Problemas de Capilaridad

Queremos estudiar desde el punto de vista del cálculo de variaciones el siguiente problema, para luego implementarlo con Evolver:

> *Dada una superficie $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ (que llamaremos superficie de ligadura), cuáles son las superficies compactas y con borde M que minimizan el área con una topología dada, cuyo borde ∂M se apoya en Σ y M corta a Σ con un ángulo constante prescrito? ¿y si además prescribimos que M encierre junto con Σ un volumen dado?*

El problema anterior exigirá minimizar un funcional distinto al funcional área. Sea $\mathcal{M}$ el conjunto formado por todas las superficies compactas $M \subset \mathbb{R}^3$ con borde $\partial M \subset \Sigma$, de manera que si llamamos $D \subset \Sigma$ al dominio encerrado por ∂M en Σ, entonces $M \cup D$ es el borde de un abierto Ω de $\mathbb{R}^3$. Dado $c \in \mathbb{R}$, llamamos

$$E_c : \mathcal{M} \to \mathbb{R} \mid E_c(M) = \text{Area}(M) + c\,\text{Area}(D).$$

Proposición 1 *Sea $\{\psi_t : M \to \mathbb{R}^3\}_t$ una familia diferenciable de inmersiones, de forma que $\psi_0(M) = M$ y $\psi_t(M) \in \mathcal{M}$ $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Entonces, la primera fórmula de variación de E_c es*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_0 E_c(\psi_t(M)) = -2\int_M H\langle\dot{\psi}, N\rangle\, dA + \int_{\partial M}\langle\dot{\psi}, \eta_M - c\,\eta_\Sigma\rangle\, ds, \tag{1}$$

donde H es la curvatura media de M respecto del normal unitario $N : M \to \mathbb{S}^2(1)$, $\dot{\psi}$ es el campo variacial de ψ_t y η_M, η_Σ son respectivamente los conormales unitarios exteriores a M y a D a lo largo de $\partial M = \partial D$.

Demostración. Llamemos D_t al dominio encerrado por $\psi_t(\partial M)$ en Σ. Entonces,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_0 E_c(\psi_t(M)) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \text{Area}(\psi_t(M)) + c\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \text{Area}(D_t), \tag{2}$$

Calculamos el primer sumando de (2). Como $\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \text{Area}(\psi_t(M))$ no depende de ψ_t sino sólo de $\dot{\psi}$, podemos dividir el cálculo en dos casos:

- Supongamos que $\dot{\psi} = uN$ con $u \in C^\infty(M)$. Entonces, la primera fórmula de variación del área nos dice que

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \text{Area}(\psi_t(M)) = -2\int_M H u\, dA. \tag{3}$$

- Supongamos que $\dot{\psi} \in \mathfrak{X}(M)$. Sea $\{\varphi_t\}_t$ el grupo local uniparamétrico de $\dot{\psi}$ (como M es compacta, podemos suponer que φ_t está definido en M $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$). De nuevo el que $\frac{d}{dt}\big|_0 \text{Area}(\psi_t(M))$ sólo depende de $\dot{\psi}$ implica

$$\frac{d}{dt}\bigg|_0 \text{Area}(\psi_t(M)) = \frac{d}{dt}\bigg|_0 \text{Area}(\varphi_t(M)) = \frac{d}{dt}\bigg|_0 \int_{\varphi_t(M)} dA = \int_M \frac{d}{dt}\bigg|_0 (\varphi_t^* dA).$$

Calculamos $\frac{d}{dt}\big|_0 (\varphi_t^* dA)$ puntualmente. Tomemos una base local ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $\mathfrak{X}(M)$. Entonces, $\varphi_t^* dA = \det\left(d\varphi_t(e_1), d\varphi_t(e_2), N\right) dA$ luego

$$\frac{d}{dt}\bigg|_0 (\varphi_t^* dA) = \left[\det(\frac{d}{dt}\bigg|_0 d\varphi_t(e_1), e_2, N) + \det(e_1, \frac{d}{dt}\bigg|_0 d\varphi_t(e_2), N)\right] dA.$$

Tomemos una curva $\alpha_i(s)$ en M que pasa en $s = 0$ por el punto en el que e_i es vector tangente, con $\alpha_i'(0) = e_i$. Entonces, $\frac{d}{dt}\big|_0 d\varphi_t(e_i) = \frac{d}{dt}\big|_0 \frac{d}{ds}\big|_0 \varphi_t(\alpha_i(s)) = \frac{d}{ds}\big|_0 \frac{d}{dt}\big|_0 \varphi_t(\alpha_i(s)) = \frac{d}{ds}\big|_0 \dot{\psi}_{\alpha_i(s)} = \overline{\nabla}_{e_i}\dot{\psi}$, donde $\overline{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita de $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$. Por tanto, la ecuación de Gauss nos dice que si llamamos ∇ a la conexión de Levi-Civita de M, entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\bigg|_0 (\varphi_t^* dA) &= \left[\det(\nabla_{e_1}\dot{\psi}, e_2, N) + \det(e_1, \nabla_{e_2}\dot{\psi}, N)\right] dA \\ &= \left[\langle \nabla_{e_1}\dot{\psi}, e_1\rangle + \langle \nabla_{e_2}\dot{\psi}, e_2\rangle\right] dA = \text{div}_M(\dot{\psi})\, dA,\end{aligned}$$

