que $A \subset \text{int}(A + \varepsilon\overline{\mathbb{B}})$. □

Teorema 2.1.1 *El espacio métrico* $(\mathcal{C}^n, \delta)$ *es completo.*

Demostración. Sea $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^n$ una sucesión de Cauchy. Veamos primero que $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i$ es acotado en $(\mathbb{R}^n, d_{\text{usual}})$: Tomemos $\varepsilon = 1$ en la condición de Cauchy. Esto produce un $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall j \geq i_0$, $\delta(K_j, K_{i_0}) < 1$ luego $K_j \subset K_{i_0} + \overline{\mathbb{B}}$ $\forall j \geq i_0$. Así,

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i \subset [K_1 \cup \ldots \cup K_{i_0-1}] \cup \left[K_{i_0} + \overline{\mathbb{B}}\right],$$

que es acotado en la distancia usual en $\mathbb{R}^n$.

Ahora definimos $A_i = \overline{\bigcup_{j=i}^{\infty} K_j}$ (cierre en la topología usual), que es compacto de $\mathbb{R}^n$ por ser cerrado y acotado (por el párrafo anterior). Así, $A_i \in \mathcal{C}^n$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Por construcción, $\{A_i\}_i$ es una sucesión no creciente en $\mathcal{C}^n$. Por la Proposición 2.1.1, $\{A_i\}_i$ converge en $(\mathcal{C}^n, \delta)$ a $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Terminaremos comprobando que $\{K_i\}_i$ converge en $(\mathcal{C}^n, \delta)$ a $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$:

Fijemos $\varepsilon > 0$. Como $\{A_i\}_i$ converge a $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i$ en $(\mathcal{C}^n, \delta)$, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $j \geq i_0$, $\delta\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i, A_j\right) < \varepsilon$. En particular,

$$K_j = \overline{K_j} \subset \overline{\bigcup_{h=j}^{\infty} K_h} = A_j \subset \left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}, \quad \forall j \geq i_0. \tag{2.7}$$

Por otro lado, por ser $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de Cauchy en $(\mathcal{C}^n, \delta)$, para el $\varepsilon > 0$ anterior existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\delta(K_i, K_j) < \varepsilon$ $\forall i, j \geq j_0$. En particular,

$$K_j \subset K_i + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}, \quad \forall i, j \geq j_0. \tag{2.8}$$

Ahora fijamos $i \geq j_0$. Entonces,

$$\bigcup_{j\geq i} K_j \overset{(2.8)}{\subset} \bigcup_{j\geq i} \left(K_i + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}\right) = K_i + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}.$$

Tomando clausuras y usando que $K_i + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$ es cerrado,

$$A_i = \overline{\bigcup_{j\geq i} K_j} \subset K_i + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}, \quad \forall i \geq j_0. \tag{2.9}$$

En particular,

$$\bigcap_{h\in\mathbb{N}} A_h \subset A_i \overset{(2.9)}{\subset} K_i + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}, \quad \forall i \geq j_0. \tag{2.10}$$

De (2.7) y (2.10) tenemos que dado $\varepsilon > 0$, existen $i_0, j_0 \in \mathbb{N}$ tales que para $i \geq \max\{i_0, j_0\}$, $\delta(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i, K_i) < \varepsilon$. Esto termina la demostración. □

2.2. El teorema de selección de Blaschke

Teorema 2.2.1 *Toda sucesión acotada en $(\mathcal{C}^n, \delta)$ admite una parcial convergente.*

Demostración. Sea $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^n$ una sucesión acotada en distancia de Hausdorff. Así, existen $K_0 \in \mathcal{C}^n$ y $r > 0$ tales que $\delta(K_i, K_0) < r$ $\forall i \in \mathbb{N}$. En particular, $K_i \subset K_0 + r\overline{\mathbb{B}}$ $\forall i$ luego $\cup_{i\in\mathbb{N}} K_i \subset K_0 + r\overline{\mathbb{B}}$. Así, $\cup_{i\in\mathbb{N}} K_i$ es acotado en la distancia usual sobre $\mathbb{R}^n$ luego podemos encontrar un n-cubo $T = \prod_{h=1}^{n} [a_h, b_h]$ que contiene a $\cup_{i\in\mathbb{N}} K_i$ (no hay problema en suponer que $\gamma := b_h - a_h$ es independiente de $h \in \{1, \ldots, n\}$).

Dado $m \in \mathbb{N}$, subdividimos T en 2^{mn} cubos con arista $2^{-m}\gamma$, produciendo de esta forma una colección $\mathcal{T}_m$ de subcubos cerrados ($\mathcal{T}_m$ es un subconjunto de $\mathcal{C}^n$), como en la Figura 2.1.

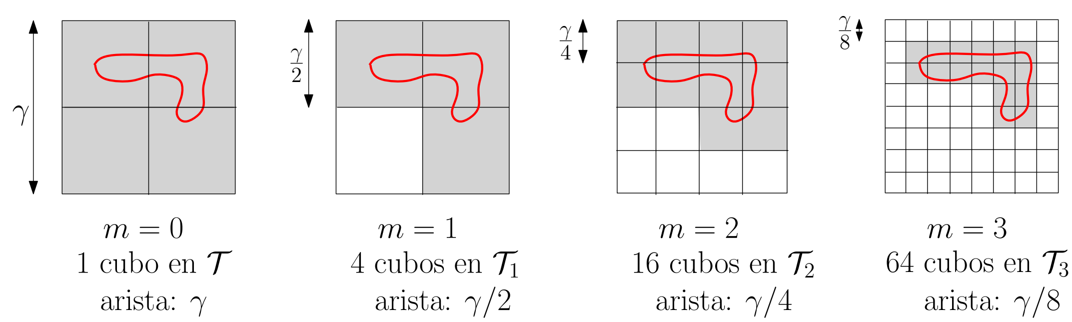


Figura 2.1: Subdividiendo T. En cada caso, el conjunto rayado representa a $A_m(K)$, siendo K el conjunto en rojo.

Dado un compacto $K \in \mathcal{C}^n$ con $K \subset T$ y $m \in \mathbb{N}$, definimos $A_m(K)$ como la unión de los cubos de $\mathcal{T}_m$ que cortan a K. Vamos a usar cada colección $\mathcal{T}_m$ para definir una parcial de la sucesión original $\{K_i\}_i$.

- Llamamos $K_i^0 = K_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

- $\mathcal{T}_1$ consiste en 2^n cubos (n está fijo), luego existe una parcial $\{K_i^1\}_i \subset \{K_i^0\}_i$ de forma que $A_1(K_i^1)$ consiste en una unión *fija* T_1 de algunos de los 2^n cubos de $\mathcal{T}_1$.
- $\mathcal{T}_2$ consiste en 2^{2n} cubos, luego existe una parcial $\{K_i^2\}_i \subset \{K_i^1\}_i$ de forma que $A_2(K_i^2)$ consiste en una unión *fija* T_2 de algunos de los 2^{2n} cubos de $\mathcal{T}_2$.

