Realizando G-módulos: el dual de un problema de Steenrod

Antonio Viruel
(trabajo conjunto con Cristina Costoya)

Métodos Categóricos y Homotópicos en Álgebra, Geometría y Topología,
Granada, 6 y 7 de Junio 2014

¿A qué jugamos?

¿A qué jugamos?

Realizabilidad: Dada una estructura algebraica A y dado un invariante homotópico $I(-)$, encuéntrese un espacio X tal que $I(X) \cong A$.

¿A qué jugamos?

Realizabilidad: Dada una estructura algebraica A y dado un invariante homotópico $I(-)$, encuéntrese un espacio X tal que $I(X) \cong A$.

Ejemplo 1 (Espacios de Moore)

- G grupo abstracto
- H_* homología concentrada en un grado k.

  ¿Existe X tal que $H_*(X, \mathbb{Z}) \cong G$?

¿A qué jugamos?

Realizabilidad: Dada una estructura algebraica A y dado un invariante homotópico $I(-)$, encuéntrese un espacio X tal que $I(X) \cong A$.

Ejemplo 1 (Espacios de Moore)

- G grupo abstracto
- H_* homología concentrada en un grado k.

  ¿Existe X tal que $H_*(X, \mathbb{Z}) \cong G$?

Ejemplo 2 (Steenrod'60, G-espacios de Moore)

- Sea G un grupo actuando sobre un $\mathbb{Z}$-módulo finitamente generado M.
- H_* homología concentrada en un grado k.

  ¿Existe un G-espacio X tal que $H_*(X, \mathbb{Z}) \cong M$ como $\mathbb{Z}G$-módulos?

¿A qué jugamos?

Realizabilidad: Dada una estructura algebraica A y dado un invariante homotópico $I(-)$, encuéntrese un espacio X tal que $I(X) \cong A$.

Ejemplo 1 (Espacios de Moore)

- G grupo abstracto
- H_* homología concentrada en un grado k.

¿Existe X tal que $H_*(X, \mathbb{Z}) \cong G$?

Ejemplo 2 (Steenrod'60, G-espacios de Moore)

- Sea G un grupo actuando sobre un $\mathbb{Z}$-módulo finitamente generado M.
- H_* homología concentrada en un grado k.

¿Existe un G-espacio X tal que $H_*(X, \mathbb{Z}) \cong M$ como $\mathbb{Z}G$-módulos?

(G. Carlsson'81 primer ejemplo de $\mathbb{Z}G$-module M no realizable).

¿Por qué jugamos?

Realizabilidad: Dada una estructura algebraica A y dado un invariante homotópico $I(-)$, encuéntrese un espacio X tal que $I(X) \cong A$.

¿Por qué jugamos?

Realizabilidad: Dada una estructura algebraica A y dado un invariante homotópico $I(-)$, encuéntrese un espacio X tal que $I(X) \cong A$.

Como topólogos

Si la estructura algebraica A es especialmente interesante, esperamos que el espacio X que la realiza posea también propiedades muy especiales

¿Por qué jugamos?

Realizabilidad: Dada una estructura algebraica A y dado un invariante homotópico $I(-)$, encuéntrese un espacio X tal que $I(X) \cong A$.

Como topólogos

Si la estructura algebraica A es especialmente interesante, esperamos que el espacio X que la realiza posea también propiedades muy especiales (Teoría de Galois)

¿Por qué jugamos?

Realizabilidad: Dada una estructura algebraica A y dado un invariante homotópico $I(-)$, encuéntrese un espacio X tal que $I(X) \cong A$.

Como topólogos

Si la estructura algebraica A es especialmente interesante, esperamos que el espacio X que la realiza posea también propiedades muy especiales (Teoría de Galois)

Grupos p-compactos,

¿Por qué jugamos?

Realizabilidad: Dada una estructura algebraica A y dado un invariante homotópico $I(-)$, encuéntrese un espacio X tal que $I(X) \cong A$.

Como topólogos

Si la estructura algebraica A es especialmente interesante, esperamos que el espacio X que la realiza posea también propiedades muy especiales (Teoría de Galois)

Grupos p-compactos, Espacios de Moore y Eilenberg-MacLane,

¿Por qué jugamos?

Realizabilidad: Dada una estructura algebraica A y dado un invariante homotópico $I(-)$, encuéntrese un espacio X tal que $I(X) \cong A$.

Como topólogos

Si la estructura algebraica A es especialmente interesante, esperamos que el espacio X que la realiza posea también propiedades muy especiales (Teoría de Galois)

Grupos p-compactos, Espacios de Moore y Eilenberg-MacLane, 2-piezas de Postnikov,

¿Por qué jugamos?

Realizabilidad: Dada una estructura algebraica A y dado un invariante homotópico $I(-)$, encuéntrese un espacio X tal que $I(X) \cong A$.

Como topólogos

Si la estructura algebraica A es especialmente interesante, esperamos que el espacio X que la realiza posea también propiedades muy especiales (Teoría de Galois)

Grupos p-compactos, Espacios de Moore y Eilenberg-MacLane, 2-piezas de Postnikov,...

¿Por qué jugamos?

Realizabilidad: Dada una estructura algebraica A y dado un invariante homotópico $I(-)$, encuéntrese un espacio X tal que $I(X) \cong A$.

Como topólogos

Si la estructura algebraica A es especialmente interesante, esperamos que el espacio X que la realiza posea también propiedades muy especiales (Teoría de Galois)

> Grupos p-compactos, Espacios de Moore y Eilenberg-MacLane, 2-piezas de Postnikov,...

Como algebristas

Si el espacio X es especialmente interesante, esperamos que la estructura algebraica $I(X) \cong A$ posea también propiedades muy especiales

¿Por qué jugamos?

Realizabilidad: Dada una estructura algebraica A y dado un invariante homotópico $I(-)$, encuéntrese un espacio X tal que $I(X) \cong A$.

Como topólogos

Si la estructura algebraica A es especialmente interesante, esperamos que el espacio X que la realiza posea también propiedades muy especiales (Teoría de Galois)

> Grupos p-compactos, Espacios de Moore y Eilenberg-MacLane, 2-piezas de Postnikov,...

Como algebristas

Si el espacio X es especialmente interesante, esperamos que la estructura algebraica $I(X) \cong A$ posea también propiedades muy especiales (Teoría de la Representación)

¿Por qué jugamos?

