Ser unitaria es una propiedad de presentación finita

Fernando Muro

Universidad de Sevilla

Métodos Categóricos y Homotópicos
en Álgebra, Geometría y Topología

Granada, 6 y 7 de junio de 2014

Estructuras de álgebra asociativa

Dada una $\Bbbk$-álgebra conmutativa A, una estructura de A-álgebra asociativa en A^n está determinada por las constantes de estructura,

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^{k} \mathbf{e}_k.$$

La asociatividad se expresa del siguiente modo, $1 \leq i, j, k \leq n$,

$$(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k) \quad \Leftrightarrow \sum_{m=1}^{n} c_{ij}^{m} c_{mk}^{l} = \sum_{m=1}^{n} c_{im}^{l} c_{jk}^{m}, \quad 1 \leq l \leq n.$$

El conjunto de estas estructuras es $\mathrm{Hom}(R, A) = X(A)$, donde

$$R = \frac{\Bbbk[c_{ij}^{k}]}{\left(\sum_{m=1}^{n} c_{ij}^{m} c_{mk}^{l} - c_{im}^{l} c_{jk}^{m}\right)}, \qquad X = \operatorname{Spec} R.$$

espacio de móduli de estructuras de álgebra asociativa

Estructuras de álgebra asociativa

Dada una $\Bbbk$-álgebra conmutativa A, una estructura de A-álgebra asociativa en A^n está determinada por las constantes de estructura,

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^{k} \mathbf{e}_k.$$

La asociatividad se expresa del siguiente modo, $1 \leq i, j, k \leq n$,

$$(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k) \quad \Leftrightarrow \sum_{m=1}^{n} c_{ij}^{m} c_{mk}^{l} = \sum_{m=1}^{n} c_{im}^{l} c_{jk}^{m}, \quad 1 \leq l \leq n.$$

El conjunto de estas estructuras es $\operatorname{Hom}(R, A) = X(A)$, donde

$$R = \frac{\Bbbk[c_{ij}^{k}]}{\left(\sum_{m=1}^{n} c_{ij}^{m} c_{mk}^{l} - c_{im}^{l} c_{jk}^{m}\right)}, \qquad X = \operatorname{Spec} R.$$

espacio de móduli de estructuras de álgebra asociativa

Dada una $\Bbbk$-álgebra conmutativa A, una estructura de A-álgebra asociativa en A^n está determinada por las constantes de estructura,

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^{k} \mathbf{e}_k.$$

La asociatividad se expresa del siguiente modo, $1 \leq i, j, k \leq n$,

$$(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k) \quad \Leftrightarrow \sum_{m=1}^{n} c_{ij}^{m} c_{mk}^{l} = \sum_{m=1}^{n} c_{im}^{l} c_{jk}^{m}, \quad 1 \leq l \leq n.$$

El conjunto de estas estructuras es $\mathrm{Hom}(R, A) = X(A)$, donde

$$R = \frac{\Bbbk[c_{ij}^{k}]}{\left(\sum_{m=1}^{n} c_{ij}^{m} c_{mk}^{l} - c_{im}^{l} c_{jk}^{m}\right)}, \qquad X = \operatorname{Spec} R.$$

espacio de móduli de estructuras de álgebra asociativa

Estructuras de álgebra asociativa

Dada una $\Bbbk$-álgebra conmutativa A, una estructura de A-álgebra asociativa en A^n está determinada por las constantes de estructura,

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^{k} \mathbf{e}_k.$$

La asociatividad se expresa del siguiente modo, $1 \leq i, j, k \leq n$,

$$(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k) \quad \Leftrightarrow \sum_{m=1}^{n} c_{ij}^{m} c_{mk}^{l} = \sum_{m=1}^{n} c_{im}^{l} c_{jk}^{m}, \quad 1 \leq l \leq n.$$

El conjunto de estas estructuras es $\mathrm{Hom}(R, A) = X(A)$, donde

$$R = \frac{\Bbbk[c_{ij}^{k}]}{\left(\sum_{m=1}^{n} c_{ij}^{m} c_{mk}^{l} - c_{im}^{l} c_{jk}^{m}\right)}, \qquad X = \operatorname{Spec} R.$$

espacio de móduli de estructuras de álgebra asociativa

Dada una $\Bbbk$-álgebra conmutativa A, una estructura de A-álgebra asociativa en A^n está determinada por las constantes de estructura,