$\vdots$

- Por inducción, para $m \in \mathbb{N}$ existe una parcial $\{K_i^m\}_i \subset \{K_i^{m-1}\}_i$ de forma que $A_m(K_i^m)$ consiste en una unión *fija* T_m de algunos de los 2^{mn} cubos de $\mathcal{T}_m$.

Ahora definimos $C_i = K_i^i \ \forall i \in \mathbb{N}$, con lo que $\{C_i\}_i \subset \mathcal{C}^n$. Veamos que $\{C_i\}_i$ es de Cauchy en $(\mathcal{C}^n, \delta)$ (esto terminaría la demostración porque $\{C_i\}_i$ es una parcial de $\{K_i\}_i$ y $\{C_i\}_i$ sería δ-convergente por ser $(\mathcal{C}^n, \delta)$ completo gracias al Teorema 2.1.1):

Fijamos $m \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$\text{Dados } i, j \in \mathbb{N}, \text{ se tiene } A_m(K_i^m) = A_m(K_j^m) = T_m. \tag{2.11}$$

Dado $x_0 \in T_m$, x_0 estará en alguno de los cubos que forman T_m, al que llamaremos $C(x_0, m)$. Este cubo también contendrá un punto $y \in K_j^m$, luego $C(x_0, m)$ está contenido en la bola cerrada centrada en y con radio la diagonal de $C(x_0, m)$, que es $\sqrt{n}\frac{\gamma}{2^m}$. Así, $C(x_0, m) \subset \overline{\mathbb{B}}(y, \sqrt{n}\frac{\gamma}{2^m}) = \{y\} + \sqrt{n}\frac{\gamma}{2^m}\overline{\mathbb{B}} \subset K_j^m + \sqrt{n}\frac{\gamma}{2^m}\overline{\mathbb{B}}$, donde como siempre $\overline{\mathbb{B}} = \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, 1)$. Variando x_0 en T_m obtenemos

$$K_i^m \overset{(2.11)}{\subset} T_m \subset K_j^m + \sqrt{n}2^{-m}\gamma\overline{\mathbb{B}}, \tag{2.12}$$

Análogamente,

$$K_j^m \overset{(2.11)}{\subset} T_m \overset{(??)}{\subset} K_i^m + \sqrt{n}2^{-m}\gamma\overline{\mathbb{B}}. \tag{2.13}$$

De (2.12) y (2.13) deducimos que $\delta(K_i^m, K_j^m) \leq \sqrt{n}2^{-m}\gamma$, $\forall i, j \in \mathbb{N}$. Tomando $i = m$:

$$\delta(K_i^i, K_j^i) \leq \sqrt{n}2^{-i}\gamma, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

Para $j \geq i$, todos los compactos K_j^j son de la forma $K_{h(i,j)}^i$ para cierto $h(i,j) \geq i$ natural. Es decir, podemos sustituir K_j^j en la segunda variable de la desigualdad (2.14), y nos queda

$$\delta(K_i^i, K_j^j) \leq \sqrt{n}2^{-i}\gamma, \quad \forall i, j \in \mathbb{N},\ j \geq i.$$

Es decir,

$$\delta(C_i, C_j) \leq \sqrt{n}2^{-i}\gamma, \quad \forall i, j \in \mathbb{N},\ j \geq i.$$

Esto implica que $\{C_i\}_i$ es de Cauchy en $(\mathcal{C}^n, \delta)$, y termina la demostración del teorema. □

Corolario 2.2.1 *Un subconjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^n$ es compacto si y sólo si $\mathcal{A}$ es cerrado y δ-acotado.*

Demostración. La implicación necesaria es cierta en todo espacio métrico. Para la implicación suficiente, supongamos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^n$ es cerrado y δ-acotado. Dada una sucesión $\{K_i\}_i \subset \mathcal{A}$, el Teorema 2.2.1 asegura que $\{K_i\}_i$ admite una parcial convergente a un límite $K \in \mathcal{C}^n$, que ha de estar en $\mathcal{A}$ por ser $\mathcal{A}$ cerrado. Por tanto, $\mathcal{A}$ es secuencialmente compacto, que equivale a compacidad en espacios métricos. □

Proposición 2.2.1 *$\mathcal{K}^n$ es cerrado en $(\mathcal{C}^n, \delta)$.*

Demostración. Basta probar que dado $K \in \mathcal{C}^n - \mathcal{K}^n$ (compacto no convexo), K es interior a $\mathcal{C}^n - \mathcal{K}^n$. Como K es no convexo, existen $x, y \in K$, $\lambda \in (0,1)$ tales que $z = \lambda x + (1-\lambda)y \notin K$. Como K es compacto, es cerrado. Como $z \notin K$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{\mathbb{B}}(z, 2\varepsilon) \cap K = \emptyset$. Veamos que $\forall K' \in \mathcal{C}^n$ con $\delta(K, K') < \varepsilon$, se tiene $K' \in \mathcal{C}^n - \mathcal{K}^n$ (esto terminará la demostración).

Tomemos entonces $K' \in \mathcal{C}^n$ con $\delta(K, K') < \varepsilon$. Como $K \subset K' + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$ y $x, y \in K$, existirán $x', y' \in K'$ con $d(x, y) \leq \varepsilon$, $d(y, y') \leq \varepsilon$. Así,

$$\begin{aligned} d(\lambda x' + (1-\lambda)y', z) &= \|\lambda x' + (1-\lambda)y' - [\lambda x + (1-\lambda)y]\| \\ &\leq \lambda\|x - x'\| + (1-\lambda)\|y - y'\| \\ &\leq \lambda\varepsilon + (1-\lambda)\varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Veamos que $z' := \lambda x' + (1-\lambda)y' \notin K'$ luego K' será no convexo: Supongamos que $z' \in K'$. Como $K' \subset K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$, existe $w \in K$ tal que $d(z', w) \leq \varepsilon$. Así, $d(z, w) \leq d(z, z') + d(z', w) \leq 2\varepsilon$. Esto contradice que $\overline{\mathbb{B}}(z, 2\varepsilon) \cap K = \emptyset$, luego K' no es convexo. □

Teorema 2.2.2 (Teorema de selección de Blaschke) *Toda sucesión δ-acotada en $\mathcal{K}^n$ admite una parcial convergente en distancia de Hausdorff a un elemento de $\mathcal{K}^n$.*

