Grupos simétricos categóricos

Josep Elgueta
Universitat Politècnica de Catalunya

Métodos categóricos y homotópicos en
Álgebra, Geometría y Topología

Granada, 2014

Introducción

Definición.

Un **grupo simétrico** es el grupo de automorfismos de algún objeto X de la categoría $\mathcal{S}et$:

$$\mathsf{S}_X = (Aut_{\mathcal{S}et}(X), \circ, id_X)$$

Introducción

Definición.

Un **grupo simétrico** es el grupo de automorfismos de algún objeto X de la categoría $\mathcal{S}et$:

$$\mathsf{S}_X = (Aut_{\mathcal{S}et}(X), \circ, id_X)$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Cat} \\
\mathcal{S}et \arrow[ur, rightsquigarrow] \arrow[dr, rightsquigarrow] & \\
 & \mathbf{Gpd}
\end{tikzcd}$$

Definición.

Un **grupo simétrico categórico**, o **2-grupo de permutaciones**, es el *2-grupo* de las autoequivalencias de algún objeto $\mathcal{G}$ de la 2-categoría **Gpd**:

$$\mathbb{S}_{\mathcal{G}} = (\mathcal{E}qu_{\mathbf{Gpd}}(\mathcal{G}), \circ, id_{\mathcal{G}}).$$

Definición.

Un **grupo simétrico categórico**, o **2-grupo de permutaciones**, es el *2-grupo* de las autoequivalencias de algún objeto $\mathcal{G}$ de la 2-categoría **Gpd**:

$$\mathbb{S}_{\mathcal{G}} = (\mathcal{E}qu_{\mathbf{Gpd}}(\mathcal{G}), \circ, id_{\mathcal{G}}).$$

Ejemplos.

- $\mathcal{G} = \underline{X}$, grupoide discreto definido por un conjunto X.

$$\mathbb{S}_{\underline{X}} = \mathsf{S}_X$$

Definición.

Un **grupo simétrico categórico**, o **2-grupo de permutaciones**, es el *2-grupo* de las autoequivalencias de algún objeto $\mathcal{G}$ de la 2-categoría **Gpd**:

$$\mathbb{S}_{\mathcal{G}} = (\mathcal{E}qu_{\mathbf{Gpd}}(\mathcal{G}), \circ, id_{\mathcal{G}}).$$

Ejemplos.

- $\mathcal{G} = \underline{X}$, grupoide discreto definido por un conjunto X.

$$\mathbb{S}_{\underline{X}} = \mathsf{S}_X$$

- $\mathcal{G} = \widehat{\mathcal{F}in\mathcal{S}et}$, grupoide de los conjuntos finitos y las *biyecciones* entre ellos.

Definición.

Un **grupo simétrico categórico**, o **2-grupo de permutaciones**, es el *2-grupo* de las autoequivalencias de algún objeto $\mathcal{G}$ de la 2-categoría **Gpd**:

$$\mathbb{S}_{\mathcal{G}} = (\mathcal{E}qu_{\mathbf{Gpd}}(\mathcal{G}), \circ, id_{\mathcal{G}}).$$

Ejemplos.

- $\mathcal{G} = \underline{X}$, grupoide discreto definido por un conjunto X.

$$\mathbb{S}_{\underline{X}} \;=\; \mathsf{S}_X$$

- $\mathcal{G} = \widehat{\mathcal{F}in\mathcal{S}et}$, grupoide de los conjuntos finitos y las *biyecciones* entre ellos.

$$\mathbb{S}_{\widehat{\mathcal{F}in\mathcal{S}et}} \;\simeq\; \mathbb{Z}_2[1] \times \mathbb{Z}_2[0]$$

Objetivo.

Determinar los *invariantes homotópicos* de $\mathbb{S}_{\mathcal{G}}$ para un grupoide $\mathcal{G}$ cualquiera.

Plan de la charla

2-grupos

2-grupos

Definición.

Un **2-grupo** $\mathbb{G}$ es un *grupoide* $\mathcal{G}$ junto con

- un functor $\otimes : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$,
- un objeto distinguido e,
- isomorfismos naturales

$$a_{x,y,z} : x \otimes (y \otimes z) \overset{\cong}{\to} (x \otimes y) \otimes z$$
$$l_x : e \otimes x \overset{\cong}{\to} x$$
$$r_x : x \otimes e \overset{\cong}{\to} x$$

tal que cada objeto x tiene un inverso x^* (en general débil):

$$x \otimes x^* \cong e \cong x^* \otimes x.$$

2-grupos

Definición.

Un **2-grupo** $\mathbb{G}$ es un *grupoide* $\mathcal{G}$ junto con

- un functor $\otimes : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$,
- un objeto distinguido e,
- isomorfismos naturales

$$a_{x,y,z} : x \otimes (y \otimes z) \xrightarrow{\cong} (x \otimes y) \otimes z$$
$$l_x : e \otimes x \xrightarrow{\cong} x$$
$$r_x : x \otimes e \xrightarrow{\cong} x$$

tal que cada objeto x tiene un inverso x^* (en general débil):

$$x \otimes x^* \cong e \cong x^* \otimes x.$$

Si a, l, r son identidades y los inversos son estrictos se habla de **2-grupo estricto**.

Un ejemplo genérico.

Si **C** es una 2-categoría (no estricta en general) y $X \in \mathbf{C}$, el 2-grupo

$$\mathbb{E}qu_{\mathbf{C}}(X) = (\mathcal{E}qu_{\mathbf{C}}(X), \circ, id_X, a, l, r)$$

Un ejemplo genérico.

Si **C** es una 2-categoría (no estricta en general) y $X \in \mathbf{C}$, el 2-grupo

$$\mathbb{E}qu_{\mathbf{C}}(X) = (\mathcal{E}qu_{\mathbf{C}}(X), \circ, id_X, a, l, r)$$

Tipos particulares de 2-grupos.

- **2-grupo discretos** G[0] (G grupo):
  - objetos: elementos de G
  - morfismos: las identidades
  - producto tensorial: $g_1 \otimes g_2 := g_1 g_2$
  - objeto unidad: $1 \in$ G

Un ejemplo genérico.

Si **C** es una 2-categoría (no estricta en general) y $X \in \mathbf{C}$, el 2-grupo

$$\mathbb{E}qu_{\mathbf{C}}(X) = (\mathcal{E}qu_{\mathbf{C}}(X), \circ, id_X, a, l, r)$$

Tipos particulares de 2-grupos.

