Conexiones SU invariantes en esferas

(trabajo conjunto con C.Draper y F. Palomo)

Granada, Junio de 2014.

Introducción

- Objetivo de la charla:

Introducción

- Objetivo de la charla:
- Analizar la existencia de conexiones afines de las esferas impares, S^{2n+1}, invariantes por la acción natural de $SU(n+1)$ que son compatibles con la métrica euclídea estandar.

Introducción

- Objetivo de la charla:
- Analizar la existencia de conexiones afines de las esferas impares, S^{2n+1}, invariantes por la acción natural de $SU(n+1)$ que son compatibles con la métrica euclídea estandar.
- En especial aquellas que verifican ciertas propiedades geométricas interesantes.

Introducción

- Objetivo de la charla:
- Analizar la existencia de conexiones afines de las esferas impares, S^{2n+1}, invariantes por la acción natural de $SU(n+1)$ que son compatibles con la métrica euclídea estandar.
- En especial aquellas que verifican ciertas propiedades geométricas interesantes.
- Hacer uso del teorema clásico de Nomizu que caracteriza algebraicamente las conexiones afines.

Variedades de Riemann-Cartan

- Cartan entre 1922 y 1925 estudia en variedades de Riemann conexiones afines metricas que no son la Levi Civita.

Variedades de Riemann-Cartan

- Cartan entre 1922 y 1925 estudia en variedades de Riemann conexiones afines metricas que no son la Levi Civita.
- Primera mitad del siglo XX inspira trabajos en Geometría Diferencial y desinteres entre los fisicos teóricos que la ven como una elucubración matemática.

Variedades de Riemann-Cartan

- Cartan entre 1922 y 1925 estudia en variedades de Riemann conexiones afines metricas que no son la Levi Civita.
- Primera mitad del siglo XX inspira trabajos en Geometría Diferencial y desinteres entre los fisicos teóricos que la ven como una elucubración matemática.
- En la segunda mitad del siglo XX se invierte la tendencia a partir de unos trabajos de los años 60 que relacionan la torsión de la conexión con ciertas magnitudes fisicas.

Variedades de Riemann-Cartan

- Cartan entre 1922 y 1925 estudia en variedades de Riemann conexiones afines metricas que no son la Levi Civita.
- Primera mitad del siglo XX inspira trabajos en Geometría Diferencial y desinteres entre los fisicos teóricos que la ven como una elucubración matemática.
- En la segunda mitad del siglo XX se invierte la tendencia a partir de unos trabajos de los años 60 que relacionan la torsión de la conexión con ciertas magnitudes fisicas.
- I. Agricola, *Non-integrable geometries, torsion, and holonomy*, Handbook of pseudo-Riemannian Geometry and Supersymmetry (Chapter 9),EMS Publishing House, 2010.

Variedades de Riemann-Cartan

- Cartan entre 1922 y 1925 estudia en variedades de Riemann conexiones afines metricas que no son la Levi Civita.
- Primera mitad del siglo XX inspira trabajos en Geometría Diferencial y desinteres entre los fisicos teóricos que la ven como una elucubración matemática.
- En la segunda mitad del siglo XX se invierte la tendencia a partir de unos trabajos de los años 60 que relacionan la torsión de la conexión con ciertas magnitudes fisicas.

- I. Agricola, *Non-integrable geometries, torsion, and holonomy*, Handbook of pseudo-Riemannian Geometry and Supersymmetry (Chapter 9),EMS Publishing House, 2010.
- I.A. Gordeeva, V.I. Pan'zhenskii and S.E. Stepanov, *Riemann-Cartan manifolds*, Journal of Mathematical Sciences **169** (2010), 342–361.

Conexiones afines en variedades

- M variedad diferenciable.

Conexiones afines en variedades

- M variedad diferenciable.
- Una conexión afín ∇ en M es una función $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ tal que,

Conexiones afines en variedades

- M variedad diferenciable.
- Una conexión afín ∇ en M es una función $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ tal que,
- $\nabla_X Y$ es $C^\infty(M)$-lineal en X,

Conexiones afines en variedades

- M variedad diferenciable.
- Una conexión afín ∇ en M es una función $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ tal que,
- $\nabla_X Y$ es $C^\infty(M)$-lineal en X,
- $\nabla_X Y$ es $\mathbb{R}$-lineal en Y,

Conexiones afines en variedades

- M variedad diferenciable.
- Una conexión afín ∇ en M es una función $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ tal que,
- $\nabla_X Y$ es $C^\infty(M)$-lineal en X,
- $\nabla_X Y$ es $\mathbb{R}$-lineal en Y,
- $\nabla_X(f\,Y) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$

Conexiones afines en variedades

- M variedad diferenciable.
- Una conexión afín ∇ en M es una función $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ tal que,
- $\nabla_X Y$ es $C^\infty(M)$-lineal en X,
- $\nabla_X Y$ es $\mathbb{R}$-lineal en Y,
- $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$
- A partir de la conexión se pueden definir entre otros la Torsión, la Curvatura o el Ricci.