Demostración. Sea $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}^n$ una sucesión δ-acotada. Entonces, su clausura $\overline{\{K_i\}_i}$ en $(\mathcal{C}^n, \delta)$ es un cerrado y δ-acotado en $(\mathcal{C}^n, \delta)$, luego el Corolario 2.2.1 implica que $\overline{\{K_i\}_i}$ es compacto. Por tanto, existe una parcial $\{K_{\sigma(i)}\}_i \subset \{K_i\}_i$ que converge a un elemento $K_\infty \in \mathcal{C}^n$ en distancia de Hausdorff. Como $\{K_{\sigma(i)}\}_i \subset \mathcal{K}^n$ y $\mathcal{K}^n$ es cerrado en $(\mathcal{C}^n, \delta)$ (Proposición 2.2.1), concluímos que $K_\infty \in \mathcal{K}^n$. □

Terminaremos esta sección con una caracterización de la convergencia de Hausdorff en $\mathcal{K}^n$ sólo en términos de convergencia en la distancia usual en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.2.3 *Sean $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, K en $\mathcal{K}^n$. Entonces, $\{K_i\}_i$ converge a K en distancia de Hausdorff si y sólo si se cumplen las dos siguientes propiedades:*

(a) *Para cualesquiera $x \in K$, $i \in \mathbb{N}$ existe $x_i \in K_i$ tal que $\{x_i\}_i$ converge a x en $(\mathbb{R}^n, d_{\text{usual}})$.*

(b) *Dada una sucesión $\{y_i\}_i$ con $y_i \in K_i$ $\forall i$, el límite de toda parcial convergente de $\{y_i\}_i$ está en K.*

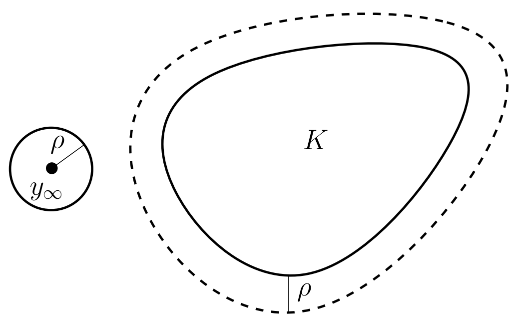
Demostración. Supongamos primero que $\{K_i\}_i \xrightarrow{\delta} K$.

Veamos la condición (a): Sea $x \in K$. Dado $i \in \mathbb{N}$, como K_i es un cerrado convexo, podemos considerar la proyección métrica $p_{K_i}\colon \mathbb{R}^n \to K_i$ (Definición 1.2.1). Así,

$$d(x, p_{K_i}(x)) = d(x, K_i) \overset{(\star)}{\leq} \delta(K, K_i) \overset{(i\to\infty)}{\longrightarrow} 0,$$

donde en $(\star)$ hemos usado que $K \subset K_i + \delta(K, K_i)\overline{\mathbb{B}}$. De esta forma, podemos tomar $x_i = p_{K_i}(x)$ en el enunciado del apartado (a).

En cuanto al apartado (b), sea $\{y_i\}_i$ con $y_i \in K_i$ $\forall i$. Tomemos una parcial convergente de $\{y_i\}_i$, a la que denotaremos de la misma forma para no complicar la notación. Sea $y_\infty \in \mathbb{R}^n$ su límite. Por reducción al absurdo, supongamos que $y_\infty \notin K$. Como K es compacto, existe $\rho > 0$ tal que $\overline{\mathbb{B}}(y_\infty, \rho) \cap (K + \rho\overline{\mathbb{B}}) = \emptyset$.



Como $\{K_i\}_i$ converge a K en distancia de Hausdorff, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K_i \subset K + \rho\overline{\mathbb{B}}$ $\forall i \geq i_0$, luego $y_i \in K + \rho\overline{\mathbb{B}}$ $\forall i \geq 0$. Esto implica que $y_i \notin \overline{\mathbb{B}}(y_\infty, \rho)$ $\forall i \geq i_0$, lo que contradice que $\{y_i\}_i$ converge a y_∞. Esto termina de probar la implicación necesaria del teorema.

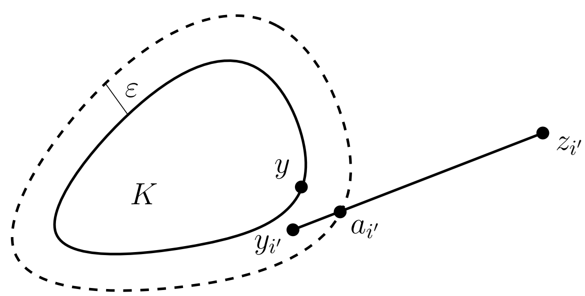
Para la implicación suficiente, supongamos que $\{K_i\}_i, K$ están en $\mathcal{K}^n$ y que cumplen las condiciones (a), (b). Debemos probar que $\{K_i\}_i$ converge a K en distancia de Hausdorff. Sea $\varepsilon > 0$. Supongamos, por reducción al absurdo, que no existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall i \geq i_0$, $K \subset K_i + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$ y $K_i \subset K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$. Esto nos dice que al menos una de las dos posibilidades siguientes debe darse:

(I) Existe una parcial $\{K_{i'}\}_{i'} \subset \{K_i\}_i$ tal que $K \not\subset K_{i'} + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$ $\forall i' \in \mathbb{N}$.

(II) Existe una parcial $\{K_{i'}\}_{i'} \subset \{K_i\}_i$ tal que $K_i' \not\subset K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$ $\forall i' \in \mathbb{N}$.

Supongamos que se da (I). Entonces, $\forall i' \in \mathbb{N}$ existe $z_{i'} \in K - (K_{i'} + \varepsilon\overline{\mathbb{B}})$, y por tanto $d(z_i', K_{i'}) \geq \varepsilon$. Como $\{z_{i'}\}_{i'}$ es una sucesión en el compacto K, pasando a una parcial podemos suponer que $\{z_{i'}\}_{i'}$ converge a un elemento $x \in K$ en la distancia usual en $\mathbb{R}^n$. Como $d(z_i', K_{i'}) \geq \varepsilon$ $\forall i'$, deducimos que $d(x, K_{i'}) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ para i' suficientemente grande. Pero aplicando a x, y a i' suficientemente grande la condición (a), debe existir $x_{i'} \in K_i$ tal que $d(x, x_{i'})$ es tan pequeña como queramos, en particular menos que $\frac{\varepsilon}{2}$, lo que contradice que $d(x, K_{i'}) \geq \frac{\varepsilon}{2}$.

Ahora supongamos que se da (II). Entonces, $\forall i' \in \mathbb{N}$ existe $z_{i'} \in K_{i'} - (K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}})$. Elegimos un punto $y \in K$. Por la condición (a), para cada i' podemos encontrar $y_{i'} \in K_{i'}$ tal que $\{y_{i'}\}_{i'} \to y$.