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^{k} \mathbf{e}_k.$$

La asociatividad se expresa del siguiente modo, $1 \leq i, j, k \leq n$,

$$(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k) \quad \Leftrightarrow \sum_{m=1}^{n} c_{ij}^{m} c_{mk}^{l} = \sum_{m=1}^{n} c_{im}^{l} c_{jk}^{m}, \quad 1 \leq l \leq n.$$

El conjunto de estas estructuras es $\mathrm{Hom}(R, A) = X(A)$, donde

$$R = \frac{\Bbbk[c_{ij}^{k}]}{\left(\sum_{m=1}^{n} c_{ij}^{m} c_{mk}^{l} - c_{im}^{l} c_{jk}^{m}\right)}, \qquad X = \operatorname{Spec} R.$$

espacio de móduli de estructuras de álgebra asociativa

Estructuras de álgebra asociativa

Una estructura de A-álgebra asociativa unitaria en A^n está determinada por, además, los coeficientes del elemento unidad,

$$\mathbf{1} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}_i,$$

que han de satisfacer, $1 \leq i \leq n$,

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{1} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_j c_{ji}^k = \delta_{ik} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^k a_j, \quad 1 \leq k \leq n.$$

El conjunto de estas estructuras es $\mathrm{Hom}(S, A) = Y(A)$, donde

$$S = \frac{R[a_i]}{\left(\sum_{j=1}^n a_j c_{ji}^k - \delta_{ik}, \quad \sum_{j=1}^n c_{ij}^k a_j - \delta_{ik}\right)}, \qquad Y = \operatorname{Spec} S.$$

espacio de móduli de estructuras de álgebra asociativa y unitaria

Estructuras de álgebra asociativa

Una estructura de A-álgebra asociativa unitaria en A^n está determinada por, además, los coeficientes del elemento unidad,

$$\mathbf{1} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}_i,$$

que han de satisfacer, $1 \leq i \leq n$,

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{1} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_j c_{ji}^k = \delta_{ik} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^k a_j, \quad 1 \leq k \leq n.$$

El conjunto de estas estructuras es $\mathrm{Hom}(S, A) = Y(A)$, donde

$$S = \frac{R[a_i]}{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j c_{ji}^k - \delta_{ik}, \quad \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^k a_j - \delta_{ik}\right)}, \qquad Y = \operatorname{Spec} S.$$

espacio de móduli de estructuras de álgebra asociativa y unitaria

Una estructura de A-álgebra asociativa unitaria en A^n está determinada por, además, los coeficientes del elemento unidad,

$$\mathbf{1} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}_i,$$

que han de satisfacer, $1 \leq i \leq n$,

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{1} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_j c_{ji}^k = \delta_{ik} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^k a_j, \quad 1 \leq k \leq n.$$

El conjunto de estas estructuras es $\mathrm{Hom}(S, A) = Y(A)$, donde

$$S = \frac{R[a_i]}{\left(\sum_{j=1}^n a_j c_{ji}^k - \delta_{ik}, \quad \sum_{j=1}^n c_{ij}^k a_j - \delta_{ik}\right)}, \qquad Y = \operatorname{Spec} S.$$

espacio de móduli de estructuras de álgebra asociativa y unitaria

Estructuras de álgebra asociativa

Una estructura de A-álgebra asociativa unitaria en A^n está determinada por, además, los coeficientes del elemento unidad,

$$\mathbf{1} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}_i,$$

que han de satisfacer, $1 \leq i \leq n$,

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{1} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_j c_{ji}^k = \delta_{ik} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^k a_j, \quad 1 \leq k \leq n.$$

El conjunto de estas estructuras es $\mathrm{Hom}(S, A) = Y(A)$, donde

$$S = \frac{R[a_i]}{\left(\sum_{j=1}^n a_j c_{ji}^k - \delta_{ik}, \quad \sum_{j=1}^n c_{ij}^k a_j - \delta_{ik}\right)}, \qquad Y = \operatorname{Spec} S.$$

espacio de móduli de estructuras de álgebra asociativa y unitaria

Estructuras de álgebra asociativa

Una estructura de A-álgebra asociativa unitaria en A^n está determinada por, además, los coeficientes del elemento unidad,

$$\mathbf{1} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}_i,$$

que han de satisfacer, $1 \leq i \leq n$,

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{1} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_j c_{ji}^k = \delta_{ik} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^k a_j, \quad 1 \leq k \leq n.$$

El conjunto de estas estructuras es $\mathrm{Hom}(S, A) = Y(A)$, donde

$$S = \frac{R[a_i]}{\left(\sum_{j=1}^{n} a_j c_{ji}^k - \delta_{ik}, \quad \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^k a_j - \delta_{ik}\right)},$$

$$Y = \operatorname{Spec} S.$$

espacio de móduli de estructuras de álgebra asociativa y unitaria

Estructuras de álgebra asociativa

Proposición (Gabriel'74)

El morfismo $Y \to X$ inducido por la inclusión $R \subset S$ es una inmersión abierta de Zariski.