- **2-grupo discretos** G[0] (G grupo):
    - objetos: elementos de G
    - morfismos: las identidades
    - producto tensorial: $g_1 \otimes g_2 := g_1 g_2$
    - objeto unidad: $1 \in \mathrm{G}$
- **2-grupos de un solo objeto** A[1] (A grupo *abeliano*):
    - morfismos: elementos de A
    - composición: $a_1 \circ a_2 := a_1 + a_2$
    - producto tensorial: $a_1 \otimes a_2 := a_1 + a_2$
    - objeto unidad: $0 \in \mathrm{A}$

- **2-grupos elementales** $A[1] \rtimes G[0]$ (G grupo, A G-módulo):
  - objetos: elementos de G
  - morfismos: elementos de $A \times G$, siendo $(a, g) : g \to g$
  - composición: $(a', g) \circ (a, g) := (a' + a, g)$
  - producto tensorial: $g_1 \otimes g_2 := g_1 g_2$
    $(a_1, g_1) \otimes (a_2, g_2) := (a_1 + g_1 \cdot a_2, g_1 g_2)$
  - objeto unidad: $1 \in G$

- **2-grupos elementales** $\mathrm{A}[1] \rtimes \mathrm{G}[0]$ (G grupo, A G-módulo):
  - objetos: elementos de G
  - morfismos: elementos de $A \times G$, siendo $(a, g) : g \to g$
  - composición: $(a', g) \circ (a, g) := (a' + a, g)$
  - producto tensorial: $g_1 \otimes g_2 := g_1 g_2$
    $(a_1, g_1) \otimes (a_2, g_2) := (a_1 + g_1 \cdot a_2, g_1 g_2)$
  - objeto unidad: $1 \in \mathrm{G}$

- **2-grupos especiales** $\mathrm{A}[1] \rtimes_z \mathrm{G}[0]$ (G grupo, A G-módulo, $z \in \mathrm{Z}^3_n(\mathrm{G}, \mathrm{A})$): igual que $\mathrm{A}[1] \rtimes \mathrm{G}[0]$ pero con asociador
$$a_{g_1, g_2, g_3} := (z(g_1, g_2, g_3), g_1 g_2 g_3).$$

Carácter homogéneo de los 2-grupos.

Dado cualquier 2-grupo $\mathbb{G}$ y cualquier objeto $x \in \mathcal{G}$, existen isomorfismos canónicos

$$\gamma_x, \delta_x : \mathrm{Aut}_{\mathcal{G}}(e) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Aut}_{\mathcal{G}}(x)$$

Carácter homogéneo de los 2-grupos.

Dado cualquier 2-grupo $\mathbb{G}$ y cualquier objeto $x \in \mathcal{G}$, existen isomorfismos canónicos

$$\gamma_x, \delta_x : \mathrm{Aut}_{\mathcal{G}}(e) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Aut}_{\mathcal{G}}(x)$$

Consecuencia. El grupoide subyacente de un 2-grupo cualquiera es de la forma

$$\mathcal{G} \simeq \coprod_{x \in \mathcal{R}} \mathcal{B}\mathrm{Aut}_{\mathcal{G}}(e).$$

donde $\mathcal{R}$ es un conjunto cualquiera de representantes de las clases isomorfía de objetos de $\mathcal{G}$.

Los 2-grupos constituyen una 2-categoría **2Grp**.

Los 2-grupos constituyen una 2-categoría **2Grp**.

Definición.

Dados $\mathbb{G}, \mathbb{G}'$ 2-grupos, un **morfismo** de $\mathbb{G}$ a $\mathbb{G}'$ es un functor monoidal $\mathbb{F} = (\mathcal{F}, \mu) : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$

- functor $\mathcal{F} : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$
- isomorfismos naturales $\mu_{x,y} : \mathcal{F}(x \otimes y) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}x \otimes' \mathcal{F}y$.

Teorema (Sihn, 1975).

Existe biyección canónica

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Clases de} \\ \text{equivalencia} \\ \text{de 2-grupos} \end{array} \right\} \rightleftarrows \left\{ \begin{array}{l} \text{Clases isomorfía ternas} \\ (G, A, \alpha) \text{ tales que} \\ \quad \bullet\ G \text{ un grupo} \\ \quad \bullet\ A \text{ un } G\text{-módulo} \\ \quad \bullet\ \alpha \in H^3(G, A) \end{array} \right\}$$

Teorema (Sihn, 1975).

Existe biyección canónica

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Clases de} \\ \text{equivalencia} \\ \text{de 2-grupos} \end{array} \right\} \underset{\text{2-gr. esp.}}{\overset{\longrightarrow}{\longleftarrow}} \left\{ \begin{array}{l} \text{Clases isomorfía ternas} \\ (\mathrm{G}, \mathrm{A}, \alpha) \text{ tales que} \\ \quad \bullet\ \mathrm{G} \text{ un grupo} \\ \quad \bullet\ \mathrm{A} \text{ un G-módulo} \\ \quad \bullet\ \alpha \in \mathrm{H}^3(\mathrm{G}, \mathrm{A}) \end{array} \right\}$$

Prueba.

- Dada $[(\mathrm{G}, \mathrm{A}, \alpha)]$, se aplica a la clase del 2-grupo especial $\mathrm{A}[1] \rtimes_z \mathrm{G}[0]$ para cualquier 3-cociclo normalizado $z \in \alpha$.

Teorema (Sihn, 1975).

Existe biyección canónica

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Clases de} \\ \text{equivalencia} \\ \text{de 2-grupos} \end{array} \right\} \underset{\text{2-gr. esp.}}{\overset{\text{inv. hom.}}{\rightleftarrows}} \left\{ \begin{array}{l} \text{Clases isomorfía ternas} \\ (\mathsf{G}, \mathsf{A}, \alpha) \text{ tales que} \\ \quad \bullet\ \mathsf{G} \text{ un grupo} \\ \quad \bullet\ \mathsf{A} \text{ un } \mathsf{G}\text{-módulo} \\ \quad \bullet\ \alpha \in \mathsf{H}^3(\mathsf{G}, \mathsf{A}) \end{array} \right\}$$

Prueba.

- Dada $[(\mathsf{G}, \mathsf{A}, \alpha)]$, se aplica a la clase del 2-grupo especial $\mathsf{A}[1] \rtimes_z \mathsf{G}[0]$ para cualquier 3-cociclo normalizado $z \in \alpha$.
- Dado $\mathbb{G}$, se aplica a la clase de $(\pi_0(\mathbb{G}), \pi_1(\mathbb{G}), \alpha(\mathbb{G}))$, donde

- $\pi_0(\mathbb{G})$ (**primer grupo de homotopía**): grupo de las clases de isomorfía de los objetos de $\mathcal{G}$ con el producto

$$[x][y] := [x \otimes y]$$

- $\pi_0(\mathbb{G})$ (**primer grupo de homotopía**): grupo de las clases de isomorfía de los objetos de $\mathcal{G}$ con el producto

$$[x][y] := [x \otimes y]$$

- $\pi_1(\mathbb{G})$ (**segundo grupo de homotopía**): grupo *abeliano* de los automorfismos del objeto unidad con la $\pi_0(\mathbb{G})$-acción

$$[x] \triangleleft u := \gamma_x^{-1}(\delta_x(u)) \sim id_x \otimes u \otimes id_{x^*}$$

- $\pi_0(\mathbb{G})$ (**primer grupo de homotopía**): grupo de las clases de isomorfía de los objetos de $\mathcal{G}$ con el producto

$$[x][y] := [x \otimes y]$$

- $\pi_1(\mathbb{G})$ (**segundo grupo de homotopía**): grupo *abeliano* de los automorfismos del objeto unidad con la $\pi_0(\mathbb{G})$-acción

$$[x] \triangleleft u := \gamma_x^{-1}(\delta_x(u)) \sim id_x \otimes u \otimes id_{x^*}$$

- $\alpha(\mathbb{G})$ (**invariante de Postnikov**): clase de cohomología $[z] \in \mathrm{H}^3(\pi_0(\mathbb{G}), \pi_1(\mathbb{G}))$ definida por

$$z([x],[y],[z]) \sim \gamma_{x\otimes(y\otimes z)}^{-1}(a_{x,y,z})$$

□

Corolario.