Realizabilidad: Dada una estructura algebraica A y dado un invariante homotópico $I(-)$, encuéntrese un espacio X tal que $I(X) \cong A$.

Como topólogos

Si la estructura algebraica A es especialmente interesante, esperamos que el espacio X que la realiza posea también propiedades muy especiales (Teoría de Galois)

Grupos p-compactos, Espacios de Moore y Eilenberg-MacLane, 2-piezas de Postnikov,...

Como algebristas

Si el espacio X es especialmente interesante, esperamos que la estructura algebraica $I(X) \cong A$ posea también propiedades muy especiales (Teoría de la Representación)

Álgebras de Hopf,

¿Por qué jugamos?

Realizabilidad: Dada una estructura algebraica A y dado un invariante homotópico $I(-)$, encuéntrese un espacio X tal que $I(X) \cong A$.

Como topólogos

Si la estructura algebraica A es especialmente interesante, esperamos que el espacio X que la realiza posea también propiedades muy especiales (Teoría de Galois)

Grupos p-compactos, Espacios de Moore y Eilenberg-MacLane, 2-piezas de Postnikov,. . .

Como algebristas

Si el espacio X es especialmente interesante, esperamos que la estructura algebraica $I(X) \cong A$ posea también propiedades muy especiales (Teoría de la Representación)

Álgebras de Hopf, Álgebras de Leibniz/Loday, o Gerstenhaber,

¿Por qué jugamos?

Realizabilidad: Dada una estructura algebraica A y dado un invariante homotópico $I(-)$, encuéntrese un espacio X tal que $I(X) \cong A$.

Como topólogos

Si la estructura algebraica A es especialmente interesante, esperamos que el espacio X que la realiza posea también propiedades muy especiales (Teoría de Galois)

Grupos p-compactos, Espacios de Moore y Eilenberg-MacLane, 2-piezas de Postnikov,...

Como algebristas

Si el espacio X es especialmente interesante, esperamos que la estructura algebraica $I(X) \cong A$ posea también propiedades muy especiales (Teoría de la Representación)

Álgebras de Hopf, Álgebras de Leibniz/Loday, o Gerstenhaber,...

Nuestro juego/problema

(Kahn, realizabilidad de grupos)

Dado un grupo abstracto G y dado $\mathcal{E}(-)$ el grupo de clases de homotopía punteadas de autoequivalencias homotópicas punteadas, encuéntrese $X \in HoTop_*$ tal que $\mathcal{E}(X) \cong G$.

Nuestro juego/problema

(Kahn, realizabilidad de grupos)

Dado un grupo abstracto G y dado $\mathcal{E}(-)$ el grupo de clases de homotopía punteadas de autoequivalencias homotópicas punteadas, encuéntrese $X \in HoTop_*$ tal que $\mathcal{E}(X) \cong G$.

- Aparece de manera recurrente en monografías y listas de problemas abiertos:
  (D. Kahn'76 & '90, J. Rutter'97, Arkowitz'90, '01, Y. Félix'10)

Nuestro juego/problema

(Kahn, realizabilidad de grupos)

Dado un grupo abstracto G y dado $\mathcal{E}(-)$ el grupo de clases de homotopía punteadas de autoequivalencias homotópicas punteadas, encuéntrese $X \in HoTop_*$ tal que $\mathcal{E}(X) \cong G$.

- Aparece de manera recurrente en monografías y listas de problemas abiertos:
  (D. Kahn'76 & '90, J. Rutter'97, Arkowitz'90, '01, Y. Félix'10)
- El único procedimiento general hasta la fecha es cuando $G \cong \mathrm{Aut}(\pi)$, siendo π un grupo.

Nuestro juego/problema

(Kahn, realizabilidad de grupos)

Dado un grupo abstracto G y dado $\mathcal{E}(-)$ el grupo de clases de homotopía punteadas de autoequivalencias homotópicas punteadas, encuéntrese $X \in HoTop_*$ tal que $\mathcal{E}(X) \cong G$.

- Aparece de manera recurrente en monografías y listas de problemas abiertos:
  (D. Kahn'76 & '90, J. Rutter'97, Arkowitz'90, '01, Y. Félix'10)
- El único procedimiento general hasta la fecha es cuando $G \cong \mathrm{Aut}(\pi)$, siendo π un grupo. Entonces, $X = K(\pi, n)$ ya que $\mathcal{E}(X) \cong \mathrm{Aut}(\pi)$

Nuestro juego/problema

(Kahn, realizabilidad de grupos)

Dado un grupo abstracto G y dado $\mathcal{E}(-)$ el grupo de clases de homotopía punteadas de autoequivalencias homotópicas punteadas, encuéntrese $X \in HoTop_*$ tal que $\mathcal{E}(X) \cong G$.

- Aparece de manera recurrente en monografías y listas de problemas abiertos:
  (D. Kahn'76 & '90, J. Rutter'97, Arkowitz'90, '01, Y. Félix'10)
- El único procedimiento general hasta la fecha es cuando $G \cong \mathrm{Aut}(\pi)$, siendo π un grupo. Entonces, $X = K(\pi, n)$ ya que $\mathcal{E}(X) \cong \mathrm{Aut}(\pi)$ (pero no funciona para cualquier grupo: $\mathbb{Z}/p \ncong \mathrm{Aut}(\pi)$, p impar)

Nuestro juego/problema

(Kahn, realizabilidad de grupos)

Dado un grupo abstracto G y dado $\mathcal{E}(-)$ el grupo de clases de homotopía punteadas de autoequivalencias homotópicas punteadas, encuéntrese $X \in HoTop_*$ tal que $\mathcal{E}(X) \cong G$.

- Aparece de manera recurrente en monografías y listas de problemas abiertos:
  (D. Kahn'76 & '90, J. Rutter'97, Arkowitz'90, '01, Y. Félix'10)
- El único procedimiento general hasta la fecha es cuando $G \cong \mathrm{Aut}(\pi)$, siendo π un grupo. Entonces, $X = K(\pi, n)$ ya que $\mathcal{E}(X) \cong \mathrm{Aut}(\pi)$ (pero no funciona para cualquier grupo: $\mathbb{Z}/p \ncong \mathrm{Aut}(\pi)$, p impar)
- (Arkowitz-Lupton'00) $\mathbb{Z}/2$ es realizable como $\mathcal{E}(X)$ para X un espacio racional simplemente conexo.