Consideremos el segmento $[y_{i'}, z_{i'}]$. Como y es interior a $K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$, también lo será $y_{i'}$ para todo i' a partir de un $i_0' \in \mathbb{N}$. Como $z_{i'} \notin K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$, por conexión existirá $a_{i'} \in [y_{i'}, z_{i'}] \cap \partial(K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}})$, $\forall i' \geq i_0'$. Como $y_{i'}, z_{i'} \in K_{i'}$ y $K_{i'}$ es convexo, deducimos que $a_{i'} \in K_{i'}$. Por otro lado, la sucesión $\{a_{i'}\}_{i'}$ es acotada en $\mathbb{R}^n$ (esto se deduce de que $a_{i'} \in \partial(K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}})$, que es compacto). Por tanto, tras pasar a una parcial podemos suponer que $\{a_{i'}\}_{i'}$ converge a un punto $a \in \mathbb{R}^n$. Este límite estará en K por la condición (b), ya que $a_{i'} \in K_{i'}$ $\forall i'$. Pero $d(a_{i'}, K) \geq \varepsilon$ $\forall i'$ (porque $a_{i'} \in \partial(K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}})$), luego tomando límites, $d(a, K) \geq \varepsilon$, lo que contradice que $a \in K$. Esto termina de probar el teorema. □

2.3. Continuidad respecto a la distancia de Hausdorff

En esta sección estudiaremos diversos resultados de continuidad en distancia de Hausdorff de operaciones básicas sobre compactos como la envolvente convexa, la suma afín o la unión finita. Más elaborada será la continuidad respecto a la distancia de Hausdorff del volumen. Estas propiedades nos serán útiles a la hora de definir el área del borde de un convexo compacto y al probar la desigualdad isoperimétrica.

Proposición 2.3.1 *La aplicación* $\mathrm{conv}\colon (\mathcal{C}^n, \delta) \to (\mathcal{K}^n, \delta)$ *cumple*

$$\delta\left(\mathrm{conv}(K), \mathrm{conv}(L)\right) \leq \delta(K, L), \quad \forall K, L \in \mathcal{C}^n.$$

En particular, es Lipschitziana.

Demostración. Sean $K, L \in \mathcal{C}^n$. Como $K \subset L + \delta(K,L)\overline{\mathbb{B}} \subset \mathrm{conv}(L) + \delta(K,L)\overline{\mathbb{B}}$, entonces $\mathrm{conv}(K) \subset \mathrm{conv}\left[\mathrm{conv}(L) + \delta(K,L)\overline{\mathbb{B}}\right]$. Como el conjunto entre corchetes es convexo por la Proposición 1.1.1, tenemos $\mathrm{conv}(K) \subset \mathrm{conv}(L) + \delta(K,L)\overline{\mathbb{B}}$. Cambiando los papeles de K, L obtenemos $\mathrm{conv}(L) \subset \mathrm{conv}(K) + \delta(K,L)\overline{\mathbb{B}}$, luego $\delta\left(\mathrm{conv}(K), \mathrm{conv}(L)\right) \leq \delta(K, L)$. □

Proposición 2.3.2 *Las aplicaciones*

$$\begin{array}{rccc} +\colon & \mathcal{C}^n \times \mathcal{C}^n & \to & \mathcal{C}^n \\ & (K, L) & \mapsto & K + L \end{array}, \qquad \begin{array}{rccc} \cup\colon & \mathcal{C}^n \times \mathcal{C}^n & \to & \mathcal{C}^n \\ & (K, L) & \mapsto & K \cup L \end{array}$$

cumplen:

1. $\delta(K + L, \widetilde{K} + \widetilde{L}) \leq \delta(K, \widetilde{K}) + \delta(L, \widetilde{L})$.
2. $\delta(K \cup L, \widetilde{K} \cup \widetilde{L}) \leq \text{máx}\{\delta(K, \widetilde{K}), \delta(L, \widetilde{L})\}$.

En particular, ambas aplicaciones son continuas.

Demostración. Sean $K, L \in \mathcal{C}^n$. Por un lado,

$$K \subset \widetilde{K} + \delta(K, \widetilde{K})\overline{\mathbb{B}}, \qquad L \subset \widetilde{L} + \delta(L, \widetilde{L})\overline{\mathbb{B}}. \tag{2.15}$$

Así,

$$K + L \subset \widetilde{K} + \widetilde{L} + \left[\delta(K, \widetilde{K})\overline{\mathbb{B}} + \delta(L, \widetilde{L})\overline{\mathbb{B}}\right] \overset{(\star)}{=} \widetilde{K} + \widetilde{L} + \left[\delta(K, \widetilde{K}) + \delta(L, \widetilde{L})\right]\overline{\mathbb{B}},$$

donde en $(\star)$ hemos usado la Proposición 1.1.1 ya que $\overline{\mathbb{B}}$ es convexo. Intercambiando los papeles de $K, \widetilde{K}$ y de $L, \widetilde{L}$ llegaremos a

$$\widetilde{K} + \widetilde{L} \subset K + L + \left[\delta(K, \widetilde{K}) + \delta(L, \widetilde{L})\right]\overline{\mathbb{B}},$$

de donde 1 se deduce directamente. En cuanto a 2, de nuevo (2.15) implica

$$K \cup L \subset \left[\widetilde{K} + \delta(K, \widetilde{K})\overline{\mathbb{B}}\right] \cup \left[\widetilde{L} + \delta(L, \widetilde{L})\overline{\mathbb{B}}\right] \subset (\widetilde{K} \cup \widetilde{L}) + \text{máx}\{\delta(K, \widetilde{K}), \delta(L, \widetilde{L}\}\overline{\mathbb{B}},$$

y análogamente,

$$\widetilde{K} \cup \widetilde{L} \subset (K \cup L) + \text{máx}\{\delta(K, \widetilde{K}), \delta(L, \widetilde{L}\}\overline{\mathbb{B}},$$

de donde concluímos 2. □

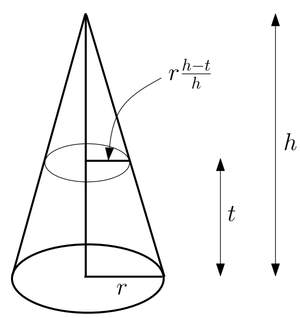
Nota 2.3.1 Se pueden dar ejemplos que demuestran que la intersección no es una función continua respecto a la distancia de Hausdorff.

Definición 2.3.1 Dado $K \in \mathcal{K}^n$, K es medible en el sentido de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Así, tiene sentido definir su *volumen* como la medida de Lebesgue de K:

$$\mathrm{vol}(K) = \mathrm{vol}_n(K) = \int_K dx_1 \dots dx_n \in [0, \infty).$$

En particular, $\mathrm{vol}(K) > 0$ si y sólo si K tiene interior no vacío.

En el siguiente lema usaremos el volumen de un cono en $\mathbb{R}^n$. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un cono circular recto de altura $h > 0$ en $\mathbb{R}^n$ y radio de la base $r > 0$. Tras una rotación podemos suponer que la base de C está contenida en el hiperplano $\{x_n = 0\}$ y que $C \subset \{x_n \geq 0\}$.