Dado cualquier 2-grupo $\mathbb{G}$ se cumple

$$\mathbb{G} \simeq \pi_1(\mathbb{G})[1] \rtimes_z \pi_0(\mathbb{G})[0]$$

donde z es un 3-cociclo normalizado cualquiera de $\alpha(\mathbb{G})$. Al 2-grupo de la derecha le llamaremos **modelo minimal** de $\mathbb{G}$.

Corolario.

Dado cualquier 2-grupo $\mathbb{G}$ se cumple

$$\mathbb{G} \simeq \pi_1(\mathbb{G})[1] \rtimes_z \pi_0(\mathbb{G})[0]$$

donde z es un 3-cociclo normalizado cualquiera de $\alpha(\mathbb{G})$. Al 2-grupo de la derecha le llamaremos **modelo minimal** de $\mathbb{G}$.

Ejemplo.

Sea k cuerpo alg. cerrado, $\mathbf{Cat}_k$ la 2-categoría de las categorías k-lineales, G grupo finito y $\mathcal{V}ect_k[\mathrm{G}]$ el "2-espacio vectorial engendrado por G", i.e. la compleción aditiva de la categoría k-lineal generada por el grupoide $\mathcal{B}\mathrm{G}$.

Corolario.

Dado cualquier 2-grupo $\mathbb{G}$ se cumple

$$\mathbb{G} \simeq \pi_1(\mathbb{G})[1] \rtimes_z \pi_0(\mathbb{G})[0]$$

donde z es un 3-cociclo normalizado cualquiera de $\alpha(\mathbb{G})$. Al 2-grupo de la derecha le llamaremos **modelo minimal** de $\mathbb{G}$.

Ejemplo.

Sea k cuerpo alg. cerrado, $\mathbf{Cat}_k$ la 2-categoría de las categorías k-lineales, G grupo finito y $\mathcal{V}ect_k[\mathrm{G}]$ el "2-espacio vectorial engendrado por G", i.e. la compleción aditiva de la categoría k-lineal generada por el grupoide $\mathcal{B}\mathrm{G}$.

$$\mathbb{E}qu_{\mathbf{Cat}_k}(\mathcal{V}ect_k[\mathrm{G}]) \ \simeq \ (k^*)^r[1] \rtimes (\mathrm{S}_{r_1} \times \cdots \times \mathrm{S}_{r_s})[0]$$

Corolario.

Dado cualquier 2-grupo $\mathbb{G}$ se cumple

$$\mathbb{G} \simeq \pi_1(\mathbb{G})[1] \rtimes_z \pi_0(\mathbb{G})[0]$$

donde z es un 3-cociclo normalizado cualquiera de $\alpha(\mathbb{G})$. Al 2-grupo de la derecha le llamaremos **modelo minimal** de $\mathbb{G}$.

Ejemplo.

Sea k cuerpo alg. cerrado, $\mathbf{Cat}_k$ la 2-categoría de las categorías k-lineales, G grupo finito y $\mathcal{V}ect_k[\mathrm{G}]$ el "2-espacio vectorial engendrado por G", i.e. la compleción aditiva de la categoría k-lineal generada por el grupoide $\mathcal{B}\mathrm{G}$.

$$\mathbb{E}qu_{\mathbf{Cat}_k}(\mathcal{V}ect_k[\mathrm{G}]) \;\simeq\; (k^*)^r[1] \rtimes (\mathrm{S}_{r_1} \times \cdots \times \mathrm{S}_{r_s})[0]$$

Si $\mathrm{G} = 1$, $\mathcal{V}ect_k[1] \simeq \mathcal{V}ect_k$ y $\mathbb{E}qu_{\mathbf{Cat}_k}(\mathcal{V}ect_k) \simeq (k^*)[1]$.

Definición.

Un 2-grupo $\mathbb{G}$ es **escindido** si $\alpha(\mathbb{G}) = 0$. Equivalentemente, si

$$\mathbb{G} \simeq \pi_1(\mathbb{G})[1] \rtimes \pi_0(\mathbb{G})[0].$$

Definición.

Un 2-grupo $\mathbb{G}$ es **escindido** si $\alpha(\mathbb{G}) = 0$. Equivalentement, si

$$\mathbb{G} \simeq \pi_1(\mathbb{G})[1] \rtimes \pi_0(\mathbb{G})[0].$$

Observación. Un 2-grupo estricto $\mathbb{G}$ es escindido si existe sección $s : \pi_0(\mathbb{G}) \to G_0$ que es morfismo de grupos.

Definición.

Un 2-grupo $\mathbb{G}$ es **escindido** si $\alpha(\mathbb{G}) = 0$. Equivalentement, si

$$\mathbb{G} \simeq \pi_1(\mathbb{G})[1] \rtimes \pi_0(\mathbb{G})[0].$$

Observación. Un 2-grupo estricto $\mathbb{G}$ es escindido si existe sección $s : \pi_0(\mathbb{G}) \to G_0$ que es morfismo de grupos.

Ejemplo.

Si D_5 es el grupo dihedral de orden 10, $\mathbb{S}_{\mathcal{B}D_5}$ es escindido pero no cumple la condición anterior.

Producto semidirecto de 2-grupos

Producto semidirecto de 2-grupos

Definición.

Dados $\mathbb{G}$ y $\mathbb{H}$ 2-grupos cualesquiera, una **acción** (por la izquierda) de $\mathbb{G}$ sobre $\mathbb{H}$ es un morfismo de 2-grupos

$$\mathbb{F} = (\mathcal{F}, \mu) : \mathbb{G} \to \mathbb{E}qu_{\mathbf{2Grp}}(\mathbb{H}).$$

Producto semidirecto de 2-grupos

Definición.

Dados $\mathbb{G}$ y $\mathbb{H}$ 2-grupos cualesquiera, una **acción** (por la izquierda) de $\mathbb{G}$ sobre $\mathbb{H}$ es un morfismo de 2-grupos

$$\mathbb{F} = (\mathcal{F}, \mu) : \mathbb{G} \to \mathbb{E}qu_{\mathbf{2Grp}}(\mathbb{H}).$$

La acción es:

- **estricta** si $\mathbb{F}$ es estricto,

Producto semidirecto de 2-grupos

Definición.

Dados $\mathbb{G}$ y $\mathbb{H}$ 2-grupos cualesquiera, una **acción** (por la izquierda) de $\mathbb{G}$ sobre $\mathbb{H}$ es un morfismo de 2-grupos

$$\mathbb{F} = (\mathcal{F}, \mu) : \mathbb{G} \to \mathbb{E}qu_{\mathbf{2Grp}}(\mathbb{H}).$$

La acción es:

- **estricta** si $\mathbb{F}$ es estricto,
- **fuertemente estricta** si es estricta y para todo $x \in \mathcal{G}$ la autoequivalencia $\mathcal{F}(x)$ de $\mathbb{H}$ es morfismo estricto.

Ejemplo-Definición.

Dados 2-grupo $\mathbb{G}$ y $n \geq 1$, existe acción (por la izquierda) fuertemente estricta (**acción wreath**) de $\mathsf{S}_n[0]$ sobre $\mathbb{G}$

$$\mathbb{W} = (\mathcal{W}, 1) : \mathsf{S}_n[0] \to \mathbb{E}qu_{\mathbf{2Grp}}(\mathbb{G}^n)$$

que envia la permutación σ a la autoequivalencia estricta $\mathbb{P}_\sigma = (\mathcal{P}_\sigma, 1) : \mathbb{G}^n \to \mathbb{G}^n$ definida por

- sobre objetos: $\mathcal{P}_\sigma(x_1, \ldots, x_n) := (x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)}) \equiv \sigma \triangleleft \mathbf{x}$
- sobre morfismos: $\mathcal{P}_\sigma(f_1, \ldots, f_n) := (f_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, f_{\sigma^{-1}(n)}) \equiv \sigma \triangleleft \mathbf{f}$

Definición.