Nuestro juego/problema

(Kahn, realizabilidad de grupos)

Dado un grupo abstracto G y dado $\mathcal{E}(-)$ el grupo de clases de homotopía punteadas de autoequivalencias homotópicas punteadas, encuéntrese $X \in HoTop_*$ tal que $\mathcal{E}(X) \cong G$.

- Aparece de manera recurrente en monografías y listas de problemas abiertos:
  (D. Kahn'76 & '90, J. Rutter'97, Arkowitz'90, '01, Y. Félix'10)
- El único procedimiento general hasta la fecha es cuando $G \cong \mathrm{Aut}(\pi)$, siendo π un grupo. Entonces, $X = K(\pi, n)$ ya que $\mathcal{E}(X) \cong \mathrm{Aut}(\pi)$ (pero no funciona para cualquier grupo: $\mathbb{Z}/p \ncong \mathrm{Aut}(\pi)$, p impar)
- (Arkowitz-Lupton'00) $\mathbb{Z}/2$ es realizable como $\mathcal{E}(X)$ para X un espacio racional simplemente conexo.

¿Qué grupos finitos son realizables como $\mathcal{E}(X)$ para X racional 1-conexo?

Realizabilidad de grupos: nueva perspectiva

Idea. Usar Teoría de Grafos:

Realizabilidad de grupos: nueva perspectiva

Idea. Usar Teoría de Grafos:

Teorema (Frucht'39, Realizabilidad en *Graph*)

Todo grupo finito G es realizable por un grafo $\mathcal{G}$ que es finito, conexo y simple. Esto es $G \cong \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$.

Realizabilidad de grupos: nueva perspectiva

Idea. Usar Teoría de Grafos:

Teorema (Frucht'39, Realizabilidad en *Graph*)

Todo grupo finito G es realizable por un grafo $\mathcal{G}$ que es finito, conexo y simple. Esto es $G \cong \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$.

Nuestro problema (replanteado)

Sea $\mathcal{G} = (V, E)$ un grafo finito, simple, y conexo (con más de un vértice). ¿Existe un espacio X tal que $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}) \cong \mathcal{E}(X)$?

Realizabilidad de grupos: nueva perspectiva

Idea. Usar Teoría de Grafos:

Teorema (Frucht'39, Realizabilidad en *Graph*)

Todo grupo finito G es realizable por un grafo $\mathcal{G}$ que es finito, conexo y simple. Esto es $G \cong \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$.

Nuestro problema (replanteado)

Sea $\mathcal{G} = (V, E)$ un grafo finito, simple, y conexo (con más de un vértice). ¿Existe un espacio X tal que $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}) \cong \mathcal{E}(X)$?

$$\begin{aligned} \text{grupos} &\longrightarrow \text{grafos} \\ \text{grafos} &\longrightarrow \text{CDGA's} \\ \text{CDGA's} &\longrightarrow \text{tipos de homotopía racional} \end{aligned}$$

Realizabilidad de grupos: técnicas

- ▷ Primero, nos restrigimos a $Graph_{fm} \subset Graph$.

Realizabilidad de grupos: técnicas

▷ Primero, nos restrigimos a $Graph_{fm} \subset Graph$.

- $\mathcal{G} = (V, E)$, $|V| > 1$
- $f : \mathcal{G}_1 \hookrightarrow \mathcal{G}_2$ tal que $[v, w]$ arista en $\mathcal{G}_1$ sii $[f(v), f(w)]$ arista en $\mathcal{G}_2$

Realizabilidad de grupos: técnicas

- Primero, nos restrigimos a $Graph_{fm} \subset Graph$.
- Luego, construimos

$$A : Graph_{fm} \longrightarrow DGA$$

Realizabilidad de grupos: técnicas

- Primero, nos restrigimos a $\mathit{Graph}_{fm} \subset \mathit{Graph}$.
- Luego, construimos

$$A : \mathit{Graph}_{fm} \longrightarrow \mathit{DGA}$$

(basado en un ejemplo de Arkowitz-Lupton, modificación de otro de Halperin-Oprea)

Realizabilidad de grupos: técnicas

- Primero, nos restrigimos a $Graph_{fm} \subset Graph$.
- Luego, construimos

$$A : Graph_{fm} \longrightarrow DGA$$

$$(A_{\mathcal{G}}, d) = \big(\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, z) \otimes \Lambda(x_v, z_v | v \in V), d\big)$$

Realizabilidad de grupos: técnicas

- Primero, nos restrigimos a $Graph_{fm} \subset Graph$.
- Luego, construimos

$$A : Graph_{fm} \longrightarrow DGA$$

$$(A_{\mathcal{G}}, d) = \big(\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, z) \otimes \Lambda(x_v, z_v | v \in V), d\big)$$

- generadores en grados: $|x_1| = 8, |x_2| = 10, |y_1| = 33, |y_2| = 35,$ $|y_3| = 37, |z| = 119, |x_v| = 40, |z_v| = 119,$

Realizabilidad de grupos: técnicas

▷ Primero, nos restrigimos a $Graph_{fm} \subset Graph$.

▷ Luego, construimos

$$A : Graph_{fm} \longrightarrow DGA$$

$$(A_{\mathcal{G}}, d) = \big(\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, z) \otimes \Lambda(x_v, z_v | v \in V), d\big)$$

- generadores en grados: $|x_1| = 8, |x_2| = 10, |y_1| = 33, |y_2| = 35$, $|y_3| = 37, |z| = 119, |x_v| = 40, |z_v| = 119$,
- diferenciales:

$$\begin{array}{llll} d(x_1) = & 0 & d(y_3) = & x_1 x_2^3 \\ d(x_2) = & 0 & d(x_v) = & 0 \\ d(y_1) = & x_1^3 x_2 & d(z) = & y_1 y_2 x_1^4 x_2^2 - y_1 y_3 x_1^5 x_2 + y_2 y_3 x_1^6 + x_1^{15} + x_2^{12} \\ d(y_2) = & x_1^2 x_2^2 & d(z_v) = & x_v^3 + \sum_{[v,w] \in E} x_v x_w x_2^4 \end{array}$$

Realizabilidad de grupos: técnicas

- Primero, nos restrigimos a $\mathit{Graph}_{fm} \subset \mathit{Graph}$.
- Luego, construimos

$$A : \mathit{Graph}_{fm} \longrightarrow \mathit{DGA}$$
$$(A_{\mathcal{G}}, d) = \big(\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, z) \otimes \Lambda(x_v, z_v | v \in V), d\big)$$

- generadores en grados: $|x_1| = 8, |x_2| = 10, |y_1| = 33, |y_2| = 35,$ $|y_3| = 37, |z| = 119, |x_v| = 40, |z_v| = 119,$
- diferenciales:

$$\begin{array}{llll} d(x_1) = & 0 & d(y_3) = & x_1 x_2^3 \\ d(x_2) = & 0 & d(x_v) = & 0 \\ d(y_1) = & x_1^3 x_2 & d(z) = & y_1 y_2 x_1^4 x_2^2 - y_1 y_3 x_1^5 x_2 + y_2 y_3 x_1^6 + x_1^{15} + x_2^{12} \\ d(y_2) = & x_1^2 x_2^2 & d(z_v) = & x_v^3 + \sum_{[v,w]\in E} x_v x_w x_2^4 \end{array}$$

- A es contravariante (los morfismos son como se esperan).