Conexiones afines en variedades

- M variedad diferenciable.
- Una conexión afín ∇ en M es una función $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ tal que,
- $\nabla_X Y$ es $C^\infty(M)$-lineal en X,
- $\nabla_X Y$ es $\mathbb{R}$-lineal en Y,
- $\nabla_X(f\,Y) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$
- A partir de la conexión se pueden definir entre otros la Torsión, la Curvatura o el Ricci.
- Por ejemplo:

$$T^\nabla(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Espacios homogeneos

- G grupo de Lie, M variedad diferenciable.

Espacios homogeneos

- G grupo de Lie, M variedad diferenciable.
- $G \times M \to M$ acción diferenciable y transitiva.

Espacios homogeneos

- G grupo de Lie, M variedad diferenciable.
- $G \times M \to M$ acción diferenciable y transitiva.
- M espacio G- homogeneo.
- $M \cong G/H$ con H subgrupo de isotropia de $p \in M$.

Espacios homogeneos

- G grupo de Lie, M variedad diferenciable.
- $G \times M \to M$ acción diferenciable y transitiva.
- M espacio G- homogeneo.
- $M \cong G/H$ con H subgrupo de isotropia de $p \in M$.
- Una conexión ∇ se dice G-invariante si

$$dL_a(\nabla_X Y) = \nabla_{(dL_a X)}(dL_a Y) \qquad a \in G.$$

Espacios homogeneos reductivos

- G grupo de Lie, M variedad diferenciable.
- $G \times M \to M$ acción diferenciable y transitiva,
- M espacio G- homogeneo.
- $M \cong G/H$ con H subgrupo (cerrado) de isotropia de $p \in M$.

Espacios homogeneos reductivos

- G grupo de Lie, M variedad diferenciable.
- $G \times M \to M$ acción diferenciable y transitiva,
- M espacio G- homogeneo.
- $M \cong G/H$ con H subgrupo (cerrado) de isotropia de $p \in M$.
- Sean $\mathfrak{h} = Lie(H)$, $\mathfrak{g} = Lie(G)$.

Espacios homogeneos reductivos

- G grupo de Lie, M variedad diferenciable.
- $G \times M \to M$ acción diferenciable y transitiva,
- M espacio G- homogeneo.
- $M \cong G/H$ con H subgrupo (cerrado) de isotropia de $p \in M$.
- Sean $\mathfrak{h} = Lie(H)$, $\mathfrak{g} = Lie(G)$.
- Decimos que M es reductivo si existe $\mathfrak{m}$ complemento de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$, $Ad(H)$-invariante,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \qquad Ad(H)(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}.$$

Espacios homogeneos reductivos

- G grupo de Lie, M variedad diferenciable.
- $G \times M \to M$ acción diferenciable y transitiva,
- M espacio G- homogeneo.
- $M \cong G/H$ con H subgrupo (cerrado) de isotropia de $p \in M$.
- Sean $\mathfrak{h} = Lie(H)$, $\mathfrak{g} = Lie(G)$.
- Decimos que M es reductivo si existe $\mathfrak{m}$ complemento de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$, $Ad(H)$-invariante,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \qquad Ad(H)(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}.$$

- Si H es conexo es equivalente a que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$.

Espacios homogeneos reductivos

- G grupo de Lie, M variedad diferenciable.
- $G \times M \to M$ acción diferenciable y transitiva,
- M espacio G- homogeneo.
- $M \cong G/H$ con H subgrupo (cerrado) de isotropia de $p \in M$.
- Sean $\mathfrak{h} = Lie(H)$, $\mathfrak{g} = Lie(G)$.
- Decimos que M es reductivo si existe $\mathfrak{m}$ complemento de $\mathfrak{h}$ en $\mathfrak{g}$, $Ad(H)$-invariante,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} \qquad Ad(H)(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}.$$

- Si H es conexo es equivalente a que $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$.
- $\mathfrak{m}$ se identifica con T_pM.

Nomizu (1954)

- G/H espacio homogeneo reductivo con una descomposición reductiva fija. Existe una biyección entre el conjunto de conexiones afines G invariantes ∇ en G/H y el espacio vectorial de aplicaciones bilineales $\alpha\colon \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ tales que $\mathrm{Ad}(H) \subset \mathrm{Aut}(\mathfrak{m}, \alpha)$.