donde div_M denota divergencia respecto a la métrica inducida en M. Por tanto,

$$\frac{d}{dt}\bigg|_0 \text{Area}(\psi_t(M)) = \int_M \text{div}_M(\dot{\psi})\, dA = \int_{\partial M} \langle \dot{\psi}, \eta_M\rangle\, ds. \tag{4}$$

Juntando (3), (4) obtenemos

$$\frac{d}{dt}\bigg|_0 \text{Area}(\psi_t(M)) = -2\int_M H\langle \dot{\psi}, N\rangle\, dA + \int_{\partial M} \langle \dot{\psi}, \eta_M\rangle\, ds. \tag{5}$$

En cuanto a $\frac{d}{dt}\big|_0 \text{Area}(D_t)$, como la variación $t \mapsto D_t$ es tangente a Σ (porque $\psi_t(M) \in \mathcal{M}$ $\forall |t| < \varepsilon$), deducimos de (4) que

$$\frac{d}{dt}\bigg|_0 \text{Area}(D_t) = \int_{\partial D} \langle \dot{\psi}, \eta_\Sigma\rangle\, ds = -\int_{\partial M} \langle \dot{\psi}, \eta_\Sigma\rangle\, ds, \tag{6}$$

donde en la última igualdad hemos usado que $\partial D, \partial M$ tienen orientaciones opuestas. Por último, de (5) y (6) deducimos la fórmula de variación de E_c. $\square$

Ya podemos saber qué funcional tenemos que minimizar para obtener soluciones al problema de capilaridad con ángulo prescrito α:

Corolario 1 *Sea $M \in \mathcal{M}$. Entonces:*

1. *M es punto crítico de E_c para toda variación de M en $\mathcal{M}$ si y sólo si $H = 0$ y M corta a Σ con ángulo constante α dado por $c = \cos(\alpha)$.*

2. *M es punto crítico de E_c para toda variación de M en $\mathcal{M}$ que conserva el volumen (al orden uno) si y sólo si H es constante y M corta a Σ con ángulo constante α dado por $c = \cos(\alpha)$.*

Demostración. Supongamos que $M \in \mathcal{M}$ es un punto crítico de E_c para variaciones de M en $\mathcal{M}$. Tomando variaciones con borde fijo al orden uno (i.e. $\dot{\psi}|_{\partial M} = 0$), (1) nos dice que $\frac{d}{dt}\Big|_0 E_c(\psi_t(M)) = -2\int_M H\langle\dot{\psi}, N\rangle\, dA$, es decir, H es L^2-ortogonal al subespacio vectorial $\{u \in C^\infty(M) \mid u|_{\partial M} = 0\}$, que es denso en $L^2(M)$. Por tanto, $H = 0$ en M. Si sólo suponemos que M es un punto crítico de E_c para variaciones de M en $\mathcal{M}$ que conserven el volumen al orden 1, el mismo razonamiento nos dice que H es L^2-ortogonal al subespacio vectorial $\{u \in C^\infty(M) \mid u|_{\partial M} = 0, \int_M u = 0\}$, y por tanto H es constante en M.

Seguimos suponiendo que M es crítica para E_c en el sentido del apartado *1* ó *2*. En cualquier caso, (1) nos dice que dada cualquier variación de M en $\mathcal{M}$ (a volumen constante si estamos en el apartado *2*),

$$\frac{d}{dt}\bigg|_0 E_c(\psi_t(M)) = \int_{\partial M} \langle\dot{\psi}, \eta_M - c\,\eta_\Sigma\rangle\, ds,$$

Dada $\phi \in C^\infty(\partial M)$, siempre podemos encontrar $\dot{\psi}$ tal que $\dot{\psi}|_{\partial M} = \phi\, \eta_\Sigma$. Sustituyendo en la última fórmula, obtenemos que las funciones ϕ, $\langle\eta_\Sigma, \eta_M - c\,\eta_\Sigma\rangle = \langle\eta_\Sigma, \eta_M\rangle - c$ son L^2-ortogonales. Moviendo ϕ en $C^\infty(\partial M)$ se deduce que $c = \langle\eta_\Sigma, \eta_M\rangle = \cos(\alpha)$, donde α es el ángulo que forman M y Σ al cortarse (que en particular, debe ser constante). $\square$