Ejemplo ($n = 1$)

Aquí $x = c_{11}^1$ e $y = a_1$.

Estructuras de álgebra asociativa

Proposición (Gabriel'74)

El morfismo $Y \to X$ inducido por la inclusión $R \subset S$ es una inmersión abierta de Zariski.

Ejemplo ($n = 1$)

Aquí $x = c^1_{11}$ *e* $y = a_1$.

Opéradas

Definición (May'72, Boardman–Vogt'73)

Una opérada $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_n\}_{n\geq 0}$ *consiste en:*

- *módulos* $\mathcal{O}_n$ *de operaciones de aridad n,*
- *composiciones* $\circ_i \colon \mathcal{O}_p \otimes \mathcal{O}_q \to \mathcal{O}_{p+q-1}$, $1 \leq i \leq p$,
- *una identidad* $\mathrm{id} \in \mathcal{O}_1$,

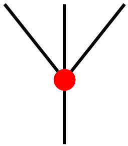
\+ *leyes de asociatividad y unidad.*

Definición (May'72, Boardman–Vogt'73)

Una opérada $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_n\}_{n\geq 0}$ *consiste en:*

- *módulos* $\mathcal{O}_n$ *de operaciones de aridad n,*
- *composiciones* $\circ_i \colon \mathcal{O}_p \otimes \mathcal{O}_q \to \mathcal{O}_{p+q-1}$, $1 \leq i \leq p$,
- *una identidad* $\mathrm{id} \in \mathcal{O}_1$,

\+ *leyes de asociatividad y unidad.*

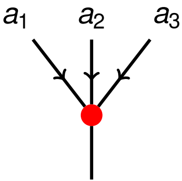


Definición (May'72, Boardman–Vogt'73)

Una opérada $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_n\}_{n\geq 0}$ *consiste en:*

- *módulos* $\mathcal{O}_n$ *de operaciones de aridad* n,
- *composiciones* $\circ_i\colon \mathcal{O}_p \otimes \mathcal{O}_q \to \mathcal{O}_{p+q-1}$, $1 \leq i \leq p$,
- *una identidad* $\mathrm{id} \in \mathcal{O}_1$,

\+ *leyes de asociatividad y unidad.*



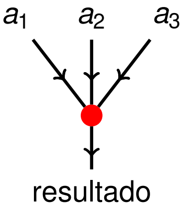
Opéradas

Definición (May'72, Boardman–Vogt'73)

Una opérada $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_n\}_{n\geq 0}$ *consiste en:*

- *módulos* $\mathcal{O}_n$ *de operaciones de aridad n,*
- composiciones $\circ_i \colon \mathcal{O}_p \otimes \mathcal{O}_q \to \mathcal{O}_{p+q-1}$, $1 \leq i \leq p$,
- *una* identidad $\mathrm{id} \in \mathcal{O}_1$,

\+ *leyes de asociatividad y unidad.*



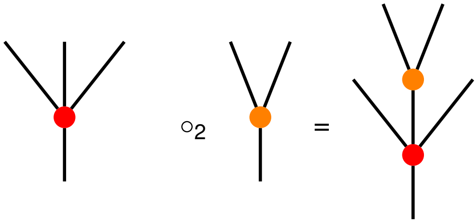
Opéradas

Definición (May'72, Boardman–Vogt'73)

Una opérada $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_n\}_{n\geq 0}$ *consiste en:*

- *módulos* $\mathcal{O}_n$ *de operaciones de aridad n,*
- *composiciones* $\circ_i\colon \mathcal{O}_p \otimes \mathcal{O}_q \to \mathcal{O}_{p+q-1}$, $1 \leq i \leq p$,
- *una identidad* $\mathrm{id} \in \mathcal{O}_1$,

\+ *leyes de asociatividad y unidad.*



Definición (May'72, Boardman–Vogt'73)

Una *opérada* $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_n\}_{n\geq 0}$ *consiste en:*