Nomizu (1954)

- G/H espacio homogeneo reductivo con una descomposición reductiva fija. Existe una biyección entre el conjunto de conexiones afines G invariantes ∇ en G/H y el espacio vectorial de aplicaciones bilineales $\alpha\colon \mathfrak{m}\times\mathfrak{m}\to\mathfrak{m}$ tales que $\mathrm{Ad}(H)\subset\mathrm{Aut}(\mathfrak{m},\alpha)$.
- Si H es conexo, $[\mathfrak{h},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}$ y lo anterior es equivalente a que

$$[h,\alpha(X,Y)]=\alpha([h,X],Y)+\alpha(X,[h,Y])$$

para cada $X,Y\in\mathfrak{m}$ y $h\in\mathfrak{h}$.

Nomizu (1954)

- G/H espacio homogeneo reductivo con una descomposición reductiva fija. Existe una biyección entre el conjunto de conexiones afines G invariantes ∇ en G/H y el espacio vectorial de aplicaciones bilineales $\alpha\colon \mathfrak{m}\times\mathfrak{m}\to\mathfrak{m}$ tales que $\mathrm{Ad}(H)\subset\mathrm{Aut}(\mathfrak{m},\alpha)$.
- Si H es conexo, $[\mathfrak{h},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{m}$ y lo anterior es equivalente a que
$$[h,\alpha(X,Y)]=\alpha([h,X],Y)+\alpha(X,[h,Y])$$
para cada $X,Y\in\mathfrak{m}$ y $h\in\mathfrak{h}$.
- Por tanto, en el caso conexo, el conjunto de conexiones afines G invariantes ∇ en G/H se identifica con el espacio vectorial de los homomorfismos de $\mathfrak{h}$-módulo $\alpha\colon \mathfrak{m}\otimes\mathfrak{m}\to\mathfrak{m}$,
$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{h}}(\mathfrak{m}\otimes\mathfrak{m},\mathfrak{m}).$$

Nomizu (1954)

- El teorema de Nomizu nos proporciona además una descripción explícita de los tensores de torsión y curvatura en $T_p(M) \cong \mathfrak{m}$.

Nomizu (1954)

- El teorema de Nomizu nos proporciona además una descripción explícita de los tensores de torsión y curvatura en $T_p(M) \cong \mathfrak{m}$.
- Para cada $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$

Nomizu (1954)

- El teorema de Nomizu nos proporciona además una descripción explícita de los tensores de torsión y curvatura en $T_p(M) \cong \mathfrak{m}$.
- Para cada $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$
- $T^{\alpha}(X, Y) = \alpha(X, Y) - \alpha(Y, X) - [X, Y]_{\mathfrak{m}}$

Nomizu (1954)

- El teorema de Nomizu nos proporciona además una descripción explícita de los tensores de torsión y curvatura en $T_p(M) \cong \mathfrak{m}$.
- Para cada $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$
- $T^\alpha(X, Y) = \alpha(X, Y) - \alpha(Y, X) - [X, Y]_\mathfrak{m}$
- $$\begin{aligned} R^\alpha(X, Y)Z = \; & \alpha(X, \alpha(Y, Z)) - \alpha(Y, \alpha(X, Z)) \\ & -\alpha([X, Y]_\mathfrak{m}, Z) - [[X, Y]_\mathfrak{h}, Z] \end{aligned}$$
  los subindices indican las proyecciones de $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ en cada factor.

Variedades de Riemann-Cartan

- Una variedad de Riemann-Cartan (M, g, ∇) consiste en una variedad de Riemann (M, g) junto con una conexión∇ compatible con la métrica g.

Variedades de Riemann-Cartan

- Una variedad de Riemann-Cartan (M, g, ∇) consiste en una variedad de Riemann (M, g) junto con una conexión∇ compatible con la métrica g.
- Siempre existe una. La conexión de Levi Civita ∇^g que queda caracterizada por ser la única compatible con la métrica y de torsión nula.

Variedades de Riemann-Cartan

- Una variedad de Riemann-Cartan (M, g, ∇) consiste en una variedad de Riemann (M, g) junto con una conexión∇ compatible con la métrica g.
- Siempre existe una. La conexión de Levi Civita ∇^g que queda caracterizada por ser la única compatible con la métrica y de torsión nula.
- Dos propiedades geométricas interesantes en variedades de Rieman-Cartan:

Variedades de Riemann-Cartan

- Una variedad de Riemann-Cartan (M, g, ∇) consiste en una variedad de Riemann (M, g) junto con una conexión∇ compatible con la métrica g.
- Siempre existe una. La conexión de Levi Civita ∇^g que queda caracterizada por ser la única compatible con la métrica y de torsión nula.
- Dos propiedades geométricas interesantes en variedades de Rieman-Cartan:
- Tener las mismas geodésica que la L-C,

Variedades de Riemann-Cartan

- Una variedad de Riemann-Cartan (M, g, ∇) consiste en una variedad de Riemann (M, g) junto con una conexión∇ compatible con la métrica g.
- Siempre existe una. La conexión de Levi Civita ∇^g que queda caracterizada por ser la única compatible con la métrica y de torsión nula.
- Dos propiedades geométricas interesantes en variedades de Rieman-Cartan:
- Tener las mismas geodésica que la L-C,
- Ser ∇-Einstein.