Así,

$$\mathrm{vol}(C) = \int_C dx_1 \dots dx_n = \int_0^h \mathrm{vol}_{n-1}(C \cap \{x_n = t\})\, dt.$$

Como $C \cap \{x_n = t\}$ es una bola cerrada $(n-1)$-dimensional de radio $r\frac{h-t}{h}$ en $\mathbb{R}^{n-1}$, tenemos

$$\mathrm{vol}(C) = \int_0^h \mathrm{vol}_{n-1}\left(\overline{\mathbb{B}}^{n-1}\left(r\frac{h-t}{h}\right)\right) dt = \int_0^h \left(\frac{r(h-t)}{h}\right)^{n-1} \mathrm{vol}_{n-1}(\mathbb{B}^{n-1}(1))\, dt.$$

En lo que sigue, llamaremos ω_k al volumen de la bola unidad en $\mathbb{R}^k$. Así,

$$\mathrm{vol}(C) = \left(\frac{r}{h}\right)^{n-1} \omega_{n-1} \int_0^h (h-t)^{n-1}\, dt = \left(\frac{r}{h}\right)^{n-1} \omega_{n-1} \frac{h^n}{n} = \frac{\omega_{n-1}}{n} r^{n-1} h. \tag{2.16}$$

Lema 2.3.1 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y convexo, no compacto y con interior no vacío. Entonces,* $\mathrm{vol}(A) = \infty$.

Demostración. Tomemos $x \in \text{int}(A)$. Así, existe $r > 0$ tal que $\mathbb{B}(x,r) \subset A$. Como A es cerrado y no compacto, A no puede ser acotado luego existe una sucesión $\{x_m\}_m \subset A$ con $d(x,x_m) \to \infty$ si $m \to \infty$. Al ser A convexo, el cono $C(x_m,r)$ con vértice x_m y base el disco de radio r centrado en x y ortogonal al segmento $[x,x_m]$, cumple $C(x_m,r) \subset A$. Como la altura de $C(x_m,r)$ es $d(x,x_m)$, la fórmula (2.16) asegura que

$$\text{vol}(A) \geq \text{vol}(C(x_m,r)) = \frac{\omega_{n-1}}{n} r^{n-1} d(x,x_m) \overset{(m\to\infty)}{\longrightarrow} \infty.$$

$\square$

Lema 2.3.2 *Sean $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^n$ tales que $K_2 \subset \text{int}(K_1)$. Entonces, existe $\alpha > 0$ tal que para todo $\widetilde{K} \in \mathcal{K}^n$ con $\delta(K_1,\widetilde{K}) < \alpha$, se tiene $K_2 \subset \widetilde{K}$.*

Demostración. Consideremos la función soporte $h_{K_i} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (Sección 1.7). Dado $u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$, el que $K_2 \subset \text{int}(K_1)$ implica que

$$h_{K_2}(u) = \sup_{a\in K_2} \langle a,u\rangle < \sup_{a\in K_1} \langle a,u\rangle = h_{K_1}(u),$$

luego la función $h_{K_1} - h_{K_2} \colon \mathbb{S}^{n-1}(1) \to \mathbb{R}$ es positiva. Como $h_{K_i} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es convexa (Proposición 1.7.1) luego continua (Lema 1.7.1), entonces $h_{K_1} - h_{K_2}$ es continua en el compacto $\mathbb{S}^{n-1}(1)$, y por tanto existe

$$\alpha := \min_{u\in\mathbb{S}^{n-1}(1)} (h_{K_1} - h_{K_2})(u) > 0.$$

Tomemos $\widetilde{K} \in \mathcal{K}^n$ con $\delta(K_1,\widetilde{K}) < \alpha$. Dado $u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$,

$$\begin{aligned}
h_{K_1}(u) &= \sup_{a\in K_1} \langle a,u\rangle \\
&\leq \sup_{a\in \widetilde{K}+\alpha\overline{\mathbb{B}}} \langle a,u\rangle \qquad \text{(porque } K_1 \subset \widetilde{K}+\alpha\overline{\mathbb{B}}) \\
&\leq \left(\sup_{a\in\widetilde{K}} \langle a,u\rangle\right) + \alpha \\
&= h_{\widetilde{K}}(u) + \alpha.
\end{aligned}$$

De la misma forma, de $\widetilde{K} \subset K_1 + \alpha\overline{\mathbb{B}}$ se deduce que $h_{\widetilde{K}}(u) \leq h_{K_1}(u) + \alpha$, luego

$$|h_{K_1}(u) - h_{\widetilde{K}}(u)| \leq \alpha. \tag{2.17}$$

Finalmente,

$$h_{K_2}(u) = h_{K_1}(u) - (h_{K_1} - h_{K_2})(u) \leq h_{K_1}(u) - \alpha \overset{(2.17)}{\leq} h_{\widetilde{K}}(u).$$

Como lo anterior es cierto $\forall u \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$, el apartado (5) de la Proposición 1.7.1 implica que $K_2 \subset \widetilde{K}$. □

Terminaremos esta sección con el siguiente resultado:

Teorema 2.3.1 *La aplicación* $\mathrm{vol}\colon (\mathcal{K}^n, \delta) \to [0, \infty)$ *es continua.*

Demostración. Sea $K \in \mathcal{K}^n$. Veamos que $\mathrm{vol}\colon (\mathcal{K}^n, \delta) \to [0, \infty)$ es continua en K.

Caso I: $\mathrm{int}(K) = \emptyset$. Como K es convexo y con interior vacío, existe un hiperplano $H \subset \mathbb{R}^n$ que contiene a K (en caso contrario, K contendría $n+1$ puntos afínmente independientes que forman un símplex n-dimensional con volumen positivo; pero $\mathrm{vol}(K) = 0$ al ser $\mathrm{int}(K) \neq \emptyset$).

Tomemos una bola n-dimensional $\mathbb{B}(p, r)$ con $p \in H$ y $r > 0$ tal que $K \subset \mathbb{B}(p, r)$. Tomemos $\alpha \in (0, r)$ y sea $K' \in \mathcal{K}^n$ tal que $\delta(K, K') < \alpha$. Entonces,

$$K' \subset K + \delta(K, K')\overline{\mathbb{B}} \subset K + \alpha\overline{\mathbb{B}} \subset [\mathbb{B}(p, r) \cap H] + \alpha\overline{\mathbb{B}} \subset C,$$

donde C es el cilindro en $\mathbb{R}^n$ de base $\mathbb{B}(p, r+\alpha) \cap H$ y altura 2α (ver Figura 2.2)

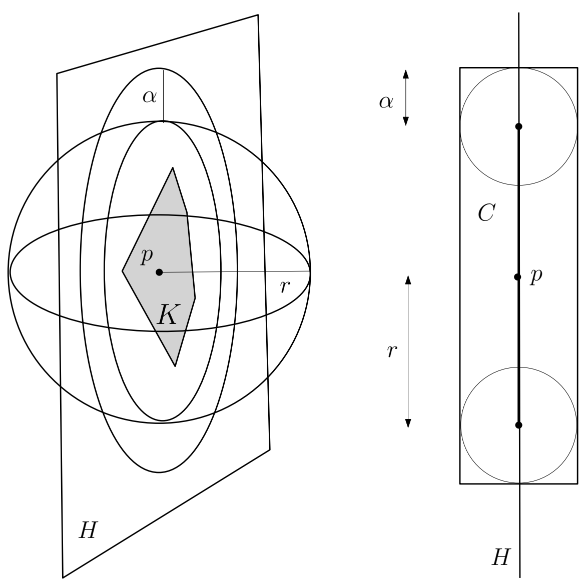


Figura 2.2: En la figura de la derecha, el cilindro C aparece de perfil.

