Clasificación cohomológica de grupoides monoidales (trenzados)

María Calvo Cervera

En colaboración con Antonio Martínez Cegarra y Benjamín Alarcón Heredia
Universidad de Granada

7 de Junio de 2014
Jornadas en Métodos Categóricos y Homotópicos en Álgebra, Geometría y Topología

Axiomas grupoide monoidal

$$\begin{tikzcd}
((x \otimes y) \otimes z) \otimes t \arrow[r, "\mathbf{a}"] \arrow[d, "\mathbf{a}\otimes 0"'] & (x \otimes y) \otimes (z \otimes t) \arrow[r, "\mathbf{a}"] & x \otimes (y \otimes (z \otimes t)) \\
(x \otimes (y \otimes z)) \otimes t \arrow[rr, "\mathbf{a}"] & & x \otimes ((y \otimes z) \otimes t) \arrow[u, "0\otimes\mathbf{a}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(x \otimes \mathrm{I}) \otimes y \arrow[rr, "\mathbf{a}"] \arrow[dr, "\mathbf{r}\otimes 0"'] & & x \otimes (\mathrm{I} \otimes y) \arrow[dl, "0\otimes\mathbf{l}"] \\
& x &
\end{tikzcd}$$

$h \in Z^3_{\mathrm{L}}(M, \mathcal{A})$ es una función

$$h : M^3 \to \sqcup_{a\in M} \mathcal{A}_a,$$

con $h(a, b, c) \in \mathcal{A}_{abc}$, normalizada, y

$h \in Z^3_{\mathrm{L}}(M, \mathcal{A})$ es una función

$$h : M^3 \to \sqcup_{a \in M} \mathcal{A}_a,$$

con $h(a, b, c) \in \mathcal{A}_{abc}$, normalizada, y

$$a_* h(a, b, c) + h(a, bc, d) + d^* h(a, b, c) = h(ab, c, d) + h(a, b, cd)$$

Axiomas grupoide monoidal trenzado

$$
\begin{tikzcd}
 & (y\otimes x)\otimes z \arrow[r, "\mathbf{a}"] & y\otimes(x\otimes z) \arrow[dr, "0\otimes\mathbf{c}"] & \\
(x\otimes y)\otimes z \arrow[ur, "\mathbf{c}\otimes 0"] \arrow[dr, "\mathbf{a}"'] & & & y\otimes(z\otimes x) \\
 & x\otimes(y\otimes z) \arrow[r, "\mathbf{c}"'] & (y\otimes z)\otimes x \arrow[ur, "\mathbf{a}"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & x\otimes(z\otimes y) \arrow[r, "\mathbf{a}^{-1}"] & (x\otimes z)\otimes y \arrow[dr, "\mathbf{c}\otimes 0"] & \\
x\otimes(y\otimes z) \arrow[ur, "0\otimes\mathbf{c}"] \arrow[dr, "\mathbf{a}^{-1}"'] & & & (z\otimes x)\otimes y \\
 & (x\otimes y)\otimes z \arrow[r, "\mathbf{c}"'] & z\otimes(x\otimes y) \arrow[ur, "\mathbf{a}^{-1}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Cohomología commutativa de monoides commutativos

$(h, \mu) \in Z^3_{\mathrm{C}}(M, \mathcal{A})$ es par de funciones función
$\left(h : M^3 \to \bigsqcup_{a \in M} \mathcal{A}_a,\ \mu : M^2 \to \bigsqcup_{a \in M} \mathcal{A}_a\right)$ con
$h(a, b, c) \in \mathcal{A}_{abc}$, $\mu(a, b) \in \mathcal{A}_{ab}$, normalizadas y

Cohomología commutativa de monoides commutativos

$(h,\mu) \in Z^3_{\mathrm{C}}(M,\mathcal{A})$ es par de funciones función $\big(h : M^3 \to \bigsqcup_{a\in M} \mathcal{A}_a,\ \mu : M^2 \to \bigsqcup_{a\in M} \mathcal{A}_a\big)$ con $h(a,b,c) \in \mathcal{A}_{abc}$, $\mu(a,b) \in \mathcal{A}_{ab}$, normalizadas y

$$a_* h(b,c,d) + h(a,bc,d) + d_* h(a,b,c) = h(ab,c,d) + h(a,b,cd)$$

$$h(b,c,a) + \mu(a,bc) + h(a,b,c) = b_*\mu(a,c) + h(b,a,c) + c_*\mu(a,b)$$

$$-h(c,a,b) + \mu(ab,c) - h(a,b,c) = b_*\mu(a,c) - h(a,c,b) + a_*\mu(b,c)$$

Cohomología commutativa de monoides commutativos

$(h,\mu) \in Z^3_{\mathrm{C}}(M,\mathcal{A})$ es par de funciones función $\left(h : M^3 \to \bigsqcup_{a\in M}\mathcal{A}_a,\ \mu : M^2 \to \bigsqcup_{a\in M}\mathcal{A}_a\right)$ con $h(a,b,c)\in\mathcal{A}_{abc}$, $\mu(a,b)\in\mathcal{A}_{ab}$, normalizadas y

$$a_* h(b,c,d) + h(a,bc,d) + d_* h(a,b,c) = h(ab,c,d) + h(a,b,cd)$$

$$h(b,c,a) + \mu(a,bc) + h(a,b,c) = b_*\mu(a,c) + h(b,a,c) + c_*\mu(a,b)$$

$$-h(c,a,b) + \mu(ab,c) - h(a,b,c) = b_*\mu(a,c) - h(a,c,b) + a_*\mu(b,c)$$

(M.C-C,A.M.Cegarra, B.A.Heredia 2013)