Variedades de Riemann-Cartan

Geodésicas de ∇=Geodésicas de ∇^g

Variedades de Riemann-Cartan

Geodésicas de ∇=Geodésicas de ∇^g

- Consideremos la torsión métrica definida para campos X, Y, Z como

$$\omega_\nabla(X, Y, Z) = g(T^\nabla(X, Y), Z).$$

Variedades de Riemann-Cartan

Geodésicas de ∇=Geodésicas de ∇^g

- Consideremos la torsión métrica definida para campos X, Y, Z como
$$\omega_\nabla(X, Y, Z) = g(T^\nabla(X, Y), Z).$$
- ∇ tiene las mismas geodésicas que ∇^g si y solo si ω_∇ define una 3-forma diferencial en M.

Variedades de Riemann-Cartan

Variedades ∇-Einstein.

Variedades de Riemann-Cartan

Variedades ∇-Einstein.

- I. Agricola and A.C. Ferreira, *Einstein manifolds with skew torsion*, Quart. J. Math (2013).

Variedades de Riemann-Cartan

Variedades ∇-Einstein.

- I. Agricola and A.C. Ferreira, *Einstein manifolds with skew torsion*, Quart. J. Math (2013).
- **Definición:** Una variedad de Riemann-Cartan (M, g, ∇) se dice que es ∇-Einstein si ω_∇ define una 3-forma diferencial en M y ademas el simetrizado del tensor de Ricci de ∇ es un múltiplo de la métrica g.

$$S(Ric^\nabla) = \lambda g$$

Variedades homogeneas de Riemann-Cartan

- Un espacio G-homogéneo $M = G/H$ diremos que es de Riemann-Cartan si tenemos (M, g, ∇) una estructura de variedad de R-C en M tal que la métrica y la conexión sean G-invariantes.

Variedades homogeneas de Riemann-Cartan

- Un espacio G-homogéneo $M = G/H$ diremos que es de Riemann-Cartan si tenemos (M, g, ∇) una estructura de variedad de R-C en M tal que la métrica y la conexión sean G-invariantes.
- Si el espacio homogeneo de R-C es reductivo se tiene lo siguiente:

Variedades homogeneas de Riemann-Cartan

- Un espacio G-homogéneo $M = G/H$ diremos que es de Riemann-Cartan si tenemos (M, g, ∇) una estructura de variedad de R-C en M tal que la métrica y la conexión sean G-invariantes.
- Si el espacio homogeneo de R-C es reductivo se tiene lo siguiente:
- **Lema :** La conexión ∇ asociada a α es compatible con la métrica g si y solo si

$$g(\alpha(X, Y), Z) + g(Y, \alpha(X, Z)) = 0.$$

Variedades homogeneas de Riemann-Cartan

- Un espacio G-homogéneo $M = G/H$ diremos que es de Riemann-Cartan si tenemos (M, g, ∇) una estructura de variedad de R-C en M tal que la métrica y la conexión sean G-invariantes.
- Si el espacio homogeneo de R-C es reductivo se tiene lo siguiente:
- **Lema :** La conexión ∇ asociada a α es compatible con la métrica g si y solo si

$$g(\alpha(X, Y), Z) + g(Y, \alpha(X, Z)) = 0.$$

- Para $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$, donde g representa a la métrica en $\mathfrak{m}$ obtenida al identificar $\mathfrak{m} \cong T_{m_0}M$.

Esferas como espacios homogeneos

- $M = S^{2n+1} = \{(z_1, \cdots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} / \quad \sum_{i=1}^{n+1} z_i \bar{z}_i = 1\}$,
  $G = SU(n+1) = \{A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}) / \quad A\bar{A}^t = I, \quad det(A) = 1\}$.