- *módulos* $\mathcal{O}_n$ *de operaciones de aridad* n*,*
- *composiciones* $\circ_i \colon \mathcal{O}_p \otimes \mathcal{O}_q \to \mathcal{O}_{p+q-1}$, $1 \leq i \leq p$*,*
- *una* *identidad* $\mathrm{id} \in \mathcal{O}_1$*,*

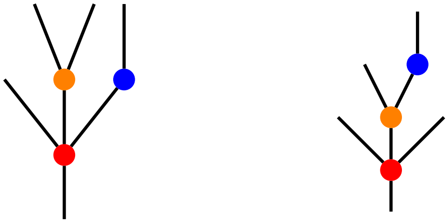
\+ *leyes de asociatividad y unidad.*

Definición (May'72, Boardman–Vogt'73)

Una *opérada* $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}_n\}_{n\geq 0}$ *consiste en:*

- *módulos* $\mathcal{O}_n$ *de operaciones de aridad* n,
- *composiciones* $\circ_i \colon \mathcal{O}_p \otimes \mathcal{O}_q \to \mathcal{O}_{p+q-1}$, $1 \leq i \leq p$,
- *una identidad* $\mathrm{id} \in \mathcal{O}_1$,

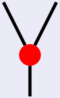
\+ *leyes de asociatividad y unidad.*



Opéradas

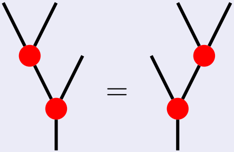
Ejemplo (La opérada asociativa)

La opérada $\mathcal{A}$ está generada por



,

sometida a la relación

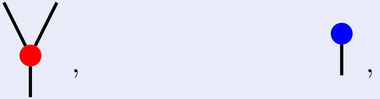


.

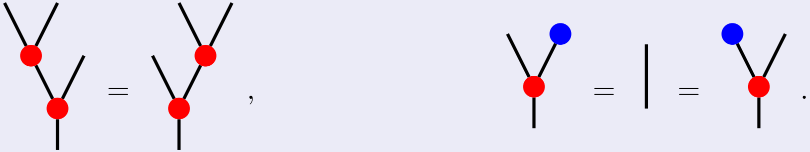
Opéradas

Ejemplo (La opérada asociativa unitaria)

La opérada $\mathcal{U}$ está generada por



sometida a las relaciones



Ejemplo (La opérada de endomorfismos)

La opérada $\mathcal{E}(M)$ viene dada por:

$$\mathcal{E}(M)_n = \mathrm{Hom}(M^{\otimes n}, M),$$

$\mathrm{id} \in \mathcal{E}(M)_1$ *el morfismo identidad,*

$\varphi \circ_i \psi = \varphi(\dots, \psi, \dots)$ *inserción en el i-ésimo lugar.*

Definición

Una $\mathcal{O}$*-álgebra es un módulo M equipado con un morfismo de opéradas* $\mathcal{O} \to \mathcal{E}_{\Bbbk}(M)$.

El conjunto de estructuras de $\mathcal{O}$-algebra en M es $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{E}(M))$.

Ejemplo (La opérada de endomorfismos)

La opérada $\mathcal{E}(M)$ viene dada por:

$$\mathcal{E}(M)_n = \mathrm{Hom}(M^{\otimes n}, M),$$

$$\mathrm{id} \in \mathcal{E}(M)_1 \text{ el morfismo identidad,}$$

$$\varphi \circ_i \psi = \varphi(\dots, \psi, \dots) \text{ inserción en el i-ésimo lugar.}$$

Definición

Una $\mathcal{O}$-álgebra es un módulo M equipado con un morfismo de opéradas $\mathcal{O} \to \mathcal{E}_{\Bbbk}(M)$.

El conjunto de estructuras de $\mathcal{O}$-algebra en M es $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{E}(M))$.

Opéradas

Ejemplo (La opérada de endomorfismos)

La opérada $\mathcal{E}(M)$ *viene dada por:*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(M)_n &= \mathrm{Hom}(M^{\otimes n}, M),\\ \mathrm{id} &\in \mathcal{E}(M)_1 \text{ el morfismo identidad},\\ \varphi \circ_i \psi &= \varphi(\dots,\psi,\dots) \text{ inserción en el } i\text{-ésimo lugar.}\end{aligned}$$

Definición

Una $\mathcal{O}$*-álgebra es un módulo* M *equipado con un morfismo de opéradas* $\mathcal{O} \to \mathcal{E}_{\Bbbk}(M)$.

El conjunto de estructuras de $\mathcal{O}$-algebra en M es $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{E}(M))$.