Así,

$$\mathrm{vol}(K') \leq \mathrm{vol}(C) = \mathrm{vol}_{n-1}(\mathbb{B}^{n-1}(r+\alpha))2\alpha = 2\omega_n\alpha(r+\alpha)^{n-1}. \tag{2.18}$$

Ya podemos ver la continuidad del volumen en K: Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\alpha \in (0, r)$ tal que $2\omega_n \alpha(r + \alpha)^{n-1} < \varepsilon$. Dado $K' \in \mathcal{K}^n$ con $\delta(K, K') < \alpha$, (2.18) asegura que $\mathrm{vol}(K') < \varepsilon$, luego el volumen n-dimensional es continuo en K.

<u>Caso II: $\mathrm{int}(K) \neq \emptyset$.</u> Como el volumen es invariante por traslaciones, podemos suponer que $\vec{0} \in \mathrm{int}(K)$. Así, podemos encontrar $\rho > 0$ tal que

$$\rho\overline{\mathbb{B}} \subset \mathrm{int}(K). \tag{2.19}$$

Aplicando el Lema 2.3.2 a $K_1 = K$ y $K_2 = \rho\overline{\mathbb{B}}$, obtenemos un $\alpha > 0$ tal que

$$\forall \widetilde{K} \in \mathcal{K}^n \text{ con } \delta(K, \widetilde{K}) < \alpha, \text{ se tiene } \rho\overline{\mathbb{B}} \subset \widetilde{K}. \tag{2.20}$$

Con esto ya podemos probar la continuidad del volumen en K: Sea $\varepsilon > 0$. ¿Existe $\delta > 0$ tal que si $\delta(K, \widetilde{K}) < \delta$ entonces $|\mathrm{vol}(K) - \mathrm{vol}(\widetilde{K})| < \varepsilon$? Elegimos $\lambda > 1$ tal que

$$\lambda^n(\lambda^n - 1)\ \mathrm{vol}(K) < \varepsilon. \tag{2.21}$$

Es claro que podemos suponer $0 < \alpha < (\lambda - 1)\rho$ (tomar α más pequeño no destruye (2.20)). Tomemos $\widetilde{K} \in \mathcal{K}^n$ con $\delta(K, \widetilde{K}) < \alpha$. Entonces,

$$K \subset \widetilde{K} + \alpha\overline{\mathbb{B}} \subset \widetilde{K} + (\lambda - 1)\rho\overline{\mathbb{B}} \overset{(2.20)}{\subset} \widetilde{K} + (\lambda - 1)\widetilde{K} \overset{(\star)}{=} \lambda\widetilde{K}, \tag{2.22}$$

donde hemos usando en $(\star)$ el apartado (3) de la Proposición 1.1.1. Análogamente,

$$\widetilde{K} \subset K + \alpha\overline{\mathbb{B}} \subset K + (\lambda - 1)\rho\overline{\mathbb{B}} \overset{(2.19)}{\subset} K + (\lambda - 1)K \overset{(\star)}{=} \lambda K. \tag{2.23}$$

De (2.22) tenemos

$$\mathrm{vol}(K) \leq \mathrm{vol}(\lambda\widetilde{K}) = \lambda^n\ \mathrm{vol}(\widetilde{K}), \tag{2.24}$$

luego

$$\mathrm{vol}(K) - \mathrm{vol}(\widetilde{K}) \leq (\lambda^n - 1)\mathrm{vol}(\widetilde{K}). \tag{2.25}$$

Y de (2.23) obtenemos

$$\mathrm{vol}(\widetilde{K}) \leq \mathrm{vol}(\lambda K) = \lambda^n\ \mathrm{vol}(K), \tag{2.26}$$

luego

$$\mathrm{vol}(K) - \mathrm{vol}(\widetilde{K}) \overset{(2.25)}{\leq} (\lambda^n - 1)\mathrm{vol}(\widetilde{K}) \overset{(2.26)}{\leq} (\lambda^n - 1)\lambda^n\mathrm{vol}(K). \tag{2.27}$$

Ahora cambiamos los papeles de $K, \widetilde{K}$ (el razonamiento no es el mismo):

$$\mathrm{vol}(\widetilde{K}) - \mathrm{vol}(K) \overset{(2.26)}{\leq} \lambda^n\mathrm{vol}(K) - \mathrm{vol}(K) = (\lambda^n - 1)\mathrm{vol}(K) \overset{(\lambda > 1)}{<} \lambda^n(\lambda^n - 1)\mathrm{vol}(K). \tag{2.28}$$

Finalmente, de (2.27) y (2.28) deducimos que $|\mathrm{vol}(K) - \mathrm{vol}(\widetilde{K})| \leq \lambda^n(\lambda^n - 1)\ \mathrm{vol}(K)$, lo que termina la demostración sin más que usar (2.21). $\square$

2.4. Resultados de densidad en distancia de Hausdorff

Recordemos que habíamos definido un punto regular $x \in \partial K$ para un $K \in \mathcal{K}_0^n$ como aquel en el que el hiperplano soporte de K en x es único (Definición 1.8.2), que un politopo es la envolvente convexa de una familia finita de puntos en $\mathbb{R}^n$ (Definición 1.10.1) y que todo politopo puede verse como una intersección finita de semiespacios cerrados (Teorema 1.10.1). En esta sección veremos que tanto los politopos como los convexos compactos regulares (ver Definición 2.4.1) son densos en $(\mathcal{K}^n, \delta)$.