Grupoides monoidales abelianos $\longrightarrow$ $(M,\mathcal{A},k)$ con $k \in H^3_{\mathrm{L}}(M,\mathcal{A})$

(Sihn 1975)

Grupos categóricos $\longrightarrow$ (G,A,k) $k \in H^3_{\mathrm{EM}}(G,A)$.

(M.C-C,A.M.Cegarra, B.A.Heredia 2013)

Grupoides monoidales abelianos $\longrightarrow$ $(M,\mathcal{A},k)$ con $k \in H^3_{\mathrm{L}}(M,\mathcal{A})$

(Sihn 1975)

Grupos categóricos $\longrightarrow$ (G,A,k) $k \in H^3_{\mathrm{EM}}(G,A)$.

(M.C-C,A.M.Cegarra, B.A.Heredia 2013)

Grupoides monoidales abelianos $\longrightarrow$ $(M,\mathcal{A},k)$ con $k \in H^3_{\mathrm{L}}(M,\mathcal{A})$

(M. C-C, A.M. Cegarra, B.A.Heredia 2014)

Grupoides monoidales abelianos estrictamente commutativos $\longrightarrow$ $(M,\mathcal{A},k)$ con $k \in H^3_{\mathrm{G}}(M,\mathcal{A})$

(Sihn 1975)

Grupos categóricos $\longrightarrow$ (G,A,k) $k \in H^3_{\mathrm{EM}}(G,A)$.

(Deligne 1973)

Grupos categóricos estrictamente commutativos $\longrightarrow$ (G,A)

(M.C-C,A.M.Cegarra, B.A.Heredia 2013)

Grupoides monoidales abelianos $\longrightarrow$ $(M,\mathcal{A},k)$ con $k \in H^3_{\mathrm{L}}(M,\mathcal{A})$

(M. C-C, A.M. Cegarra, B.A.Heredia 2014)

Grupoides monoidales abelianos estrictamente commutativos $\longrightarrow$ $(M,\mathcal{A},k)$ con $k \in H^3_{\mathrm{G}}(M,\mathcal{A})$

(Sihn 1975)

Grupos categóricos $\longrightarrow$ (G,A,k) $k \in H^3_{\mathrm{EM}}(G,A)$.

(Deligne 1973)

Grupos categóricos estrictamente commutativos $\longrightarrow$ (G,A)

(M.C-C,A.M.Cegarra, B.A.Heredia 2013)

Grupoides monoidales abelianos $\longrightarrow$ $(M,\mathcal{A},k)$ con $k \in H^3_{\mathrm{L}}(M,\mathcal{A})$

(M. C-C, A.M. Cegarra, B.A.Heredia 2014)

Grupoides monoidales abelianos estrictamente commutativos $\longrightarrow$ $(M,\mathcal{A},k)$ con $k \in H^3_{\mathrm{G}}(M,\mathcal{A})$

(M.C-C, A.M.Cegarra 2014)

Grupoides monoidales trenzados abelianos $\longrightarrow$ $(M,\mathcal{A},k)$, con $k \in H^3_{\mathrm{C}}(M,\mathcal{A})$

(Sihn 1975)

Grupos categóricos $\longrightarrow$ (G,A,k) $k \in H^3_{\mathrm{EM}}(G,A)$.

(M.C-C,A.M.Cegarra, B.A.Heredia 2013)

Grupoides monoidales abelianos $\longrightarrow$ $(M,\mathcal{A},k)$ con $k \in H^3_{\mathrm{L}}(M,\mathcal{A})$

(Deligne 1973)

Grupos categóricos estrictamente commutativos $\longrightarrow$ (G,A)

(M. C-C, A.M. Cegarra, B.A.Heredia 2014)

Grupoides monoidales abelianos estrictamente commutativos $\longrightarrow$ $(M,\mathcal{A},k)$ con $k \in H^3_{\mathrm{G}}(M,\mathcal{A})$

(Joyal, Street 1991)

Grupos categóricos trenzados $\longrightarrow$ (G,A,k) con $k \in H^3_{ab}(G,A)$.

(M.C-C, A.M.Cegarra 2014)

Grupoides monoidales trenzados abelianos $\longrightarrow$ $(M,\mathcal{A},k)$, con $k \in H^3_{\mathrm{C}}(M,\mathcal{A})$