Ejemplo (La opérada de endomorfismos)

La opérada $\mathcal{E}(M)$ viene dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(M)_n &= \mathrm{Hom}(M^{\otimes n}, M), \\ \mathrm{id} &\in \mathcal{E}(M)_1 \text{ el morfismo identidad}, \\ \varphi \circ_i \psi &= \varphi(\dots, \psi, \dots) \text{ inserción en el } i\text{-ésimo lugar}. \end{aligned}$$

Definición

Una $\mathcal{O}$-álgebra es un módulo M equipado con un morfismo de opéradas $\mathcal{O} \to \mathcal{E}_{\Bbbk}(M)$.

El conjunto de estructuras de $\mathcal{O}$-algebra en M es $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{E}(M))$.

Opéradas

Ejemplo (La opérada de endomorfismos)

La opérada $\mathcal{E}(M)$ viene dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(M)_n &= \mathrm{Hom}(M^{\otimes n}, M), \\ \mathrm{id} \in \mathcal{E}(M)_1 &\text{ el morfismo identidad}, \\ \varphi \circ_i \psi = \varphi(\dots, \psi, \dots) &\text{ inserción en el } i\text{-ésimo lugar}. \end{aligned}$$

Definición

Una $\mathcal{O}$-álgebra es un módulo M equipado con un morfismo de opéradas $\mathcal{O} \to \mathcal{E}_{\Bbbk}(M)$.

El conjunto de estructuras de $\mathcal{O}$-algebra en M es $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{E}(M))$.

Espacios de estructuras de álgebra

En el contexto diferencial graduado nos interesa más el espacio $\mathrm{Map}(\mathcal{O}, \mathcal{E}(M))$. Para calcularlo es necesario usar una resolución $\mathcal{O}_\infty$.

Definición (Stasheff'63)

La opérada $\mathcal{A}_\infty$ está libremente generada por

$$, \qquad \text{grado} = n - 2, \qquad n \geq 2,$$

con diferencial

$d\Bigg($ $\Bigg) = \sum_{\substack{p+q=n-1 \\ 1 \leq i \leq p}} \pm$.

Espacios de estructuras de álgebra

En el contexto diferencial graduado nos interesa más el espacio $\mathrm{Map}(\mathcal{O}, \mathcal{E}(M))$. Para calcularlo es necesario usar una resolución $\mathcal{O}_\infty$.

Definición (Stasheff'63)

La opérada $\mathcal{A}_\infty$ está libremente generada por

, $\quad \text{grado} = n-2, \quad n \geq 2,$

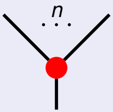
con diferencial

$d\Big($ $\Big) = \sum_{\substack{p+q=n-1 \\ 1\leq i\leq p}} \pm$ $.$

En el contexto diferencial graduado nos interesa más el espacio $\mathrm{Map}(\mathcal{O},\mathcal{E}(M))$. Para calcularlo es necesario usar una resolución $\mathcal{O}_\infty$.

Definición (Stasheff'63)

La opérada $\mathcal{A}_\infty$ está libremente generada por



$$, \qquad \text{grado} = n-2, \qquad n \geq 2,$$

con diferencial

$$d\left(\right.$$

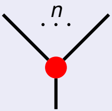
$$\left.\right) = \sum_{\substack{p+q=n-1\\ 1\leq i\leq p}} \pm$$

.

En el contexto diferencial graduado nos interesa más el espacio $\mathrm{Map}(\mathcal{O}, \mathcal{E}(M))$. Para calcularlo es necesario usar una resolución $\mathcal{O}_\infty$.

Definición (Stasheff'63)

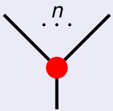
La opérada $\mathcal{A}_\infty$ está libremente generada por



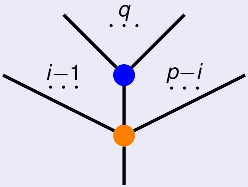
$$, \qquad \textit{grado} = n - 2, \qquad n \geq 2,$$

con diferencial

$$d\left(\;\right)$$



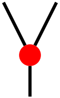
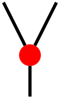
$$= \sum_{\substack{p+q=n-1 \\ 1 \leq i \leq p}} \pm$$

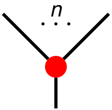


.

Espacios de estructuras de álgebra

El morfismo $\mathcal{A}_\infty \twoheadrightarrow \mathcal{A}$ definido por

 $\mapsto$  ,

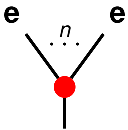


$\mapsto$ 0, si $n > 2$,

es un cuasi-isomorfismo.