Esferas como espacios homogeneos

- $M = S^{2n+1} = \{(z_1, \cdots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} / \quad \sum_{i=1}^{n+1} z_i \bar{z}_i = 1\}$,
  $G = SU(n+1) = \{A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}) / \quad A\bar{A}^t = I, \quad det(A) = 1\}$.
- La esfera S^{2n+1} es un espacio homogeneo bajo la acción natural de $SU(n+1)$

$$S^{2n+1} \cong SU(n+1)/SU(n).$$

Esferas como espacios homogeneos

- $M = S^{2n+1} = \{(z_1, \cdots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} / \quad \sum_{i=1}^{n+1} z_i \bar{z}_i = 1\}$, $G = SU(n+1) = \{A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}) / \quad A\bar{A}^t = I, \quad det(A) = 1\}$.
- La esfera S^{2n+1} es un espacio homogeneo bajo la acción natural de $SU(n+1)$

$$S^{2n+1} \cong SU(n+1)/SU(n).$$

- El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G es $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n+1) = \{A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}) / \quad A + \bar{A}^t = 0, \quad tr(A) = 0\}$.

Esferas como espacios homogeneos

- $M = S^{2n+1} = \{(z_1, \cdots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} / \quad \sum_{i=1}^{n+1} z_i \bar{z}_i = 1\}$, $G = SU(n+1) = \{A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}) / \quad A\bar{A}^t = I, \quad det(A) = 1\}$.
- La esfera S^{2n+1} es un espacio homogeneo bajo la acción natural de $SU(n+1)$

$$S^{2n+1} \cong SU(n+1)/SU(n).$$

- El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G es $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n+1) = \{A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}) / \quad A + \bar{A}^t = 0, \quad tr(A) = 0\}$.
- Tomando $p = (0, \cdots, 0, 1) \in S^{2n+1}$ como punto base el subgrupo de isotropía H de $SU(n+1)$ es canonicamente isomorfo a $SU(n)$.

Esferas como espacios homogeneos

- $M = S^{2n+1} = \{(z_1, \cdots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} / \quad \sum_{i=1}^{n+1} z_i \bar{z}_i = 1\}$,
  $G = SU(n+1) = \{A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}) / \quad A\bar{A}^t = I, \quad det(A) = 1\}$.
- La esfera S^{2n+1} es un espacio homogeneo bajo la acción natural de $SU(n+1)$

$$S^{2n+1} \cong SU(n+1)/SU(n).$$

- El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G es
  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n+1) = \{A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}) / \quad A + \bar{A}^t = 0, \quad tr(A) = 0\}$.
- Tomando $p = (0, \cdots, 0, 1) \in S^{2n+1}$ como punto base el subgrupo de isotropía H de $SU(n+1)$ es canonicamente isomorfo a $SU(n)$.
- $\mathfrak{h} = \mathfrak{su}(n)$.

Esferas como espacios homogeneos reductivos

- Consideremos $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$

$$\mathfrak{m}_1 = \{\left(\begin{array}{c|c} 0 & z \\ \hline -\bar{z}^t & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})/ \quad z \in \mathbb{C}^n\} \cong \mathbb{C}^n$$

$$\mathfrak{m}_2 = \{a\left(\begin{array}{c|c} -I_n & 0 \\ \hline 0 & n \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})/ \quad a \in \mathbb{R}i\} \cong \mathbb{R}i.$$

Esferas como espacios homogeneos reductivos

- Consideremos $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$

$$\mathfrak{m}_1 = \{\left(\begin{array}{c|c} 0 & z \\ \hline -\bar{z}^t & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}) / \quad z \in \mathbb{C}^n\} \cong \mathbb{C}^n$$

$$\mathfrak{m}_2 = \{a\left(\begin{array}{c|c} -I_n & 0 \\ \hline 0 & n \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C}) / \quad a \in \mathbb{R}i\} \cong \mathbb{R}i.$$

- **Lema:** S^{2n+1} es un $SU(n+1)$-espacio homogeneo reductivo, con descomposición reductiva $\mathfrak{su}(n+1) = \mathfrak{su}(n) \oplus \mathfrak{m}$, donde $\mathfrak{m} \cong \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}i$ y la estructura de $\mathfrak{su}(n)$-módulo, para $B \in \mathfrak{su}(n)$ y $(z, a) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}i$, viene dada por

$$B \cdot (z, a) = (Bz, 0)$$

Ejemplos

- Conexiones $SU(n+1)$-invariantes en S^{2n+1} son

  $$\alpha\colon \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$$

  bilineales y verificando para cada $B \in \mathfrak{s}u(n)$ y $m_1, m_2 \in \mathfrak{m}$.

  $$B \cdot \alpha(m_1, m_2) = \alpha(B \cdot m_1, m_2) + \alpha(m_1, B \cdot m_2)$$