Dada acción por la derecha $\triangleright\colon \mathbb{G}^{op} \to \mathbb{E}qu_{\mathbf{2Grp}}(\mathbb{H})$, el **producto semidirecto** $\mathbb{G} \ltimes \mathbb{H}$ es el grupoide $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ equipado con

- producto tensorial:
  - $(g,h) \otimes (g',h') := (g \otimes g', (h \triangleright g') \otimes h')$
  - $(\psi,\phi) \otimes (\psi',\phi') := (\psi \otimes \psi', ((\phi \triangleright \psi') \otimes \phi')$
- objeto unidad: (e,e)
- isomorfismos de asociatividad y de unidad:
  - $a_{(g,h),(g',h'),(g'',h'')} := (a_{g,g',g''}, \tilde{a}_{g',g'';h,h',h''})$
  - $l_{(g,h)} := (l_g, \tilde{l}_{g;h})$
  - $r_{(g,h)} := (r_g, \tilde{r}_h)$

Definición.

Dada acción por la derecha $\triangleright\colon \mathbb{G}^{op} \to \mathbb{E}qu_{\mathbf{2Grp}}(\mathbb{H})$, el **producto semidirecto** $\mathbb{G} \ltimes \mathbb{H}$ es el grupoide $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ equipado con

- producto tensorial:
  - $(g, h) \otimes (g', h') := (g \otimes g', (h \triangleright g') \otimes h')$
  - $(\psi, \phi) \otimes (\psi', \phi') := (\psi \otimes \psi', ((\phi \triangleright \psi') \otimes \phi')$
- objeto unidad: (e, e)
- isomorfismos de asociatividad y de unidad:
  - $a_{(g,h),(g',h'),(g'',h'')} := (a_{g,g',g''}, \tilde{a}_{g',g'';h,h',h''})$
  - $l_{(g,h)} := (l_g, \tilde{l}_{g;h})$
  - $r_{(g,h)} := (r_g, \tilde{r}_h)$

Observación. A menos que la acción sea fuertemente estricta, $\mathbb{H} \ltimes \mathbb{G}$ puede no ser estricto aunque lo sean $\mathbb{G}$ y $\mathbb{H}$.

Definición.

Dada acción por la derecha $\triangleright : \mathbb{G}^{op} \to \mathbb{E}qu_{\mathbf{2Grp}}(\mathbb{H})$, el **producto semidirecto** $\mathbb{G} \ltimes \mathbb{H}$ es el grupoide $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ equipado con

- producto tensorial:
  - $(g, h) \otimes (g', h') := (g \otimes g', (h \triangleright g') \otimes h')$
  - $(\psi, \phi) \otimes (\psi', \phi') := (\psi \otimes \psi', ((\phi \triangleright \psi') \otimes \phi')$
- objeto unidad: (e, e)
- isomorfismos de asociatividad y de unidad:
  - $a_{(g,h),(g',h'),(g'',h'')} := (a_{g,g',g''}, \tilde{a}_{g',g'';h,h',h''})$
  - $l_{(g,h)} := (l_g, \tilde{l}_{g;h})$
  - $r_{(g,h)} := (r_g, \tilde{r}_h)$

Observación. A menos que la acción sea fuertemente estricta, $\mathbb{H} \ltimes \mathbb{G}$ puede no ser estricto aunque lo sean $\mathbb{G}$ y $\mathbb{H}$.

Ejemplo-Definición.

Dados 2-grupo $\mathbb{G}$ y $n \geq 1$, el **producto wreath** $\mathsf{S}_n[0] \wr\wr \mathbb{G}$ es el producto semidirecto

$$\mathsf{S}_n[0] \wr\wr \mathbb{G} := \mathsf{S}_n[0] \ltimes \mathbb{G}$$

definido por la acción *wreath* de $\mathsf{S}_n[0]$ sobre $\mathbb{G}$.

Ejemplo-Definición.

Dados 2-grupo $\mathbb{G}$ y $n \geq 1$, el **producto wreath** $\mathsf{S}_n[0] \wr\wr \mathbb{G}$ es el producto semidirecto

$$\mathsf{S}_n[0] \wr\wr \mathbb{G} := \mathsf{S}_n[0] \ltimes \mathbb{G}$$

definido por la acción *wreath* de $\mathsf{S}_n[0]$ sobre $\mathbb{G}$.

Observación. Si $\mathbb{G}$ es estricto, $\mathsf{S}_n[0] \wr\wr \mathbb{G}$ es estricto.

2-grupos de permutaciones

Objetivo. Dado grupoide $\mathcal{G}$, encontrar modelo minimal de $\mathbb{S}_{\mathcal{G}}$.

2-grupos de permutaciones

Objetivo. Dado grupoide $\mathcal{G}$, encontrar modelo minimal de $\mathbb{S}_{\mathcal{G}}$.

Definición.

Un grupoide $\mathcal{G}$ es de **tipo finito** si para cada grupo G el grupoide $\mathcal{G}$ tiene un número finito de clases de isomorfía de objetos con grupo de automorfismos (isomorfo a) G.

2-grupos de permutaciones

Objetivo. Dado grupoide $\mathcal{G}$, encontrar modelo minimal de $\mathbb{S}_{\mathcal{G}}$.

Definición.

Un grupoide $\mathcal{G}$ es de **tipo finito** si para cada grupo G el grupoide $\mathcal{G}$ tiene un número finito de clases de isomorfía de objetos con grupo de automorfismos (isomorfo a) G.

Salvo equivalencias, un grupoide de tipo finito queda determinado por la familia de pares $\{(n_i, \mathrm{G}_i)\}_{i\in I}$ con $n_i \geq 1$ el número de clases de isomorfía de objetos con grupo de automorfismos G_i.

2-grupos de permutaciones

Objetivo. Dado grupoide $\mathcal{G}$, encontrar modelo minimal de $\mathbb{S}_{\mathcal{G}}$.

Definición.

Un grupoide $\mathcal{G}$ es de **tipo finito** si para cada grupo G el grupoide $\mathcal{G}$ tiene un número finito de clases de isomorfía de objetos con grupo de automorfismos (isomorfo a) G.

Salvo equivalencias, un grupoide de tipo finito queda determinado por la familia de pares $\{(n_i, \mathsf{G}_i)\}_{i\in I}$ con $n_i \geq 1$ el número de clases de isomorfía de objetos con grupo de automorfismos G_i.

$$\mathcal{G} \simeq \coprod_{i\in I}\left(\coprod^{n_i} \mathcal{B}\mathsf{G}_i\right)$$

Ejemplos.

- Si X conjunto finito, $\underline{X}$ es de tipo finito.

Ejemplos.

- Si X conjunto finito, $\underline{X}$ es de tipo finito.
- Si G grupo, $\mathcal{B}$G es de tipo finito.

Ejemplos.

- Si X conjunto finito, $\underline{X}$ es de tipo finito.
- Si G grupo, $\mathcal{B}$G es de tipo finito.
- $\widehat{\mathcal{F}in\mathcal{S}et}$ es de tipo finito.

Ejemplos.