Realizabilidad de grupos: técnicas

- Primero, nos restrigimos a $Graph_{fm} \subset Graph$.
- Luego, construimos

$$A : Graph_{fm} \longrightarrow DGA$$

$$(A_{\mathcal{G}}, d) = (\underbrace{\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, z)}_{\text{Homotópicamente Rígida}} \otimes \underbrace{\Lambda(x_v, z_v | v \in V)}_{\text{Codifica } \mathcal{G}}, d)$$

- generadores en grados: $|x_1| = 8, |x_2| = 10, |y_1| = 33, |y_2| = 35,$ $|y_3| = 37, |z| = 119, |x_v| = 40, |z_v| = 119,$
- diferenciales:

$$\begin{array}{llll} d(x_1) = & 0 & d(y_3) = & x_1x_2^3 \\ d(x_2) = & 0 & d(x_v) = & 0 \\ d(y_1) = & x_1^3x_2 & d(z) = & y_1y_2x_1^4x_2^2 - y_1y_3x_1^5x_2 + y_2y_3x_1^6 + x_1^{15} + x_2^{12} \\ d(y_2) = & x_1^2x_2^2 & d(z_v) = & x_v^3 + \sum_{[v,w]\in E} x_vx_wx_2^4 \end{array}$$

- A es contravariante (los morfismos son como se esperan).

Realizabilidad de grupos: técnicas

- Primero, nos restrigimos a $Graph_{fm} \subset Graph$.
- Luego, construimos

$$A : Graph_{fm} \longrightarrow DGA$$

$$(A_{\mathcal{G}}, d) = \big(\underbrace{\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, z)}_{\text{Homotópicamente Rígida}} \otimes \underbrace{\Lambda(x_v, z_v | v \in V)}_{\text{Codifica } \mathcal{G}}, d\big)$$

- generadores en grados: $|x_1| = 8, |x_2| = 10, |y_1| = 33, |y_2| = 35,$ $|y_3| = 37, |z| = 119, |x_v| = 40, |z_v| = 119,$
- diferenciales:

$$\begin{aligned}
d(x_1) &= 0 & d(y_3) &= x_1 x_2^3 \\
d(x_2) &= 0 & d(x_v) &= 0 \\
d(y_1) &= x_1^3 x_2 & d(z) &= y_1 y_2 x_1^4 x_2^2 - y_1 y_3 x_1^5 x_2 + y_2 y_3 x_1^6 + x_1^{15} + x_2^{12} \\
d(y_2) &= x_1^2 x_2^2 & d(z_v) &= x_v^3 + \textstyle\sum_{[v,w]\in E} x_v x_w (u_1 x_1^5 + u_2 x_2^4),\ u_1, u_2 \in \mathbb{Q}^*
\end{aligned}$$

- A es contravariante (los morfismos son como se esperan).

Realizabilidad de grupos: resultados

Teorema (Costoya-V.)

Sean $\mathcal{G}$, y $A_{\mathcal{G}}$ definidos como antes. Entonces:

- Existe una sucesión exacta corta escindida

$$K \to \mathrm{Aut}(A_{\mathcal{G}}) \to \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$$

  donde K es abeliano y libre de torsión.

- $A_{\mathcal{G}}$ es un álgebra elíptica (y por tanto con dualidad de Poincaré). Sea $X_{\mathcal{G}}$ el espacio racional elíptico 1-conexo cuyo modelo minimal de Sullivan es $A_{\mathcal{G}}$. Entonces, el monoide de clases homotópicas de autoaplicaciones de $X_{\mathcal{G}}$ es

$$[X_{\mathcal{G}}, X_{\mathcal{G}}] = \{f_0, f_1\} \cup \mathrm{Aut}(\mathcal{G})$$

Realizabilidad de grupos: resultados

Teorema (Costoya-V.)

Todo grupo finito G es realizable por infinitos espacios racionales elípticos X (no homotópicamente equivalentes). Esto es, $G \cong \mathcal{E}(X)$.

Realizabilidad de grupos: resultados

Teorema (Costoya-V.)

Todo grupo finito G es realizable por infinitos espacios racionales elípticos X (no homotópicamente equivalentes). Esto es, $G \cong \mathcal{E}(X)$. Además, podemos elegir X para que sea la racionalización de una variedad diferenciable.

Realizabilidad de grupos: resultados

Teorema (Costoya-V.)

Todo grupo finito G es realizable por infinitos espacios racionales elípticos X (no homotópicamente equivalentes). Esto es, $G \cong \mathcal{E}(X)$. Además, podemos elegir X para que sea la racionalización de una variedad diferenciable.

En particular:

- Existen infinitos espacios homotópicamente rígidos
  (proyecto inacabado de Kahn para descomponer espacios)

Realizabilidad de grupos: resultados

Teorema (Costoya-V.)

Todo grupo finito G es realizable por infinitos espacios racionales elípticos X (no homotópicamente equivalentes). Esto es, $G \cong \mathcal{E}(X)$. Además, podemos elegir X para que sea la racionalización de una variedad diferenciable.

En particular:

- Existen infinitos espacios homotópicamente rígidos (proyecto inacabado de Kahn para descomponer espacios)
- Existen infinitas variedades diferenciales inflexibles (problema de Gromov)

Realizabilidad de grupos: resultados

Teorema (Costoya-V.)

Todo grupo finito G es realizable por infinitos espacios racionales elípticos X (no homotópicamente equivalentes). Esto es, $G \cong \mathcal{E}(X)$. Además, podemos elegir X para que sea la racionalización de una variedad diferenciable.