Ejemplos

- Conexiones $SU(n+1)$-invariantes en S^{2n+1} son

$$\alpha\colon \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$$

  bilineales y verificando para cada $B \in \mathfrak{su}(n)$ y $m_1, m_2 \in \mathfrak{m}$.

$$B \cdot \alpha(m_1, m_2) = \alpha(B \cdot m_1, m_2) + \alpha(m_1, B \cdot m_2)$$

- $\alpha_1((z,a),(w,b)) = (0, \bar{z}^t w - z^t \bar{w})$

Ejemplos

- Conexiones $SU(n+1)$-invariantes en S^{2n+1} son

$$\alpha\colon \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$$

bilineales y verificando para cada $B \in \mathfrak{su}(n)$ y $m_1, m_2 \in \mathfrak{m}$.

$$B \cdot \alpha(m_1, m_2) = \alpha(B \cdot m_1, m_2) + \alpha(m_1, B \cdot m_2)$$

- $\alpha_1((z,a),(w,b)) = (0, \bar{z}^t w - z^t \bar{w})$
- $\alpha_4((z,a),(w,b)) = (bz, 0)$

Ejemplos

- Conexiones $SU(n+1)$-invariantes en S^{2n+1} son
$$\alpha\colon \mathfrak{m}\times\mathfrak{m}\to\mathfrak{m}$$
bilineales y verificando para cada $B\in\mathfrak{su}(n)$ y $m_1, m_2\in\mathfrak{m}$.
$$B\cdot\alpha(m_1, m_2) = \alpha(B\cdot m_1, m_2) + \alpha(m_1, B\cdot m_2)$$
- $\alpha_1((z,a),(w,b)) = (0, \bar{z}^t w - z^t\bar{w})$
- $\alpha_4((z,a),(w,b)) = (bz, 0)$
- $\alpha_6((z,a),(w,b)) = (aw, 0)$

Ejemplos

- Conexiones $SU(n+1)$-invariantes en S^{2n+1} son

$$\alpha\colon \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$$

bilineales y verificando para cada $B \in \mathfrak{su}(n)$ y $m_1, m_2 \in \mathfrak{m}$.

$$B \cdot \alpha(m_1, m_2) = \alpha(B \cdot m_1, m_2) + \alpha(m_1, B \cdot m_2)$$

- $\alpha_1((z,a),(w,b)) = (0, \bar{z}^t w - z^t \bar{w})$
- $\alpha_4((z,a),(w,b)) = (bz, 0)$
- $\alpha_6((z,a),(w,b)) = (aw, 0)$
- son $SU(n+1)$-invariantes.

Ejemplos

- Identificando $\mathfrak{m}$ con el espacio vectorial tangente a S^{2n+1}, la métrica euclidea estandar en la esfera $g\colon \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathbb{R}$ es $SU(n+1)$-invariante y viene dada por:

$$g((z,a),(w,b)) = \frac{\bar{z}^t w + z^t \bar{w}}{2} - ab$$

Ejemplos

- Identificando $\mathfrak{m}$ con el espacio vectorial tangente a S^{2n+1}, la métrica euclidea estandar en la esfera $g\colon \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathbb{R}$ es $SU(n+1)$-invariante y viene dada por:

$$g((z,a),(w,b)) = \frac{\bar{z}^t w + z^t \bar{w}}{2} - ab$$

- $\alpha_6((z,a),(w,b)) = (aw, 0)$,

Ejemplos

- Identificando $\mathfrak{m}$ con el espacio vectorial tangente a S^{2n+1}, la métrica euclidea estandar en la esfera $g\colon \mathfrak{m}\times\mathfrak{m}\to\mathbb{R}$ es $SU(n+1)$-invariante y viene dada por:

$$g((z,a),(w,b)) = \frac{\bar{z}^t w + z^t \bar{w}}{2} - ab$$

- $\alpha_6((z,a),(w,b)) = (aw,0)$,
- verifica $g(\alpha(m_1,m_2),m_3) + g(m_2,\alpha(m_1,m_3)) = 0$.

Ejemplos

- Identificando $\mathfrak{m}$ con el espacio vectorial tangente a S^{2n+1}, la métrica euclidea estandar en la esfera $g\colon \mathfrak{m}\times\mathfrak{m}\to\mathbb{R}$ es $SU(n+1)$-invariante y viene dada por:

$$g((z,a),(w,b)) = \frac{\bar{z}^t w + z^t \bar{w}}{2} - ab$$

- $\alpha_6((z,a),(w,b)) = (aw,0)$,
- verifica $g(\alpha(m_1,m_2),m_3) + g(m_2,\alpha(m_1,m_3)) = 0$.
- Además $T^{\alpha_6} \neq 0$.