- Si X conjunto finito, $\underline{X}$ es de tipo finito.
- Si G grupo, $\mathcal{B}$G es de tipo finito.
- $\widehat{\mathcal{F}in\mathcal{S}et}$ es de tipo finito.
- Si X espacio topológico con número finito de componentes arco-conexas, $\Pi_1(X)$ es de tipo finito.

Notación. Dada familia $\{(n_i, \mathsf{G}_i)\}_{i\in I}$ con $n_i \geq 1$ y G_i grupo

$$\mathbb{S}_{\{(n_i,\mathsf{G}_i)\}_{i\in I}} := \mathbb{E}qu_{\mathbf{Gpd}}\left(\coprod_{i\in I}\left(\coprod^{n_i}\mathcal{B}\mathsf{G}_i\right)\right)$$

Notación. Dada familia $\{(n_i, \mathsf{G}_i)\}_{i\in I}$ con $n_i \geq 1$ y G_i grupo

$$\mathbb{S}_{\{(n_i,\mathsf{G}_i)\}_{i\in I}} := \mathbb{E}qu_{\mathbf{Gpd}}\left(\coprod_{i\in I}\left(\coprod^{n_i}\mathcal{B}\mathsf{G}_i\right)\right)$$

- Si $|I| = 1$ escribiremos $\mathbb{S}_{n,\mathsf{G}}$.

Notación. Dada familia $\{(n_i, \mathsf{G}_i)\}_{i\in I}$ con $n_i \geq 1$ y G_i grupo

$$\mathbb{S}_{\{(n_i,\mathsf{G}_i)\}_{i\in I}} := \mathbb{E}qu_{\mathbf{Gpd}}\left(\coprod_{i\in I}\left(\coprod^{n_i}\mathcal{B}\mathsf{G}_i\right)\right)$$

- Si $|I| = 1$ escribiremos $\mathbb{S}_{n,\mathsf{G}}$.
- Si $|I| = 1$ y $n = 1$ escribiremos $\mathbb{S}_{\mathsf{G}}$.

Notación. Dada familia $\{(n_i, \mathsf{G}_i)\}_{i\in I}$ con $n_i \geq 1$ y G_i grupo

$$\mathbb{S}_{\{(n_i,\mathsf{G}_i)\}_{i\in I}} := \mathbb{E}qu_{\mathbf{Gpd}}\left(\coprod_{i\in I}\left(\coprod^{n_i}\mathcal{B}\mathsf{G}_i\right)\right)$$

- Si $|I| = 1$ escribiremos $\mathbb{S}_{n,\mathsf{G}}$.
- Si $|I| = 1$ y $n = 1$ escribiremos $\mathbb{S}_{\mathsf{G}}$.
- Si $|I| = 1$ y $\mathsf{G} = 1$ escribiremos $\mathbb{S}_n$.

Notación. Dada familia $\{(n_i, \mathsf{G}_i)\}_{i\in I}$ con $n_i \geq 1$ y G_i grupo

$$\mathbb{S}_{\{(n_i,\mathsf{G}_i)\}_{i\in I}} := \mathbb{E}qu_{\mathbf{Gpd}}\left(\coprod_{i\in I}\left(\coprod^{n_i}\mathcal{B}\mathsf{G}_i\right)\right)$$

- Si $|I| = 1$ escribiremos $\mathbb{S}_{n,\mathsf{G}}$.
- Si $|I| = 1$ y $n = 1$ escribiremos $\mathbb{S}_{\mathsf{G}}$.
- Si $|I| = 1$ y $\mathsf{G} = 1$ escribiremos $\mathbb{S}_n$.

Observar que:

- $\mathbb{S}_{\mathsf{G}} = \mathbb{S}_{\mathcal{B}\mathsf{G}}$.
- $\mathbb{S}_n \cong \mathsf{S}_n[0]$ y escribiremos $\mathbb{S}_n \wr\wr \mathbb{G}$ en lugar de $\mathsf{S}_n[0] \wr\wr \mathbb{G}$.

Teorema.

Para cualquier familia $\{(n_i, \mathsf{G}_i)\}_{i\in I}$ del tipo anterior se tiene

$$\mathbb{S}_{\{(n_i,\mathsf{G}_i)\}_{i\in I}} \simeq \prod_{i\in I} \mathbb{S}_{n_i} \wr\wr\, \mathbb{S}_{\mathsf{G}_i}$$

Teorema.

Para cualquier familia $\{(n_i, \mathsf{G}_i)\}_{i\in I}$ del tipo anterior se tiene

$$\mathbb{S}_{\{(n_i,\mathsf{G}_i)\}_{i\in I}} \simeq \prod_{i\in I} \mathbb{S}_{n_i} \wr\wr\, \mathbb{S}_{\mathsf{G}_i}$$

Prueba.

<u>Paso 1</u>. $\mathbb{S}_{\coprod_{i\in I}\mathcal{G}_i} \cong \prod_{i\in I} \mathbb{S}_{\mathcal{G}_i}$.

Teorema.

Para cualquier familia $\{(n_i, \mathsf{G}_i)\}_{i \in I}$ del tipo anterior se tiene

$$\mathbb{S}_{\{(n_i, \mathsf{G}_i)\}_{i\in I}} \simeq \prod_{i \in I} \mathbb{S}_{n_i} \wr\wr \mathbb{S}_{\mathsf{G}_i}$$

Prueba.

Paso 1. $\mathbb{S}_{\coprod_{i\in I} \mathcal{G}_i} \cong \prod_{i \in I} \mathbb{S}_{\mathcal{G}_i}$.

Básicamente, consecuencia de

$$\underline{\mathcal{F}un}(\coprod_{i\in I} \mathcal{A}_i, \mathcal{B}) \cong \prod_{i\in I} \underline{\mathcal{F}un}(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}).$$

Teorema.

Para cualquier familia $\{(n_i, \mathsf{G}_i)\}_{i\in I}$ del tipo anterior se tiene

$$\mathbb{S}_{\{(n_i,\mathsf{G}_i)\}_{i\in I}} \simeq \prod_{i\in I} \mathbb{S}_{n_i} \wr\wr \mathbb{S}_{\mathsf{G}_i}$$

Prueba.

Paso 1. $\mathbb{S}_{\coprod_{i\in I} \mathcal{G}_i} \cong \prod_{i\in I} \mathbb{S}_{\mathcal{G}_i}$.

Básicamente, consecuencia de

$$\underline{\mathcal{F}un}(\coprod_{i\in I} \mathcal{A}_i, \mathcal{B}) \cong \prod_{i\in I} \underline{\mathcal{F}un}(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}).$$

En nuestro caso, obtenemos que $\mathbb{S}_{\{(n_i,\mathsf{G}_i)\}_{i\in I}} \cong \prod_{i\in I} \mathbb{S}_{n_i,\mathsf{G}_i}$.

Teorema.

Para cualquier familia $\{(n_i, \mathsf{G}_i)\}_{i\in I}$ del tipo anterior se tiene

$$\mathbb{S}_{\{(n_i,\mathsf{G}_i)\}_{i\in I}} \simeq \prod_{i\in I} \mathbb{S}_{n_i} \wr\wr \mathbb{S}_{\mathsf{G}_i}$$

Prueba.

Paso 1. $\mathbb{S}_{\coprod_{i\in I}\mathcal{G}_i} \cong \prod_{i\in I} \mathbb{S}_{\mathcal{G}_i}$.