En particular:

- Existen infinitos espacios homotópicamente rígidos (proyecto inacabado de Kahn para descomponer espacios)
- Existen infinitas variedades diferenciales inflexibles (problema de Gromov)

Definición (variedad diferencial inflexible)

Una variedad diferenciable y orientable M se dice inflexible si

$$\{\deg f \mid f : M \to M \text{ continuous}\} \subset \{-1, 0, 1\}$$

Realizabilidad de grupos: resultados

Teorema (Costoya-V.)

Todo grupo finito G es realizable por infinitos espacios racionales elípticos X (no homotópicamente equivalentes). Esto es, $G \cong \mathcal{E}(X)$. Además, podemos elegir X para que sea la racionalización de una variedad diferenciable.

En particular:

- Existen infinitos espacios homotópicamente rígidos (proyecto inacabado de Kahn para descomponer espacios)
- Existen infinitas variedades diferenciales inflexibles (problema de Gromov)

Definición (variedad diferencial inflexible)

Una variedad diferenciable y orientable M se dice inflexible si

$$\{\deg f \mid f : M \to M \text{ continuous}\} \subset \{-1, 0, 1\}$$

¿Qué pasa si G actúa sobre un $\mathbb{Z}$-módulo M?

El nuevo juego

- Estructura algebraica

El nuevo juego

- Estructura algebraica (G, M).

  G es un grupo, M es un $\mathbb{Z}G$-módulo finitamente generado.

El nuevo juego

- Estructura algebraica (G, M).

  G es un grupo, M es un $\mathbb{Z}G$-módulo finitamente generado.
- Invariante homotópico

El nuevo juego

- Estructura algebraica (G, M).

  G es un grupo, M es un $\mathbb{Z}G$-módulo finitamente generado.

- Invariante homotópico $\big(\mathcal{E}(-), \pi_k(-)\big)$.

  $\pi_k(-)$ es un $\mathbb{Z}\mathcal{E}(-)$-módulo.

El nuevo juego

- Estructura algebraica (G, M).

  G es un grupo, M es un $\mathbb{Z}G$-módulo finitamente generado.
- Invariante homotópico $\big(\mathcal{E}(-), \pi_k(-)\big)$.

  $\pi_k(-)$ es un $\mathbb{Z}\mathcal{E}(-)$-módulo.

Nuestro problema* (realizabilidad de acciones)

¿Existe una pieza de Postnikov finita X tal que el $\mathbb{Z}G$-módulo M es isomorfo al $\mathbb{Z}\mathcal{E}(X)$-módulo $\pi_k(X)$, para algún $k \geq 2$?

El nuevo juego

- Estructura algebraica (G, M).

  G es un grupo, M es un $\mathbb{Z}G$-módulo finitamente generado.
- Invariante homotópico $\big(\mathcal{E}(-), \pi_k(-)\big)$.

  $\pi_k(-)$ es un $\mathbb{Z}\mathcal{E}(-)$-módulo.

Nuestro problema* (realizabilidad de acciones)

¿Existe una pieza de Postnikov finita X tal que el $\mathbb{Z}G$-módulo M es isomorfo al $\mathbb{Z}\mathcal{E}(X)$-módulo $\pi_k(X)$, para algún $k \geq 2$?

▷ Es un "dual" del problema de Steenrod:

El nuevo juego

- Estructura algebraica (G, M).

  G es un grupo, M es un $\mathbb{Z}G$-módulo finitamente generado.
- Invariante homotópico $\big(\mathcal{E}(-), \pi_k(-)\big)$.

  $\pi_k(-)$ es un $\mathbb{Z}\mathcal{E}(-)$-módulo.

Nuestro problema* (realizabilidad de acciones)

¿Existe una pieza de Postnikov finita X tal que el $\mathbb{Z}G$-módulo M es isomorfo al $\mathbb{Z}\mathcal{E}(X)$-módulo $\pi_k(X)$, para algún $k \geq 2$?

▷ Es un "dual" del problema de Steenrod:

- no buscamos un G-espacio X sino $G \cong \mathcal{E}(X)$

El nuevo juego

- Estructura algebraica (G, M).

  G es un grupo, M es un $\mathbb{Z}G$-módulo finitamente generado.
- Invariante homotópico $\big(\mathcal{E}(-), \pi_k(-)\big)$.

  $\pi_k(-)$ es un $\mathbb{Z}\mathcal{E}(-)$-módulo.

Nuestro problema* (realizabilidad de acciones)

¿Existe una pieza de Postnikov finita X tal que el $\mathbb{Z}G$-módulo M es isomorfo al $\mathbb{Z}\mathcal{E}(X)$-módulo $\pi_k(X)$, para algún $k \geq 2$?

▷ Es un "dual" del problema de Steenrod:

- no buscamos un G-espacio X sino $G \cong \mathcal{E}(X)$
- pedimos que X sea una pieza de Postnikov. Si $X = K(M, k)$ entonces $G \cong \mathcal{E}(X) \cong \mathrm{Aut}(M)$ (!)

El nuevo juego

- Estructura algebraica (G, M).

  G es un grupo, M es un $\mathbb{Z}G$-módulo finitamente generado.
- Invariante homotópico $\big(\mathcal{E}(-), \pi_k(-)\big)$.

  $\pi_k(-)$ es un $\mathbb{Z}\mathcal{E}(-)$-módulo.

Nuestro problema* (realizabilidad de acciones)

¿Existe una pieza de Postnikov finita X tal que el $\mathbb{Z}G$-módulo M es isomorfo al $\mathbb{Z}\mathcal{E}(X)$-módulo $\pi_k(X)$, para algún $k \geq 2$?

▷ Es un "dual"del problema de Steenrod:

- no buscamos un G-espacio X sino $G \cong \mathcal{E}(X)$
- pedimos que X sea una pieza de Postnikov. Si $X = K(M, k)$ entonces $G \cong \mathcal{E}(X) \cong \mathrm{Aut}(M)$ (!)
- pediremos además que $\mathcal{E}(X)$ actúe trivialmente sobre $\pi_i(X)$ para $i \neq k$

El nuevo juego

- Estructura algebraica (G, M).

  G es un grupo, M es un $\mathbb{Z}G$-módulo finitamente generado.
- Invariante homotópico $\big(\mathcal{E}(-), \pi_k(-)\big)$.