Espacios de estructuras de álgebra

Dada una $\Bbbk$-CDGA A, una estructura A-lineal de $\mathcal{A}_\infty$-álgebra en $\Sigma^m A$ está determinada por constantes de estructura



$$= {\color{red}x_n}\mathbf{e}, \qquad x_n \in A_{n-2+nm-m}, \qquad n \geq 2,$$

que han de satisfacer

$$d(x_n) = \sum_{\substack{p+q=n-1 \\ 1\leq i\leq p}} \pm x_p x_q.$$

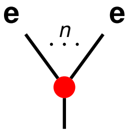
Por tanto $\mathrm{Map}(\mathcal{A}, \mathcal{E}(\Sigma^m A)) = \mathrm{Map}(R, A) = X(A)$ donde

$$R = (\Bbbk[x_n], d)\,, \qquad X = \operatorname{Spec} R.$$

espacio de móduli de estructuras de DG-álgebra asociativa

Espacios de estructuras de álgebra

Dada una $\mathbb{k}$-CDGA A, una estructura A-lineal de $\mathcal{A}_\infty$-álgebra en $\Sigma^m A$ está determinada por constantes de estructura



$$= x_n \mathbf{e}, \qquad x_n \in A_{n-2+nm-m}, \qquad n \geq 2,$$

que han de satisfacer

$$d(x_n) = \sum_{\substack{p+q=n-1\\ 1\leq i\leq p}} \pm x_p x_q.$$

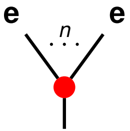
Por tanto $\operatorname{Map}(\mathcal{A}, \mathcal{E}(\Sigma^m A)) = \operatorname{Map}(R, A) = X(A)$ donde

$$R = (\mathbb{k}[x_n], d), \qquad X = \operatorname{Spec} R.$$

espacio de móduli de estructuras de DG-álgebra asociativa

Espacios de estructuras de álgebra

Dada una $\Bbbk$-CDGA A, una estructura A-lineal de $\mathcal{A}_\infty$-álgebra en $\Sigma^m A$ está determinada por constantes de estructura



$$= {\color{red}x_n}\mathbf{e}, \qquad x_n \in A_{n-2+nm-m}, \qquad n \geq 2,$$

que han de satisfacer

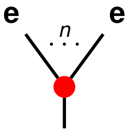
$$d(x_n) = \sum_{\substack{p+q=n-1 \\ 1\leq i\leq p}} \pm x_p x_q.$$

Por tanto $\mathrm{Map}(\mathcal{A}, \mathcal{E}(\Sigma^m A)) = \mathrm{Map}(R, A) = X(A)$ donde

$$R = (\Bbbk[x_n], d), \qquad X = \mathrm{Spec}\, R.$$

espacio de móduli de estructuras de DG-álgebra asociativa

Dada una $\Bbbk$-CDGA A, una estructura A-lineal de $\mathcal{A}_\infty$-álgebra en $\Sigma^m A$ está determinada por constantes de estructura



$$= {\color{red}x_n}\mathbf{e}, \qquad x_n \in A_{n-2+nm-m}, \qquad n \geq 2,$$

que han de satisfacer

$$d(x_n) = \sum_{\substack{p+q=n-1\\ 1\leq i\leq p}} \pm x_p x_q.$$

Por tanto $\operatorname{Map}(\mathcal{A}, \mathcal{E}(\Sigma^m A)) = \operatorname{Map}(R, A) = X(A)$ donde

$$R = (\Bbbk[{\color{red}x_n}], d)\,, \qquad\qquad X = \operatorname{Spec} R.$$

espacio de móduli de
estructuras de DG-álgebra asociativa

Presentación finita

Una $\Bbbk$-CDGA es finitamente presentada si es un retracto homotópico de otra que es libre en un número finito de generadores.

Proposición

R no es finitamente presentada sobre $\Bbbk$ si $m \leq -2$.

En este rango, R es un álgebra de Sullivan y su parte lineal no es finitamente generada.

¿Qué ocurre si $m \geq -1$?

Una $\mathbb{k}$-CDGA es finitamente presentada si es un retracto homotópico de otra que es libre en un número finito de generadores.

Proposición

R no es finitamente presentada sobre $\mathbb{k}$ si $m \leq -2$.

En este rango, R es un álgebra de Sullivan y su parte lineal no es finitamente generada.