Básicamente, consecuencia de

$$\underline{\mathcal{F}un}(\coprod_{i\in I} \mathcal{A}_i, \mathcal{B}) \cong \prod_{i\in I} \underline{\mathcal{F}un}(\mathcal{A}_i, \mathcal{B}).$$

En nuestro caso, obtenemos que $\mathbb{S}_{\{(n_i,\mathsf{G}_i)\}_{i\in I}} \cong \prod_{i\in I} \mathbb{S}_{n_i,\mathsf{G}_i}$.

Paso 2. $\mathbb{S}_{n,\mathsf{G}} \simeq \mathbb{S}_n \wr\wr \mathbb{S}_{\mathsf{G}}$. $\square$

El problema de determinar los invariantes homotópicos del 2-grupo

$$\mathbb{S}_{\{(n_i,\mathsf{G}_i)\}_{i\in I}} \simeq \prod_{i\in I} \mathbb{S}_{n_i} \wr\wr \mathbb{S}_{\mathsf{G}_i}$$

queda ahora reducido a determinar:

El problema de determinar los invariantes homotópicos del 2-grupo

$$\mathbb{S}_{\{(n_i,\mathsf{G}_i)\}_{i\in I}} \simeq \prod_{i\in I} \mathbb{S}_{n_i} \wr\wr \mathbb{S}_{\mathsf{G}_i}$$

queda ahora reducido a determinar:

1. Los invariantes homotópicos de un producto en términos de los de sus factores.

El problema de determinar los invariantes homotópicos del 2-grupo

$$\mathbb{S}_{\{(n_i,\mathsf{G}_i)\}_{i\in I}} \simeq \prod_{i\in I} \mathbb{S}_{n_i} \wr\wr \mathbb{S}_{\mathsf{G}_i}$$

queda ahora reducido a determinar:

1. Los invariantes homotópicos de un producto en términos de los de sus factores.
2. Los invariantes homotópicos de un producto *wreath* $\mathbb{S}_n \wr\wr \mathbb{G}$ en términos de los de $\mathbb{G}$ y de n.

El problema de determinar los invariantes homotópicos del 2-grupo

$$\mathbb{S}_{\{(n_i,\mathsf{G}_i)\}_{i\in I}} \simeq \prod_{i\in I} \mathbb{S}_{n_i} \wr\wr \mathbb{S}_{\mathsf{G}_i}$$

queda ahora reducido a determinar:

1. Los invariantes homotópicos de un producto en términos de los de sus factores.
2. Los invariantes homotópicos de un producto *wreath* $\mathbb{S}_n \wr\wr \mathbb{G}$ en términos de los de $\mathbb{G}$ y de n.
3. Los invariantes homotópicos de $\mathbb{S}_{\mathsf{G}}$ para cualquier grupo G.

Problema 1. Invariantes homotópicos de un producto.

Lema.

Dada familia de grupos $\{G_i\}_{i\in I}$ y un G_i-módulo A_i, $i \in I$, existe *monomorfismo* canónico $\psi : \prod_{i\in I} H^\bullet(G_i, A_i) \hookrightarrow H^\bullet(\prod_{i\in I} G_i, \prod_{i\in I} A_i)$.

Problema 1. Invariantes homotópicos de un producto.

Lema.

Dada familia de grupos $\{G_i\}_{i\in I}$ y un G_i-módulo A_i, $i \in I$, existe *monomorfismo* canónico $\psi : \prod_{i\in I} H^\bullet(G_i, A_i) \hookrightarrow H^\bullet(\prod_{i\in I} G_i, \prod_{i\in I} A_i)$.

Teorema.

Dada $\{\mathbb{G}_i\}_{i\in I}$ familia arbitraria de 2-grupos, se tiene

- $\pi_0(\prod_{i\in I} \mathbb{G}_i) = \prod_{i\in I} \pi_0(\mathbb{G}_i)$.
- $\pi_1(\prod_{i\in I} \mathbb{G}_i) = \prod_{i\in I} \pi_1(\mathbb{G}_i)$ con la acción de $\pi_0(\prod_{i\in I} \mathbb{G}_i)$ definida componente a componente.
- $\alpha(\prod_{i\in I} \mathbb{G}_i) = \psi(\alpha(\mathbb{G}_i)_{i\in I})$.

En particular, $\prod_{i\in I} \mathbb{G}_i$ es escindido si y sólo si $\mathbb{G}_i$ es escindido para todo $i \in I$.

Problema 2. Invariantes homotópicos de $\mathbb{S}_n \wr\wr \mathbb{G}$.

Problema 2. Invariantes homotópicos de $\mathbb{S}_n \wr\wr \mathbb{G}$.

Lema.

Dados $n \geq 1$, un grupo G y un G-módulo A cualesquiera:

- Existe acción inducida de $\mathrm{S}_n \wr \mathrm{G}$ sobre A^n.
- Existe morfismo canónico de complejos

$$\varphi_n : C^\bullet(\mathrm{G}, \mathrm{A}) \to C^\bullet(\mathrm{S}_n \wr \mathrm{G}, \mathrm{A}^n)$$

- El morfismo inducido $\varphi_{n,*} : \mathrm{H}^\bullet(\mathrm{G}, \mathrm{A}) \to \mathrm{H}^\bullet(\mathrm{S}_n \wr \mathrm{G}, \mathrm{A}^n)$ es inyectivo y natural en (G, A).

Teorema.

Dados $n \geq 1$ y 2-grupo $\mathbb{G}$, se tiene:

- $\pi_0(\mathbb{S}_n \wr\wr \mathbb{G}) \cong \mathsf{S}_n \wr \pi_0(\mathbb{G})$
- $\pi_1(\mathbb{S}_n \wr\wr \mathbb{G}) \cong \pi_1(\mathbb{G})^n$.
- El invariante de Postnikov de $\mathbb{S}_n \wr\wr \mathbb{G}$ es la imagen del invariante de Postnikov de $\mathbb{G}$ por el monomorfismo $\varphi_{n,*}$ anterior.

En particular, $\mathbb{S}_n \wr\wr \mathbb{G}$ es escindido si y sólo si $\mathbb{G}$ es escindido.

Corolario.

Para todo $n \geq 1$ y todo 2-grupo elemental $\mathsf{A}[1] \rtimes \mathsf{G}[0]$

$$\mathbb{S}_n \wr\wr (\mathsf{A}[1] \rtimes \mathsf{G}[0]) \cong \mathsf{A}^n[1] \rtimes (\mathsf{S}_n \wr \mathsf{G})[0]$$

Corolario.

Para todo $n \geq 1$ y todo 2-grupo elemental $A[1] \rtimes G[0]$

$$\mathbb{S}_n \wr\wr (A[1] \rtimes G[0]) \cong A^n[1] \rtimes (S_n \wr G)[0]$$

Ejemplo.

Sabemos que para cualquier grupo G se tiene que

$$\mathbb{E}qu_{\mathbf{Cat}_k}(\mathcal{V}ect_k[G]) \simeq (k^*)^r[1] \rtimes (S_{r_1} \times \cdots \times S_{r_s})[0]$$

Corolario.

Para todo $n \geq 1$ y todo 2-grupo elemental $\mathsf{A}[1] \rtimes \mathsf{G}[0]$

$$\mathbb{S}_n \wr\wr (\mathsf{A}[1] \rtimes \mathsf{G}[0]) \cong \mathsf{A}^n[1] \rtimes (\mathsf{S}_n \wr \mathsf{G})[0]$$

Ejemplo.