  $\pi_k(-)$ es un $\mathbb{Z}\mathcal{E}(-)$-módulo.

Nuestro problema* (realizabilidad de acciones)

¿Existe una pieza de Postnikov finita X tal que el $\mathbb{Z}G$-módulo M es isomorfo al $\mathbb{Z}\mathcal{E}(X)$-módulo $\pi_k(X)$, para algún $k \geq 2$?

▷ Es un "dual" del problema de Steenrod:

- no buscamos un G-espacio X sino $G \cong \mathcal{E}(X)$
- pedimos que X sea una pieza de Postnikov. Si $X = K(M, k)$ entonces $G \cong \mathcal{E}(X) \cong \mathrm{Aut}(M)$ (!)
- pediremos además que $\mathcal{E}(X)$ actúe trivialmente sobre $\pi_i(X)$ para $i \neq k$

▷ Implica la realizabilidad de grupos.

El nuevo juego **racional**

- Estructura algebraica (G, V)

  G es un grupo, V es un $\mathbb{Q}G$-módulo finitamente generado.
- Invariante homotópico $(\mathcal{E}(-), \pi_k(-))$

  $\pi_k(-)$ es un $\mathbb{Q}\mathcal{E}(-)$-módulo.

Nuestro problema* (realizabilidad de acciones)

¿Existe una pieza de Postnikov finita X tal que el $\mathbb{Q}G$-módulo V es isomorfo al $\mathbb{Q}\mathcal{E}(X)$-módulo $\pi_k(X)$, para algún $k \geq 2$?

▷ Es un "dual" del problema de Steenrod:

- no buscamos un G-espacio X sino $G \cong \mathcal{E}(X)$
- pedimos que X sea una pieza de Postnikov. Si $X = K(M, k)$ entonces $G \cong \mathcal{E}(X) \cong \mathrm{Aut}(M)$ (!)
- pediremos además que $\mathcal{E}(X)$ actúe trivialmente sobre $\pi_i(X)$ para $i \neq k$

▷ Implica la realizabilidad de grupos.

Realizabilidad de acciones: técnicas

Realizabilidad de acciones: técnicas

Idea. Introducir Teoría de Invariantes.

Realizabilidad de acciones: técnicas

Idea. Introducir Teoría de Invariantes.

▷ G actúa sobre $\mathbb{Q}[V]$: dado $g \in G$, $p \in \mathbb{Q}[V]$, definimos $(gp)(v) = p(g^{-1}v)$.

Realizabilidad de acciones: técnicas

Idea. Introducir Teoría de Invariantes.

- G actúa sobre $\mathbb{Q}[V]$: dado $g \in G$, $p \in \mathbb{Q}[V]$, definimos $(gp)(v) = p(g^{-1}v)$.
- Función G-invariante: $p \in \mathbb{Q}[V]$ tal que para todo $g \in G$, $gp = p$.

Realizabilidad de acciones: técnicas

Idea. Introducir Teoría de Invariantes.

- G actúa sobre $\mathbb{Q}[V]$: dado $g \in G$, $p \in \mathbb{Q}[V]$, definimos $(gp)(v) = p(g^{-1}v)$.
- Función G-invariante: $p \in \mathbb{Q}[V]$ tal que para todo $g \in G$, $gp = p$.
- Anillo de invariantes $\mathbb{Q}[V]^G$: todas las funciones G-invariantes en $\mathbb{Q}[V]$

(Hilbert, Noether, . . .)

Realizabilidad de acciones: técnicas

Idea. Introducir Teoría de Invariantes.

- ▷ G actúa sobre $\mathbb{Q}[V]$: dado $g \in G$, $p \in \mathbb{Q}[V]$, definimos $(gp)(v) = p(g^{-1}v)$.
- ▷ Función G-invariante: $p \in \mathbb{Q}[V]$ tal que para todo $g \in G$, $gp = p$.
- ▷ Anillo de invariantes $\mathbb{Q}[V]^G$: todas las funciones G-invariantes en $\mathbb{Q}[V]$

(Hilbert, Noether, ...)

Si G es finito y V es un $\mathbb{Q}$-módulo fiel, entonces

- El cuerpo de fracciones $\mathbb{Q}(V)$ es una extensión de Galois de $\mathbb{Q}(V)^G$ con grupo de Galois group G.

Realizabilidad de acciones: técnicas

Idea. Introducir Teoría de Invariantes.

- G actúa sobre $\mathbb{Q}[V]$: dado $g \in G$, $p \in \mathbb{Q}[V]$, definimos $(gp)(v) = p(g^{-1}v)$.
- Función G-invariante: $p \in \mathbb{Q}[V]$ tal que para todo $g \in G$, $gp = p$.
- Anillo de invariantes $\mathbb{Q}[V]^G$: todas las funciones G-invariantes en $\mathbb{Q}[V]$

(Hilbert, Noether, ...)

Si G es finito y V es un $\mathbb{Q}$-módulo fiel, entonces

- El cuerpo de fracciones $\mathbb{Q}(V)$ es una extensión de Galois de $\mathbb{Q}(V)^G$ con grupo de Galois group G.
- $\mathbb{Q}[V]^G$ es finitamente generado como álgebra.

Realizabilidad de acciones: técnicas

Corolario (caracterización de un subgrupo finito $G < GL(V)$)

Existen $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{Q}[V]$ tales que, para cualquier $f \in GL(V)$

$$f \in G \quad \text{si y sólo si} \quad fp_i = p_i,\ \forall i$$

Realizabilidad de acciones: técnicas

Corolario (caracterización de un subgrupo finito $G < GL(V)$)

Existen $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{Q}[V]$ tales que, para cualquier $f \in GL(V)$

$$f \in G \quad \text{si y sólo si} \quad fp_i = p_i,\ \forall i$$

Modificamos esas formas algebraicas:

Lema

Existen $q_0, q_1, \ldots q_r \in \mathbb{Q}[V]^G$ formas algebraicas tales que:

Realizabilidad de acciones: técnicas

Corolario (caracterización de un subgrupo finito $G < GL(V)$)

Existen $p_1, \ldots, p_r \in \mathbb{Q}[V]$ tales que, para cualquier $f \in GL(V)$

$$f \in G \quad \text{si y sólo si} \quad fp_i = p_i, \ \forall i$$

Modificamos esas formas algebraicas:

Lema

Existen $q_0, q_1, \ldots q_r \in \mathbb{Q}[V]^G$ formas algebraicas tales que:

- $q_0 = \sum_{1}^{N} \underset{\neq 0}{\lambda_j} v_j^2$, para cierta base de V^* ($N = dim_{\mathbb{Q}} V$).