¿Qué ocurre si $m \geq -1$?

Presentación finita

Una $\Bbbk$-CDGA es finitamente presentada si es un retracto homotópico de otra que es libre en un número finito de generadores.

Proposición

R no es finitamente presentada sobre $\Bbbk$ si $m \leq -2$.

En este rango, R es un álgebra de Sullivan y su parte lineal no es finitamente generada.

¿Qué ocurre si $m \geq -1$?

Presentación finita

Una $\Bbbk$-CDGA es finitamente presentada si es un retracto homotópico de otra que es libre en un número finito de generadores.

Proposición

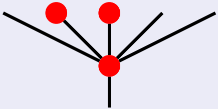
R no es finitamente presentada sobre $\Bbbk$ si $m \leq -2$.

En este rango, R es un álgebra de Sullivan y su parte lineal no es finitamente generada.

¿Qué ocurre si $m \geq -1$?

Definición (Fukaya–Oh–Ohta–Ono'09, Lyubashenko'11, M.–Tonks'14)

La opérada $\mathcal{U}_\infty$ es una extensión de $\mathcal{A}_\infty$ por generadores libres de la forma

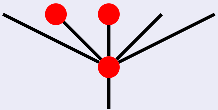


$$, \qquad \textit{grado} = \textit{hojas} + 2 \cdot \textit{corchos} - 2,$$

con diferencial definida como antes, teniendo ahora en cuenta la posición de los corchos, con las siguientes excepciones

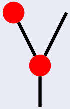
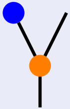
Definición (Fukaya–Oh–Ohta–Ono'09, Lyubashenko'11, M.–Tonks'14)

La opérada $\mathcal{U}_\infty$ es una extensión de $\mathcal{A}_\infty$ por generadores libres de la forma



, $\qquad$ *grado* $=$ *hojas* $+ 2 \cdot$ *corchos* $- 2$,

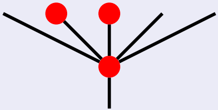
con diferencial definida como antes, teniendo ahora en cuenta la posición de los corchos, con las siguientes excepciones

$d\Big($  $\Big) = 0,$ $\qquad$ $d\Big($  $\Big) =$  $-$.

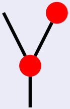
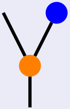
Espacios de estructuras de álgebra

Definición (Fukaya–Oh–Ohta–Ono'09, Lyubashenko'11, M.–Tonks'14)

La opérada $\mathcal{U}_\infty$ es una extensión de $\mathcal{A}_\infty$ por generadores libres de la forma

 , $\qquad$ *grado* $=$ *hojas* $+ 2 \cdot$ *corchos* $- 2$,

con diferencial definida como antes, teniendo ahora en cuenta la posición de los corchos, con las siguientes excepciones

$d\Big($  $\Big) = 0,$ $\qquad$ $d\Big($  $\Big) =$  $-$.

Presentación finita

Se define como antes el espacio de móduli de estructuras de DG-algebra asociativa y unitaria en $\Sigma^m A$, $Y = \operatorname{Spec} S$, donde $R \subset S$ es una extensión con una cantidad infinita de generadores.

Teorema (M.'14)

S sí es finitamente presentada sobre R.

En la prueba usamos la opérada $\mathcal{A}_\infty \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{U}_\infty$ obtenida al añadir

El espacio de móduli de estructuras de $\mathcal{T}$-algebra en $\Sigma^m A$ es $Z = \operatorname{Spec} T$, donde $R \subset T$ es una extensión por 3 generadores.

Presentación finita

Se define como antes el espacio de móduli de estructuras de DG-algebra asociativa y unitaria en $\Sigma^m A$, $Y = \operatorname{Spec} S$, donde $R \subset S$ es una extensión con una cantidad infinita de generadores.

Teorema (M.'14)

S sí es finitamente presentada sobre R.

En la prueba usamos la opérada $\mathcal{A}_\infty \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{U}_\infty$ obtenida al añadir

El espacio de móduli de estructuras de $\mathcal{T}$-algebra en $\Sigma^m A$ es $Z = \operatorname{Spec} T$, donde $R \subset T$ es una extensión por 3 generadores.

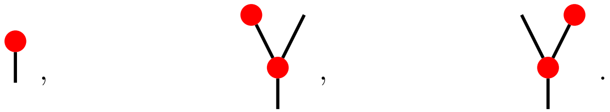
Presentación finita

Se define como antes el espacio de móduli de estructuras de DG-algebra asociativa y unitaria en $\Sigma^m A$, $Y = \operatorname{Spec} S$, donde $R \subset S$ es una extensión con una cantidad infinita de generadores.