Sabemos que para cualquier grupo G se tiene que

$$\mathbb{E}qu_{\mathbf{Cat}_k}(\mathcal{V}ect_k[\mathsf{G}]) \simeq (k^*)^r[1] \rtimes (\mathsf{S}_{r_1} \times \cdots \times \mathsf{S}_{r_s})[0]$$

Por tanto, si G es un grupo abeliano A se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}qu_{\mathbf{Cat}_k}(\mathcal{V}ect_k[\mathsf{A}]) &\simeq (k^*)^{|\mathsf{A}|}[1] \rtimes \mathsf{S}_{|\mathsf{A}|}[0] \\ &\simeq \mathbb{S}_{|\mathsf{A}|} \wr\wr\, k^*[1] \\ &\simeq \mathbb{S}_{|\mathsf{A}|} \wr\wr\, \mathbb{E}qu_{\mathbf{Cat}_k}(\mathcal{V}ect_k) \end{aligned}$$

Problema 3. Invariantes homotópicos de $\mathbb{S}_{\mathsf{G}}$.

Problema 3. Invariantes homotópicos de $\mathbb{S}_G$.

Teorema.

Dado cualquier grupo G, se tiene:

- $\pi_0(\mathbb{S}_G) = \mathrm{Out}(G)$;
- $\pi_1(\mathbb{S}_G) = Z(G)$ con la acción de $\mathrm{Out}(G)$ dada por

$$[\phi] \triangleleft z = \phi(z).$$

Problema 3. Invariantes homotópicos de $\mathbb{S}_G$.

Teorema.

Dado cualquier grupo G, se tiene:

- $\pi_0(\mathbb{S}_G) = \mathrm{Out}(G)$;
- $\pi_1(\mathbb{S}_G) = Z(G)$ con la acción de $\mathrm{Out}(G)$ dada por
$$[\phi] \triangleleft z = \phi(z).$$
- Un 3-cociclo normalizado clasificador de $\mathbb{S}_G$ es el dado por
$$z([\phi],[\phi'],[\phi'']) = s[\phi](\omega(s[\phi'] \circ s[\phi''])) \cdot \omega(s([\phi][\phi']) \circ s[\phi''])^{-1} \cdot \omega(s[\phi] \circ s([\phi'][\phi''])) \cdot \omega(s[\phi] \circ s[\phi'])^{-1}$$
para cualquier sección $s : Out(G) \to Aut(G)$ y aplicación $\omega : Aut(G) \to G$ tal que $\phi = c_{\omega(\phi)} \circ s[\phi]$ y $\omega(s[\phi]) = e$.

Si definimos $c : Out(\mathrm{G}) \times Out(\mathrm{G}) \to G$ por

$$c([\phi],[\phi']) := \omega(s[\phi] \circ s[\phi'])$$

resulta que $\mathrm{z}([\phi],[\phi'],[\phi'']) = (\partial c)([\phi],[\phi'],[\phi''])$.

Si definimos $c : Out(\mathrm{G}) \times Out(\mathrm{G}) \to G$ por

$$c([\phi],[\phi']) := \omega(s[\phi] \circ s[\phi'])$$

resulta que $\mathrm{z}([\phi],[\phi'],[\phi'']) = (\partial c)([\phi],[\phi'],[\phi''])$.

Pero c puede no tomar valores en $Z(\mathrm{G})$...

Si definimos $c : Out(\mathsf{G}) \times Out(\mathsf{G}) \to G$ por

$$c([\phi],[\phi']) := \omega(s[\phi] \circ s[\phi'])$$

resulta que $\mathrm{z}([\phi],[\phi'],[\phi'']) = (\partial c)([\phi],[\phi'],[\phi''])$.

Pero c puede no tomar valores en $Z(\mathsf{G})$...

Corolario.

$\mathbb{S}_{\mathsf{G}}$ es escindido en cualquiera de las circunstancias siguientes:

Si definimos $c : Out(\mathsf{G}) \times Out(\mathsf{G}) \to G$ por

$$c([\phi],[\phi']) := \omega(s[\phi] \circ s[\phi'])$$

resulta que $\mathrm{z}([\phi],[\phi'],[\phi'']) = (\partial c)([\phi],[\phi'],[\phi''])$.

Pero c puede no tomar valores en $Z(\mathsf{G})$...

Corolario.

$\mathbb{S}_{\mathsf{G}}$ es escindido en cualquiera de las circunstancias siguientes:

- G tiene centro trivial, en cuyo caso es $\mathbb{S}_{\mathsf{G}} \simeq \mathrm{Out}(\mathsf{G})[0]$.

Si definimos $c : Out(\mathrm{G}) \times Out(\mathrm{G}) \to G$ por

$$c([\phi],[\phi']) := \omega(s[\phi] \circ s[\phi'])$$

resulta que $\mathrm{z}([\phi],[\phi'],[\phi'']) = (\partial c)([\phi],[\phi'],[\phi''])$.

Pero c puede no tomar valores en $Z(\mathrm{G})$...

Corolario.

$\mathbb{S}_{\mathrm{G}}$ es escindido en cualquiera de las circunstancias siguientes:

- G tiene centro trivial, en cuyo caso es $\mathbb{S}_{\mathrm{G}} \simeq \mathrm{Out}(\mathrm{G})[0]$.
- G no tiene automorfismos externos propios, en cuyo caso se tiene que $\mathbb{S}_{\mathrm{G}} \simeq \mathrm{Z}(\mathrm{G})[1]$.

Si definimos $c : Out(\mathrm{G}) \times Out(\mathrm{G}) \to G$ por

$$c([\phi], [\phi']) := \omega(s[\phi] \circ s[\phi'])$$

resulta que $\mathrm{z}([\phi], [\phi'], [\phi'']) = (\partial c)([\phi], [\phi'], [\phi''])$.

Pero c puede no tomar valores en $Z(\mathrm{G})$...

Corolario.

$\mathbb{S}_{\mathrm{G}}$ es escindido en cualquiera de las circunstancias siguientes:

- G tiene centro trivial, en cuyo caso es $\mathbb{S}_{\mathrm{G}} \simeq \mathrm{Out}(\mathrm{G})[0]$.
- G no tiene automorfismos externos propios, en cuyo caso se tiene que $\mathbb{S}_{\mathrm{G}} \simeq \mathrm{Z}(\mathrm{G})[1]$.
- G es un grupo abeliano A, en cuyo caso se tiene que $\mathbb{S}_{\mathrm{A}} \simeq \mathrm{A}[1] \rtimes \mathrm{Aut}(\mathrm{A})[0]$ con la acción de Aut(A) sobre A canónica.

Ejemplo.

Los 2-grupos de permutaciones $\mathbb{S}_{\mathsf{S}_n}$ son:

$$\mathbb{S}_{\mathsf{S}_n} \simeq \begin{cases} 1, & \text{si } n \neq 2, 6 \\ \mathbb{Z}_2[1], & \text{si } n = 2 \\ \mathbb{Z}_2[0], & \text{si } n = 6. \end{cases}$$

Ejemplo.