Realizabilidad de acciones: técnicas

Corolario (caracterización de un subgrupo finito $G < GL(V)$)

Existen $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{Q}[V]$ tales que, para cualquier $f \in GL(V)$

$$f \in G \quad \text{si y sólo si} \quad fp_i = p_i,\ \forall i$$

Modificamos esas formas algebraicas:

Lema

Existen $q_0, q_1, \dots q_r \in \mathbb{Q}[V]^G$ formas algebraicas tales que:

- $q_0 = \sum_{1}^{N} \underset{\neq 0}{\lambda_j} v_j^2$, para cierta base de V^* ($N = dim_{\mathbb{Q}} V$).
- $deg(q_i) < \deg(q_{i+1})$ para todo i.

Realizabilidad de acciones: técnicas

Corolario (caracterización de un subgrupo finito $G < GL(V)$)

Existen $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{Q}[V]$ tales que, para cualquier $f \in GL(V)$

$$f \in G \quad \text{si y sólo si} \quad fp_i = p_i, \ \forall i$$

Modificamos esas formas algebraicas:

Lema

Existen $q_0, q_1, \dots q_r \in \mathbb{Q}[V]^G$ formas algebraicas tales que:

- $q_0 = \sum_{1}^{N} \underset{\neq 0}{\lambda_j} v_j^2$, para cierta base de V^* ($N = dim_{\mathbb{Q}} V$).
- $deg(q_i) < \deg(q_{i+1})$ para todo i.
- Dado $f \in GL(V)$, $f \in G$ si y sólo si $fq_i = q_i$, para todo i. Por tanto

$$G = O(q_0, q_1, \dots, q_r).$$

Realizabilidad de acciones: técnicas

Demostración:

Realizabilidad de acciones: técnicas

Demostración:

▷ Para una base cualquiera de V^*, la siguiente forma definida positiva: $p_0 = \sum_{j=1}^{N} w_j^2$, y la hacemos G-invariante mediante un operador de Reynolds:

$$q_0 = \sum_{g \in G} g p_0 \quad G \text{ finito}$$

Realizabilidad de acciones: técnicas

Demostración:

▷ Para una base cualquiera de V^*, la siguiente forma definida positiva: $p_0 = \sum_{j=1}^{N} w_j^2$, y la hacemos G-invariante mediante un operador de Reynolds:

$$q_0 = \sum_{g \in G} g p_0 \quad G \text{ finito}$$

▷ Ahora, q_0 es una forma cuadrática G-invariante y definida positiva. Por tanto, para una base que fijamos $\{v_1, \ldots, v_N\} \subset V^*$

$$q_0 = \sum_j \lambda_j v_j^2$$

Realizabilidad de acciones: técnicas

Demostración:

▷ Para una base cualquiera de V^*, la siguiente forma definida positiva: $p_0 = \sum_{j=1}^{N} w_j^2$, y la hacemos G-invariante mediante un operador de Reynolds:

$$q_0 = \sum_{g \in G} g p_0 \quad G \text{ finito}$$

▷ Ahora, q_0 es una forma cuadrática G-invariante y definida positiva. Por tanto, para una base que fijamos $\{v_1, \ldots, v_N\} \subset V^*$

$$q_0 = \sum_{j} \lambda_j v_j^2$$

▷ Definimos recursivamente $q_i = q_{i-1} p_i$

Realizabilidad de acciones: técnicas

Demostración:

▷ Para una base cualquiera de V^*, la siguiente forma definida positiva: $p_0 = \sum_{j=1}^{N} w_j^2$, y la hacemos G-invariante mediante un operador de Reynolds:

$$q_0 = \sum_{g \in G} g p_0 \quad \text{G finito}$$

▷ Ahora, q_0 es una forma cuadrática G-invariante y definida positiva. Por tanto, para una base que fijamos $\{v_1, \dots, v_N\} \subset V^*$

$$q_0 = \sum_j \lambda_j v_j^2$$

▷ Definimos recursivamente $q_i = q_{i-1} p_i$
Es claro que $\deg(q_i) < \deg(q_{i+1})$ y $q_i \in \mathbb{Q}[V]^G$.

Realizabilidad de acciones: técnicas

Demostración:

▷ Para una base cualquiera de V^*, la siguiente forma definida positiva: $p_0 = \sum_{j=1}^{N} w_j^2$, y la hacemos G-invariante mediante un operador de Reynolds:

$$q_0 = \sum_{g \in G} g p_0 \quad G \text{ finito}$$

▷ Ahora, q_0 es una forma cuadrática G-invariante y definida positiva. Por tanto, para una base que fijamos $\{v_1, \ldots, v_N\} \subset V^*$

$$q_0 = \sum_j \lambda_j v_j^2$$

▷ Definimos recursivamente $q_i = q_{i-1} p_i$
Es claro que $\deg(q_i) < \deg(q_{i+1})$ y $q_i \in \mathbb{Q}[V]^G$.

▷ $\{q_0, \ldots, q_r\}$ determina G:

Realizabilidad de acciones: técnicas

Demostración:

▷ Para una base cualquiera de V^*, la siguiente forma definida positiva: $p_0 = \sum_{j=1}^N w_j^2$, y la hacemos G-invariante mediante un operador de Reynolds:

$$q_0 = \sum_{g\in G} gp_0 \quad G \text{ finito}$$

▷ Ahora, q_0 es una forma cuadrática G-invariante y definida positiva. Por tanto, para una base que fijamos $\{v_1, \dots, v_N\} \subset V^*$

$$q_0 = \sum_j \lambda_j v_j^2$$

▷ Definimos recursivamente $q_i = q_{i-1}p_i$
Es claro que $\deg(q_i) < \deg(q_{i+1})$ y $q_i \in \mathbb{Q}[V]^G$.

▷ $\{q_0, \dots, q_r\}$ determina G: sea $f \in GL(V)$ tal que $fq_i = q_i$ para todo i. Como $fq_0 = q_0$, por recursividad y usando que $\mathbb{Q}[V]$ es un dominio de factorización única, obtenemos $fp_i = p_i$ para todo i, y por tanto $f \in G$.