Ejemplos

- Identificando $\mathfrak{m}$ con el espacio vectorial tangente a S^{2n+1}, la métrica euclidea estandar en la esfera $g\colon \mathfrak{m}\times\mathfrak{m}\to\mathbb{R}$ es $SU(n+1)$-invariante y viene dada por:

$$g((z,a),(w,b)) = \frac{\bar{z}^t w + z^t \bar{w}}{2} - ab$$

- $\alpha_6((z,a),(w,b)) = (aw,0)$,
- verifica $g(\alpha(m_1,m_2),m_3) + g(m_2,\alpha(m_1,m_3)) = 0$.
- Además $T^{\alpha_6} \neq 0$.
- Por tanto la $SU(n+1)$ esfera (S^{2n+1}, g, α_6) determina una estructura de Variedad de Riemann-Cartan distinta de la dada por la Levi Civita.

Ejemplos

- ¿Cuál es la L-C?

Ejemplos

- ¿Cuál es la L-C?
- Si tomamos $\alpha = -\frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_4 - \frac{1}{n}\alpha_6$,

Ejemplos

- ¿Cuál es la L-C?
- Si tomamos $\alpha = -\frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_4 - \frac{1}{n}\alpha_6$,
- se verifica $T^{\alpha} = 0$.

Ejemplos

- ¿Cuál es la L-C?
- Si tomamos $\alpha = -\frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_4 - \frac{1}{n}\alpha_6$,
- se verifica $T^\alpha = 0$.
- Por tanto (S^{2n+1}, g, α) es la estructura de Riemann-Cartan estándar dada por la Levi Civita.

Conexiones $SU(n+1)$ invariantes

Proposición:

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{su}(n)}(\mathfrak{m} \otimes \mathfrak{m}, \mathfrak{m}))$$

Conexiones $SU(n+1)$ invariantes

Proposición:

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{su}(n)}(\mathfrak{m}\otimes\mathfrak{m},\mathfrak{m})) = \begin{cases} 7, & n \geq 4. \\ & \\ & \end{cases}$$

Conexiones $SU(n+1)$ invariantes

Proposición:

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{su}(n)}(\mathfrak{m}\otimes\mathfrak{m},\mathfrak{m})) = \begin{cases} 7, & n \geq 4. \\ 9, & n = 3. \\ & \\ & \end{cases}$$

Conexiones $SU(n+1)$ invariantes

Proposición:

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{su}(n)}(\mathfrak{m}\otimes\mathfrak{m},\mathfrak{m})) = \begin{cases} 7, & n \geq 4. \\ 9, & n = 3. \\ 13, & n = 2. \end{cases}$$

Conexiones $SU(n+1)$ invariantes

Proposición:

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{su}(n)}(\mathfrak{m} \otimes \mathfrak{m}, \mathfrak{m})) = \begin{cases} 7, & n \geq 4. \\ 9, & n = 3. \\ 13, & n = 2. \\ 27, & n = 1. \end{cases}$$

Ejemplo (caso $n = 3$)

$SU(n+1)$ invariantes

$$\begin{aligned}
\alpha_1((z,a),(w,b)) &= (0, \bar{z}^t w - z^t \bar{w}) \\
\alpha_2((z,a),(w,b)) &= (0, i(\bar{z}^t w + z^t \bar{w})) \\
\alpha_3((z,a),(w,b)) &= (0, iab) \\
\alpha_4((z,a),(w,b)) &= (bz, 0) \\
\alpha_5((z,a),(w,b)) &= (ibz, 0) \\
\alpha_6((z,a),(w,b)) &= (aw, 0) \\
\alpha_7((z,a),(w,b)) &= (iaw, 0) \\
\alpha_8((z,a),(w,b)) &= (\bar{z} \times \bar{w}, 0) \\
\alpha_9((z,a),(w,b)) &= (i(\bar{z} \times \bar{w}), 0)
\end{aligned}$$

Ejemplo (caso $n = 3$)

- Compatibles con la métrica,

Ejemplo (caso $n = 3$)

- Compatibles con la métrica,
- $< \alpha_1 - 2\alpha_4, \alpha_2 + 2\alpha_5, \alpha_6, \alpha_8, \alpha_9 >$.

Ejemplo (caso $n = 3$)

- Compatibles con la métrica,
- $< \alpha_1 - 2\alpha_4, \alpha_2 + 2\alpha_5, \alpha_6, \alpha_8, \alpha_9 >$.
- Iguales geodésicas que la L-C,

Ejemplo (caso $n = 3$)

- Compatibles con la métrica,
- $< \alpha_1 - 2\alpha_4, \alpha_2 + 2\alpha_5, \alpha_6, \alpha_8, \alpha_9 >$.
- Iguales geodésicas que la L-C,
- $\frac{2}{3}\alpha_6 + < \alpha_1 - 2\alpha_4 + 2\alpha_6, \alpha_8, \alpha_9 >$.