Los 2-grupos de permutaciones $\mathbb{S}_{\mathsf{S}_n}$ son:

$$\mathbb{S}_{\mathsf{S}_n} \simeq \begin{cases} 1, & \text{si } n \neq 2, 6 \\ \mathbb{Z}_2[1], & \text{si } n = 2 \\ \mathbb{Z}_2[0], & \text{si } n = 6. \end{cases}$$

Por otra parte, $\widehat{\mathcal{F}in\mathcal{S}et}$ es el grupoide de tipo finito definido por la familia $\{(1, \mathsf{S}_n)\}_{n\geq 0}$, tenemos que

$$\mathbb{S}_{\widehat{\mathcal{F}in\mathcal{S}et}} \simeq \mathbb{S}_{\{(1,\mathsf{S}_n)\}_{n\geq 0}} \simeq \prod_{n\geq 0} \mathbb{S}_{\mathsf{S}_n} \simeq \mathbb{Z}_2[1] \times \mathbb{Z}_2[0]$$

Ejemplo.

Los 2-grupos de permutaciones $\mathbb{S}_{\mathsf{S}_n}$ son:

$$\mathbb{S}_{\mathsf{S}_n} \simeq \begin{cases} 1, & \text{si } n \neq 2,6 \\ \mathbb{Z}_2[1], & \text{si } n = 2 \\ \mathbb{Z}_2[0], & \text{si } n = 6. \end{cases}$$

Por otra parte, $\widehat{\mathcal{F}in\mathcal{S}et}$ es el grupoide de tipo finito definido por la familia $\{(1, \mathsf{S}_n)\}_{n\geq 0}$, tenemos que

$$\mathbb{S}_{\widehat{\mathcal{F}in\mathcal{S}et}} \simeq \mathbb{S}_{\{(1,\mathsf{S}_n)\}_{n\geq 0}} \simeq \prod_{n\geq 0} \mathbb{S}_{\mathsf{S}_n} \simeq \mathbb{Z}_2[1] \times \mathbb{Z}_2[0]$$

Ejemplo.

$\mathbb{S}_{\mathsf{D}_n}$ para $n = 4$ y $n = 6$ es no abeliano, de centro no trivial y con automorfismos no internos, pero es equivalentes al 2-grupo elemental $\mathbb{Z}_2[1] \times \mathbb{Z}_2[0]$.

Lema.

$\mathbb{S}_\mathsf{G}$ es escindido si y sólo si la sucesión exacta

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z(G) \arrow[r] & G \arrow[r, "c"] & Aut(G) \arrow[r, shift left] & Out(G) \arrow[l, shift left, "s"] \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}
$$

admite una sección s cuyo "defecto homomórfico" levanta "cocíclicamente" a G.

Lema.

$\mathbb{S}_{\mathsf{G}}$ es escindido si y sólo si la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow Z(\mathsf{G}) \longrightarrow \mathsf{G} \xrightarrow{c} Aut(\mathsf{G}) \underset{s}{\rightleftarrows} Out(\mathsf{G}) \longrightarrow 1$$

admite una sección s cuyo "defecto homomórfico" levanta "cocíclicamente" a G.

$$\begin{tikzcd} & & \mathsf{G} \arrow[d, "c"] \\ Out(\mathsf{G}) \times Out(\mathsf{G}) \arrow[urr, dotted, "\exists \psi_s"] \arrow[rr, "d_s"'] & & Inn(\mathsf{G}) \end{tikzcd}$$

$$d_s : ([\phi], [\phi']) \mapsto s[\phi] \circ s[\phi'] \circ s[\phi \circ \phi']^{-1}$$

Teorema.

Existen grupos G tales que $\mathbb{S}_{\mathsf{G}}$ no es escindido. Concretamente, $\mathbb{S}_{\mathsf{D}_{8k}}$ es no escindido para todo $k \geq 1$.

Teorema.

Existen grupos G tales que $\mathbb{S}_{\mathsf{G}}$ no es escindido. Concretamente, $\mathbb{S}_{\mathsf{D}_{8k}}$ es no escindido para todo $k \geq 1$.

Prueba.

Paso 1. Si existe $[\phi] \in Out(\mathsf{G})$ de orden dos y para todo $\phi \in [\phi]$ y todo $g \in G$ tal que $\phi^2 = c_g$ se cumple que $\phi(g) \neq g$, entonces no existe una sección s del tipo anterior.

Teorema.

Existen grupos G tales que $\mathbb{S}_{\mathrm{G}}$ no es escindido. Concretamente, $\mathbb{S}_{\mathrm{D}_{8k}}$ es no escindido para todo $k \geq 1$.

Prueba.

Paso 1. Si existe $[\phi] \in Out(\mathrm{G})$ de orden dos y para todo $\phi \in [\phi]$ y todo $g \in G$ tal que $\phi^2 = c_g$ se cumple que $\phi(g) \neq g$, entonces no existe una sección s del tipo anterior.

Paso 2. La clase de $\phi : \mathrm{D}_{8k} \to \mathrm{D}_{8k}$ definido sobre los generadores por $r \mapsto r^{4k-1}$ y $s \mapsto sr$ cumple la condición anterior. $\square$

Conclusión.

Para toda familia $\{(n_i, \mathsf{G}_i)\}_{i\in I}$ del tipo anterior

$$\mathbb{S}_{\{(n_i,\mathsf{G}_i)\}_{i\in I}} \simeq \prod_{i\in I} \mathsf{Z}(\mathsf{G}_i)^{n_i}[1] \rtimes_{\varphi_{n_i,*}(\mathsf{z}(\mathsf{G}_i))} (\mathsf{S}_{n_i} \wr \mathsf{Out}(\mathsf{G}_i))[0]$$

donde $\mathsf{z}(\mathsf{G}_i) \in \mathsf{Z}^3(\mathsf{Out}(\mathsf{G}_i), \mathsf{Z}(\mathsf{G}_i))$ es un 3-cociclo normalizado clasificador de $\mathbb{S}_{\mathsf{G}_i}$, $i \in I$.

Observación. En el teorema de Cayley para grupos intervienen **todos** los grupos simétricos S_n para todo $n \geq 1$ puesto que todo conjunto admite una estructura de grupo. Sin embargo, no todo grupoide admite una estructura de 2-grupo.

Observación. En el teorema de Cayley para grupos intervienen **todos** los grupos simétricos S_n para todo $n \geq 1$ puesto que todo conjunto admite una estructura de grupo. Sin embargo, no todo grupoide admite una estructura de 2-grupo.

Por tanto, quizás los verdaderos análogos categóricos de los grupos simétricos S_n sean sólo los 2-grupos de permutaciones $\mathbb{S}_{n,\mathrm{A}}$ para cualquier $n \geq 1$ y cualquier grupo abeliano A, i.e. los 2-grupos elementales

$$\mathbb{S}_{n,\mathrm{A}} \simeq \mathrm{A}^n[1] \rtimes (\mathrm{S}_n \wr \mathrm{Aut}(\mathrm{A}))[0]$$

Observación. En el teorema de Cayley para grupos intervienen **todos** los grupos simétricos S_n para todo $n \geq 1$ puesto que todo conjunto admite una estructura de grupo. Sin embargo, no todo grupoide admite una estructura de 2-grupo.

Por tanto, quizás los verdaderos análogos categóricos de los grupos simétricos S_n sean sólo los 2-grupos de permutaciones $\mathbb{S}_{n,A}$ para cualquier $n \geq 1$ y cualquier grupo abeliano A, i.e. los 2-grupos elementales

$$\mathbb{S}_{n,A} \simeq A^n[1] \rtimes (S_n \wr \mathrm{Aut}(A))[0]$$

Problema. Cómo generaliza esto al caso de los ***n*-grupos de permutaciones**, para $n > 2$, y a los **∞-grupos de permutaciones**?