Teorema (M.'14)

S sí es finitamente presentada sobre R.

En la prueba usamos la opérada $\mathcal{A}_\infty \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{U}_\infty$ obtenida al añadir



El espacio de móduli de estructuras de $\mathcal{T}$-algebra en $\Sigma^m A$ es $Z = \operatorname{Spec} T$, donde $R \subset T$ es una extensión por 3 generadores.

Usamos además los siguientes resultados:

Teorema (Lyubashenko'08, Lurie'12)

La aplicación $\mathrm{Map}(\mathcal{U}_\infty, \mathcal{E}(M)) \to \mathrm{Map}(\mathcal{T}, \mathcal{E}(M))$ *inducida por* $\mathcal{T} \subset \mathcal{U}_\infty$ *da lugar a una biyección en* π_0 *para cualquier complejo* M.

Teorema (M.'11)

La aplicación $\mathrm{Map}(\mathcal{U}_\infty, \mathcal{O}) \to \mathrm{Map}(\mathcal{A}_\infty, \mathcal{O})$ *inducida por* $\mathcal{A}_\infty \subset \mathcal{U}_\infty$ *es una inclusión de componentes conexas.*

Corolario

La aplicación del primer teorema admite una retracción homotópica.

De aquí derivamos que S es un retracto homotópico de T sobre R, y por tanto finitamente presentada.

Presentación finita

Usamos además los siguientes resultados:

Teorema (Lyubashenko'08, Lurie'12)

La aplicación $\mathrm{Map}(\mathcal{U}_\infty, \mathcal{E}(M)) \to \mathrm{Map}(\mathcal{T}, \mathcal{E}(M))$ *inducida por* $\mathcal{T} \subset \mathcal{U}_\infty$ *da lugar a una biyección en* π_0 *para cualquier complejo* M.

Teorema (M.'11)

La aplicación $\mathrm{Map}(\mathcal{U}_\infty, \mathcal{O}) \to \mathrm{Map}(\mathcal{A}_\infty, \mathcal{O})$ *inducida por* $\mathcal{A}_\infty \subset \mathcal{U}_\infty$ *es una inclusión de componentes conexas.*

Corolario

La aplicación del primer teorema admite una retracción homotópica.

De aquí derivamos que S es un retracto homotópico de T sobre R, y por tanto finitamente presentada.

Presentación finita

Usamos además los siguientes resultados:

Teorema (Lyubashenko'08, Lurie'12)

La aplicación $\mathrm{Map}(\mathcal{U}_\infty, \mathcal{E}(M)) \to \mathrm{Map}(\mathcal{T}, \mathcal{E}(M))$ *inducida por* $\mathcal{T} \subset \mathcal{U}_\infty$ *da lugar a una biyección en* π_0 *para cualquier complejo* M*.*

Teorema (M.'11)

La aplicación $\mathrm{Map}(\mathcal{U}_\infty, \mathcal{O}) \to \mathrm{Map}(\mathcal{A}_\infty, \mathcal{O})$ *inducida por* $\mathcal{A}_\infty \subset \mathcal{U}_\infty$ *es una inclusión de componentes conexas.*

Corolario

La aplicación del primer teorema admite una retracción homotópica.

De aquí derivamos que S es un retracto homotópico de T sobre R, y por tanto finitamente presentada.

Presentación finita

Usamos además los siguientes resultados:

Teorema (Lyubashenko'08, Lurie'12)

La aplicación $\mathrm{Map}(\mathcal{U}_\infty, \mathcal{E}(M)) \to \mathrm{Map}(\mathcal{T}, \mathcal{E}(M))$ *inducida por* $\mathcal{T} \subset \mathcal{U}_\infty$ *da lugar a una biyección en* π_0 *para cualquier complejo* M*.*

Teorema (M.'11)

La aplicación $\mathrm{Map}(\mathcal{U}_\infty, \mathcal{O}) \to \mathrm{Map}(\mathcal{A}_\infty, \mathcal{O})$ *inducida por* $\mathcal{A}_\infty \subset \mathcal{U}_\infty$ *es una inclusión de componentes conexas.*

Corolario

La aplicación del primer teorema admite una retracción homotópica.

De aquí derivamos que S es un retracto homotópico de T sobre R, y por tanto finitamente presentada.