Ejemplo (caso $n = 3$)

- Compatibles con la métrica,
- $< \alpha_1 - 2\alpha_4, \alpha_2 + 2\alpha_5, \alpha_6, \alpha_8, \alpha_9 >$.
- Iguales geodésicas que la L-C,
- $\frac{2}{3}\alpha_6 + < \alpha_1 - 2\alpha_4 + 2\alpha_6, \alpha_8, \alpha_9 >$.
- ∇-Einstein ,

Ejemplo (caso $n = 3$)

- Compatibles con la métrica,
- $< \alpha_1 - 2\alpha_4, \alpha_2 + 2\alpha_5, \alpha_6, \alpha_8, \alpha_9 >$.
- Iguales geodésicas que la L-C,
- $\frac{2}{3}\alpha_6 + < \alpha_1 - 2\alpha_4 + 2\alpha_6, \alpha_8, \alpha_9 >$.
- ∇-Einstein ,
- $\frac{2}{3}\alpha_6 + r(\alpha_1 - 2\alpha_4 + 2\alpha_6) + (2r+1)e^{is}\alpha_8 \qquad r, s \in \mathbb{R}$.

Clasificación de conexiones en esferas impares

Teorema: La siguiente tabla clasifica las estructuras de Riemann-Cartan en las $SU(n+1)$-esferas S^{2n+1} para $n \geq 1$.

S^{2n+1}

Clasificación de conexiones en esferas impares

Teorema: La siguiente tabla clasifica las estructuras de Riemann-Cartan en las $SU(n+1)$-esferas S^{2n+1} para $n \geq 1$.

S^{2n+1}	$G-invariante$

Clasificación de conexiones en esferas impares

Teorema: La siguiente tabla clasifica las estructuras de Riemann-Cartan en las $SU(n+1)$-esferas S^{2n+1} para $n \geq 1$.

S^{2n+1}	$G - invariante$	$g - compatible$

Clasificación de conexiones en esferas impares

Teorema: La siguiente tabla clasifica las estructuras de Riemann-Cartan en las $SU(n+1)$-esferas S^{2n+1} para $n \geq 1$.

S^{2n+1}	$G-invariante$	$g-compatible$	$geod = LC$

Clasificación de conexiones en esferas impares

Teorema: La siguiente tabla clasifica las estructuras de Riemann-Cartan en las $SU(n+1)$-esferas S^{2n+1} para $n \geq 1$.

S^{2n+1}	$G-invariante$	$g-compatible$	$geod = LC$	$\nabla-Einstein$

Clasificación de conexiones en esferas impares

Teorema: La siguiente tabla clasifica las estructuras de Riemann-Cartan en las $SU(n+1)$-esferas S^{2n+1} para $n \geq 1$.

S^{2n+1}	$G - invariante$	$g - compatible$	$geod = LC$	$\nabla - Einstein$
$n \geq 4$	7	3	1 (Af)	$*$ (LC)

Clasificación de conexiones en esferas impares

Teorema: La siguiente tabla clasifica las estructuras de Riemann-Cartan en las $SU(n+1)$-esferas S^{2n+1} para $n \geq 1$.

S^{2n+1}	$G-invariante$	$g-compatible$	$geod = LC$	$\nabla - Einstein$
$n \geq 4$	7	3	1 (Af)	$*$ (LC)
$n = 3$	9	5	3 (Af)	$2 - param$

Clasificación de conexiones en esferas impares

Teorema: La siguiente tabla clasifica las estructuras de Riemann-Cartan en las $SU(n+1)$-esferas S^{2n+1} para $n \geq 1$.

S^{2n+1}	$G-invariante$	$g-compatible$	$geod = LC$	$\nabla - Einstein$
$n \geq 4$	7	3	1 (Af)	$*$ (LC)
$n = 3$	9	5	3 (Af)	$2 - param$
$n = 2$	13	7	3 (Af)	$*$ (LC)

Clasificación de conexiones en esferas impares

Teorema: La siguiente tabla clasifica las estructuras de Riemann-Cartan en las $SU(n+1)$-esferas S^{2n+1} para $n \geq 1$.

S^{2n+1}	$G - invariante$	$g - compatible$	$geod = LC$	$\nabla - Einstein$
$n \geq 4$	7	3	1 (Af)	$*$ (LC)
$n = 3$	9	5	3 (Af)	$2 - param$
$n = 2$	13	7	3 (Af)	$*$ (LC)
$n = 1$	27	9	1	1

Muchas gracias por vuestra atención.