Teorema 2.4.1 *Dados $K \in \mathcal{K}^n$ y $\varepsilon > 0$, existe un politopo $P \in \mathcal{K}^n$ tal que $P \subset K \subset P + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$ (en particular, $\delta(K, P) \leq \varepsilon$). Por tanto, $\{P \in \mathcal{K}^n \mid P \text{es un politopo}\}$ es denso en $(\mathcal{K}^n, \delta)$.*

Demostración. Consideremos el recubrimiento por abiertos $\{\mathbb{B}(x, \varepsilon) \mid x \in K\}$. Por compacidad de K, existen $x_1, \ldots, x_m \in K$ tales que $K \subset \cup_{i=1}^m \mathbb{B}(x_i, \varepsilon)$. Sea P el politopo $\text{conv}(\{x_1, \ldots, x_m\})$. Por ser K convexo, tenemos $P \subset K$. Por otro lado,

$$K \subset \cup_{i=1}^m \overline{\mathbb{B}}(x_i, \varepsilon) = \{x_1, \ldots, x_m\} + \varepsilon\mathbb{B} \subset P + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}.$$

□

Corolario 2.4.1 *$(\mathcal{K}^n, \delta)$ es un espacio topológico separable (es decir, admite un subconjunto denso y numerable).*

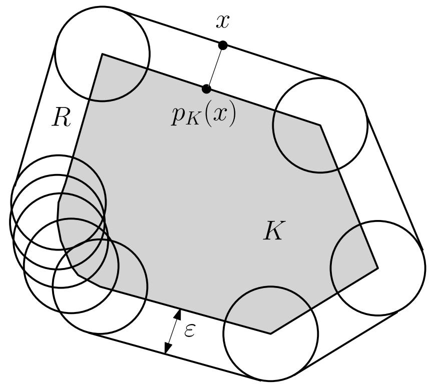
Demostración. Basta considerar el conjunto de politopos de la forma $\text{conv}(\{x_1, \ldots, x_m\})$ donde $m \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{Q}^n$, y aplicar el razonamiento en la demostración anterior. □

Definición 2.4.1 Un convexo $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice *regular* si todo punto $x \in \partial A$ es regular, es decir, el hiperplano soporte de A en x es único (la existencia está asegurada por el Teorema 1.4.1).

Teorema 2.4.2 *Dados $K \in \mathcal{K}^n$ y $\varepsilon > 0$, existe $R \subset \mathcal{K}^n$ regular tal que $K \subset R \subset K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$ (en particular, $\delta(K, R) \leq \varepsilon$). Por tanto, $\{R \in \mathcal{K}^n \mid R \text{ es regular}\}$ es denso en $(\mathcal{K}^n, \delta)$.*

Demostración. Sea $R = \overline{\mathcal{U}}(K, \varepsilon) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid d(p, K) \leq \varepsilon\} = K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$ el entorno tubular cerrado de K de radio ε, que es convexo por el apartado (3) de la Proposición 1.1.1. Entonces, $K \subset R = K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$, luego sólo queda probar que R es regular:

Por ser R un cerrado convexo, dado $x \in \partial R$ el apartado (1) del Teorema 1.4.1 asegura la existencia de un hiperplano soporte de R en x. Además, la Proposición 1.2.1 nos



permite considerar la proyección métrica sobre K, $p_K\colon \mathbb{R}^n \to K$. Como $x \in \partial R = \{p \in \mathbb{R}^n \mid d(p, K) = \varepsilon)$, tenemos $d(x, p_K(x)) = \varepsilon$. Ya podemos probar la unicidad del hiperplano soporte de R en x: sea $H \subset \mathbb{R}^n$ un hiperplano soporte de R en x: Como $x \in \partial\mathbb{B}(p_K(x), \varepsilon)$ y $\overline{\mathbb{B}}(p_K(x), \varepsilon) \subset R$, entonces H es un hiperplano soporte de $\overline{\mathbb{B}}(p_K(x), \varepsilon)$ en x. Como $\partial\overline{\mathbb{B}}(p_K(x), \varepsilon) = \mathbb{S}^{n-1}(p_K(x), \varepsilon)$ es una hipersuperficie diferenciable, H debe ser el hiperplano tangente a $\mathbb{S}^{n-1}(p_K(x), \varepsilon)$ en x. Por tanto, H es único luego x es un punto regular de R. □

Nota 2.4.1 Si un convexo $R \subset \mathbb{R}^n$ tiene borde diferenciable, entonces R es regular (el hiperplano soporte en cualquier $x \in \partial R$ es el hiperplano tangente a la hipersuperficie diferenciable ∂R, y por tanto es único). Este argumento es también válido si sólo imponemos que ∂R sea de clase C^1. Por otro lado, en la última demostración hemos visto que si $K \in \mathcal{K}^n$ y $\varepsilon > 0$, entonces $R := K + \varepsilon\overline{\mathbb{B}}$ es un convexo regular. En este caso, *∂R es de clase $C^{1,1}$:* En efecto, como R es regular, dado $x \in \partial R$ tiene sentido el vector normal unitario exterior $N(x) \in \mathbb{S}^{n-1}(1)$ a R en x, que define una aplicación $N\colon \partial R \to \mathbb{S}^{n-1}(1)$. Basta comprobar que N es de clase $C^{0,1}$ (Lipschitziana): dado $x \in \partial R$, la demostración anterior prueba que el hiperplano soporte de R en x coincide con el hiperplano tangente a $\mathbb{S}^{n-1}(p_K(x), \varepsilon)$ en x. Por tanto, $N(x) = \frac{x - p_K(x)}{\|x - p_K(x)\|} = \frac{1}{\varepsilon}(x - p_K(x))$ y dados $x, y \in \partial R$,

$$\|N(x) - N(y)\| = \frac{1}{\varepsilon}\|x - p_K(x) - y + p_K(y)\| \leq \frac{1}{\varepsilon}\left(\|x - y\| + \|p_K(x) - p_K(y)\|\right) \overset{(\star)}{\leq} \frac{2}{\varepsilon}\|x - y\|,$$

donde en $(\star)$ hemos usado el apartado (3) de la Proposición 1.2.2. Por tanto, N es Lipschitziana, con constante de Lipschitz menor o igual que $2/\varepsilon$.

2.5. Ejercicios.

1. Calcular la distancia de Hausdorff entre las siguientes parejas K, L de compactos de $\mathbb{R}^2$:

   a) $K = [-1,2] \times [-1,2]$, $L = \overline{\mathbb{B}}(\vec{0}, 1)$.

   b) $K = \overline{\mathbb{B}}\left((1,1),1\right)$, $L = \overline{\mathbb{B}}\left((-1,-1),2\right)$.

   c) $K = \text{conv}(\{(0,0),(1,0),(1,1)\})$, $L = \text{conv}(\{(0,0),(-1,0),(-1,1)\})$.

2. Sean $\{p_i^1\}_{i\in\mathbb{N}} \to p^1, \ldots, \{p_i^k\}_{i\in\mathbb{N}} \to p^k$ sucesiones convergentes en $\mathbb{R}^n$. Probar que la sucesión de politopos $K_i = \mathrm{conv}(\{p_i^1, \ldots, p_i^k\})$ converge en distancia de Hausdorff al politopo $K = \mathrm{conv}(\{p^1, \ldots, p^k\})$.