□

Realizabilidad de acciones: resultado

$$\mathcal{M}_n = \Big(\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, z, v_j \mid j = 1, \dots, N), d\Big)$$

$$\begin{aligned}
\deg x_1 &= 8, & d(x_1) &= 0 \\
\deg x_2 &= 10, & d(x_2) &= 0 \\
\deg y_1 &= 33, & d(y_1) &= x_1^3 x_2 \\
\deg y_2 &= 35, & d(y_2) &= x_1^2 x_2^2 \\
\deg y_3 &= 37, & d(y_3) &= x_1 x_2^3 \\
\deg v_j &= 40, & d(v_j) &= 0 \\
\deg z &= 80n + 39, & d(z) &= \sum_{i=1}^{r} q_i x_1^{10n+5-5\deg(q_i)} + q_0(x_1^{10n-5} + x_2^{8n-4}) \\
&& &+ x_1^{10(n-1)}(y_1 y_2 x_1^4 x_2^2 - y_1 y_3 x_1^5 x_2 + y_2 y_3 x_1^6) \\
&& &+ x_1^{10n+5} + x_2^{8n+4}.
\end{aligned}$$

Realizabilidad de acciones: resultado

$$\mathcal{M}_n = \Big(\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, z, v_j \mid j = 1, \dots, N), d\Big)$$

$$\begin{aligned}
\deg x_1 &= 8, & d(x_1) &= 0\\
\deg x_2 &= 10, & d(x_2) &= 0\\
\deg y_1 &= 33, & d(y_1) &= x_1^3 x_2\\
\deg y_2 &= 35, & d(y_2) &= x_1^2 x_2^2\\
\deg y_3 &= 37, & d(y_3) &= x_1 x_2^3\\
\deg v_j &= 40, & d(v_j) &= 0\\
\deg z &= 80n+39, & d(z) &= \sum_{i=1}^{r} q_i x_1^{10n+5-5\deg(q_i)} + q_0(x_1^{10n-5} + x_2^{8n-4})\\
& & &+ x_1^{10(n-1)}(y_1 y_2 x_1^4 x_2^2 - y_1 y_3 x_1^5 x_2 + y_2 y_3 x_1^6)\\
& & &+ x_1^{10n+5} + x_2^{8n+4}.
\end{aligned}$$

Codifica la G-acción

Realizabilidad de acciones: resultado

Teorema (Costoya-V.'13)

Sea G un grupo finito, y V un $\mathbb{Q}G$-módulo fiel finitamente generado. Entonces, existe una pieza de Postnikov X tal que, para algún $k \geq 2$,

$$\big(G, V\big) \cong \big(\mathcal{E}(X), \pi_k X\big)$$

y además la $\mathcal{E}(X)$-acción sobre $\pi_{\neq k} X$ es trivial.

Pregunta

Las construcciones "Grafos" y "Anillos de Invariantes" se basan ambas en el álgebra homotópicamente rígida de Arkowitz-Lupton:

$$\mathcal{M} = \Big(\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, z), d\Big)$$

$$\begin{aligned}
\deg x_1 &= 8, & d(x_1) &= 0\\
\deg x_2 &= 10, & d(x_2) &= 0\\
\deg y_1 &= 33, & d(y_1) &= x_1^3 x_2\\
\deg y_2 &= 35, & d(y_2) &= x_1^2 x_2^2\\
\deg y_3 &= 37, & d(y_3) &= x_1 x_2^3\\
\deg z &= 119, & d(z) &= y_1 y_2 x_1^4 x_2^2 - y_1 y_3 x_1^5 x_2 + y_2 y_3 x_1^6\\
& & &\quad + x_1^{15} + x_2^{12}.
\end{aligned}$$

¿Existen otras álgebras así que pudiéramos haber usado?

Respuesta

Fijemos un entero positivo $k > 4$, y definamos

$$\mathcal{M}_k = \Big(\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, z), d\Big)$$

$$\begin{aligned}
\deg x_1 &= 5k-2, & d(x_1) &= 0\\
\deg x_2 &= 6k-2, & d(x_2) &= 0\\
\deg y_1 &= 21k-9, & d(y_1) &= x_1^3 x_2\\
\deg y_2 &= 22k-9, & d(y_2) &= x_1^2 x_2^2\\
\deg y_3 &= 23k-9, & d(y_3) &= x_1 x_2^3\\
\deg z &= 15k^2-11k+1, \quad & d(z) &= x_1^{3k-12}(x_1^2 y_2 y_3 - x_1 x_2 y_1 y_3 + x_2^2 y_1 y_2)\\
& & &\quad + x_1^{\frac{6k-2}{2}} + x_2^{\frac{5k-2}{2}}.
\end{aligned}$$

Respuesta

Fijemos un entero positivo $k > 4$, y definamos

$$\mathcal{M}_k = \Big(\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, z), d\Big)$$

$$\begin{aligned}
\deg x_1 &= 5k-2, & d(x_1) &= 0\\
\deg x_2 &= 6k-2, & d(x_2) &= 0\\
\deg y_1 &= 21k-9, & d(y_1) &= x_1^3 x_2\\
\deg y_2 &= 22k-9, & d(y_2) &= x_1^2 x_2^2\\
\deg y_3 &= 23k-9, & d(y_3) &= x_1 x_2^3\\
\deg z &= 15k^2-11k+1, & d(z) &= x_1^{3k-12}(x_1^2 y_2 y_3 - x_1 x_2 y_1 y_3 + x_2^2 y_1 y_2)\\
&& &\quad + x_1^{\frac{6k-2}{2}} + x_2^{\frac{5k-2}{2}}.
\end{aligned}$$

(Costoya-V.'13) $[\mathcal{M}_k, \mathcal{M}_k] = \{0, 1\}$.

Sí, hay infinitas álgebras homotópicamente rígidas y con grado de conectividad tan alto como se desee.

¡Muchas gracias!

- Costoya–Viruel, Every finite group is the group of self-homotopy equivalences of an elliptic space. *Aparecerá en Acta Mathematica*.
- Costoya–Viruel, Faithful actions on Differential Graded Algebras and the Group Isomorphism Problem. *Aparecerá en Q. J. Math. (DOI: 10.1093/qmath/hat052)*.
- Costoya–Viruel, Realizability of G-modules: on a dual of a Steenrod problem. *Preprint*.
- Costoya–Viruel, Highly connected homotopically rigid differential graded algebras. *Preprint*.