3. Encontrar una sucesión de polígonos $\{P_n\}_n$ en $\mathbb{R}^2$ cuyo límite en la distancia de Hausdorff sea el disco cerrado unidad.

4. Sean $K, L \in \mathcal{C}^n$. Se definen

   $$\delta^*(K,L) = \text{ínf}\{\alpha \geq 0 \mid L \subset K + \alpha\overline{\mathbb{B}}\}, \quad \delta_*(K,L) = \text{ínf}\{\alpha \geq 0 \mid K \subset L + \alpha\overline{\mathbb{B}}\}.$$

   a) Probar que la distancia de Hausdorff es $\delta(K,L) = \text{máx}\{\delta^*(K,L), \delta_*(K,L)\}$.

   b) Demostrar que $\delta^*(K,L) = \delta_*(L,K)$.

   c) Probar que $\delta^*(K,L) = 0$ si y sólo si $L \subset K$, y que $\delta_*(K,L) = 0$ si y sólo si $K \subset L$.

   d) Probar que δ^*, δ_* satisfacen la desigualdad triangular.

5. Si generalizamos la definición de la distancia de Hausdorff a subconjuntos cualesquiera de $\mathbb{R}^n$, encontramos algunas dificultades. Dados $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ definimos

   $$d_H(X,Y) = \text{ínf}\{\alpha > 0 \mid X \subset Y + \alpha\overline{\mathbb{B}} \text{ e } Y \subset X + \alpha\overline{\mathbb{B}}\}.$$

   (Comparar con la Definición 2.1.1).

   a) El ínfimo que aparece en d_H ya no es necesariamente un mínimo: Consideremos los conjuntos $X = \{1/i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $Y = \{-1/i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$. Probar que $d_H(X,Y) = 1$ y que $X \not\subset Y + \overline{\mathbb{B}}$.

   b) Probar que el Lema 2.1.1 sigue siendo cierto para d_H (aunque su demostración no es válida en esta situación más general).

   c) Demostrar que $d_H(X,Y) = 0$ si y sólo si $\overline{X} = \overline{Y}$ (comparar con lo que ocurre para la distancia de Hausdorff).

   d) Probar que $d_H(X,Y) = d_H(Y,X)$ y que la desigualdad triangular sigue siendo cierta para d_H. Por tanto, d_H es una *pseudo-distancia*.

6. Probar que si en $\mathbb{R}^n$ cambiamos la distancia usual $d(x,y) = \|x-y\|$ por cualquier otra distancia d' equivalente a d, entonces las distancias de Hausdorff δ, δ' asociadas a d, d' son equivalentes. En este sentido, la *topología* de $(\mathcal{C}^n, \delta)$ sólo depende de la topología usual de $\mathbb{R}^n$, no de la distancia que la genera.

7. Sea (X,d) un espacio métrico. En este ejercicio veremos cómo generalizar la distancia de Hausdorff en X. Consideremos la familia $\mathcal{C}$ de los subconjuntos no vacíos, cerrados y acotados de X. Dado $K \in \mathcal{C}$ y $\alpha \geq 0$, denotaremos por $K_\alpha = \{x \in X \mid d(x,K) \leq \alpha\}$. Así, $K_\alpha \in \mathcal{C}$, $\forall K \in \mathcal{C}$, $\alpha \geq 0$. Probar que definiendo

$$\delta(K,L) = \text{ínf}\{\alpha \geq 0 \mid K \subset L_\alpha \text{ y } L \subset K_\alpha\}, \qquad K, L \in \mathcal{C},$$

se define una distancia en $\mathcal{C}$, llamada la distancia de Hausdorff.

8. Sea (X,d) un espacio métrico completo. En este ejercicio generalizaremos el Teorema 2.1.1, probando que $(\mathcal{C}, \delta)$ es un espacio métrico completo, donde $\mathcal{C}$, δ se definieron en el Ejercicio 7. Tomemos una sucesión $\{K_m\}_m$ de Cauchy en $(\mathcal{C}, \delta)$. Basta probar que $\{K_m\}_m$ admite una parcial δ-convergente.

   a) Probar que existe una parcial $\{K_{m(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{K_m\}_m$ tal que $\delta(K_{m(k)}, K_{m(k+1)}) < 2^{-k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. En lo que sigue, volveremos a llamar $\{K_m\}_m$ a esta parcial, para no complicar más la notación, y probaremos que $\{K_m\}_m$ es δ-convergente a un elemento de $\mathcal{C}$. Por tanto,

   $$\delta(K_m, K_{m+1}) < 2^{-m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{2.29}$$

   b) Fijemos $x_1 \in K_1$. Usar la condición (2.29) para probar que $\forall m \geq 2$, existe $x_m \in K_m$ tal que $d(x_m, x_{m+1}) < 2^{-m}$ $\forall m \in \mathbb{N}$. Deducir de la completitud de (X,d) que $\{x_m\}_{m\geq 1}$ converge a un elemento $x \in X$. Usar la desigualdad triangular para demostrar que

   $$d(x_m, x) \leq 2^{-m+1}, \ \forall m \in \mathbb{N}. \tag{2.30}$$

   c) Definimos

   $$A = \left\{x \in X \mid \forall m \in \mathbb{N}, \ \exists x_m \in K_m \text{ con } d(x_m, x_{m-1}) < 2^{-m}, \ \lim_{m\to\infty} x_m = x\right\},$$

   que es no vacío por el apartado 8*b*. Usar (2.30) para probar que

   $$A \subset (K_m)_{2^{-m+1}}, \ \forall m \in \mathbb{N}. \tag{2.31}$$

   Concluir que A es acotado en (X,d) y que $\overline{A} \in \mathcal{C}$.

d) Sea $\varepsilon > 0$. Usar (2.31) para probar que existe $m_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{A} \subset (K_m)_\varepsilon$, $\forall m \geq m_1$.

e) Sea $y_m \in K_m$. Usar el procedimiento del apartado 8*b* para producir una sucesión $\{y_h\}_{h \geq m}$ con $y_h \in K_h$ y $d(y_h, y_{h+1}) < 2^{-h}$ $\forall h \geq m$, de forma que $\{y_h\}_{h \geq m}$ converge en (X, d) a un elemento $y_\infty \in A$, que cumplirá $d(y_h, y_\infty) \leq 2^{-h+1}$ $\forall h \geq m$ por (2.30). Concluir que $d(y_m, A) \leq 2^{-m+1}$.

f) Sea $\varepsilon > 0$. Usar el apartado 8*e* para probar que $\exists m_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $K_m \subset (\overline{A})_\varepsilon$, $\forall m \geq m_2$. Deducir de esto y del apartado 8*d* que $\{K_m\}_m$ converge a $\overline{A}$ en $(\mathcal{C}, \delta)$. Por tanto, $(\mathcal{C}, \delta)$ es completo.