Tema 5. Series de números reales
Series de potencias

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

Sucesiones y series

Sucesiones de números reales

Una sucesión de números reales es una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ escribimos $f(n) = x_n \in \mathbb{R}$ podemos ver la sucesión como el conjunto ordenado $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Sucesión convergente

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to x \in \mathbb{R} \iff \lim_{n\to\infty} f(n) = x$$
$$\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} > 0 \text{ tal que } n \geqslant n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$$

Ejemplos

- $\left\{\frac{1}{n}\right\} \to 0$
- $\left\{\frac{1}{2^n}\right\} \to 0$
- $\left\{\frac{n-2}{n+1}\right\} \to 1$

Series de números reales

La serie de término general $\{x_n\}$ es $\sum_{n\geqslant 1} x_n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\sum_{k=1}^{n} x_k\right\} = \{S_n\}$

$\{S_n\}$ es la sucesión de sumas parciales

Suma de una serie convergente

La serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es convergente si la sucesión $\{S_n\}$ converge. En ese caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Condición necesaria de convergencia

Si $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es convergente entonces $\{x_n\} \to 0$

Series de números reales

Ejemplos

- La serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^n}$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$
- La serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ no es convergente
- Si $-1 < x < 1$ la serie $\sum_{n\geqslant 1} x^n$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$

  Serie geométrica de razón x

Series de términos no negativos

En lo que sigue $x_n \geqslant 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$

Criterio de la raíz

Supongamos que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = L \in \mathbb{R}$. Se verifican:

- Si $L < 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es convergente
- Si $L > 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} x_n$ NO es convergente
- Si $L = 1$ no tenemos información

Ejemplo

Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{2^n}$

Series de términos no negativos

Criterio del cociente

Supongamos que $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L \in \mathbb{R}$. Se verifican:

- Si $L < 1$ la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es convergente
- Si $L > 1$ la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ NO es convergente
- Si $L = 1$ no tenemos información

Ejemplo

Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n}{3^n + n^2}$

Series de términos no negativos

Criterio de Raabe

Supongamos que $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)=L$. Se verifican:

- Si $L>1$ la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es convergente
- Si $L<1$ la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ NO es convergente

Ejemplo

Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(2n)!}{n!n!}\frac{1}{2^{2n}}$

Series de términos no negativos

Criterio de condensación

Supongamos que $x_{n+1} < x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ ($\{x_n\}$ es decreciente). Entonces

$$\sum_{n\geqslant 1} x_n \text{ converge} \iff \sum_{n\geqslant 1} 2^n x_{2^n} \text{ converge}$$

Ejemplo

Probar que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^a}$ converge $\iff a > 1$

Series de términos no negativos

Criterio de comparación por paso al límite

Sean $x_n \geqslant 0$, $y_n > 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y supongamos que $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = L$. Se verifican:

- Si $L \neq 0$ entonces $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} x_n$ convergente $\iff \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} y_n$ convergente
- Si $L = 0$ entonces $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} y_n$ convergente $\implies \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} x_n$ convergente
- Si $L = \infty$ entonces $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} x_n$ convergente $\implies \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} y_n$ convergente

Ejemplo

Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{3n^2 - n}$

Series de términos con distinto signo

Convergencia absoluta

La serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es absolutamente convergente si la serie $\sum_{n\geqslant 1} |x_n|$ converge

- $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ absolutamente convergente $\Longrightarrow \sum_{n\geqslant 1} x_n$ convergente
- Sean $x_n \in \mathbb{R}$, $y_n \geqslant 0$ de modo que $|x_n| \leqslant y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si la serie $\sum_{n\geqslant 1} y_n$ converge entonces la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ converge absolutamente

Ejemplo

Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n)}{n^2}$

Series de términos con distinto signo

Series alternadas. Criterio de Leibnitz

Sea $x_n \geqslant 0$ de modo que $x_{n+1} < x_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \longrightarrow 0$. Entonces la serie alternada $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n x_n$ es convergente

Ejemplo

Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$

Series de potencias

Series de potencias

Una serie de potencias centrada en un punto $a \in \mathbb{R}$ es una expresión de la forma $\sum_{n \geqslant 0} a_n (x-a)^n$ donde $a_n \in \mathbb{R}$ es constante para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y x es variable

- Campo de convergencia: es el conjunto de valores de $x \in \mathbb{R}$ para los que la serie de potencias converge. Es siempre un intervalo centrado en a, el radio R de dicho intervalo es el radio de convergencia de la serie de potencias

Teorema de Cauchy Hadamard

Sea $\sum_{n \geqslant 0} a_n (x-a)^n$ una serie de potencias y supongamos que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$

- Si $L > 0$ entonces $R = \frac{1}{L}$ y se cumple que

$$]a - \tfrac{1}{L}, a + \tfrac{1}{L}[\subseteq \text{campo de convergencia} \subseteq [a - \tfrac{1}{L}, a + \tfrac{1}{L}]$$

- Si $L = 0$ entonces $R = \infty$ y la serie de potencias converge en todo $\mathbb{R}$
- Si $L = \infty$ entonces $R = 0$ y la serie de potencias sólo converge en $x = a$

Corolario

Sea $\sum_{n\geqslant 0} a_n(x-a)^n$ una serie de potencias y supongamos que $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$

- Si $L > 0$ entonces $R = \frac{1}{L}$ y se cumple que

$$]a - \tfrac{1}{L}, a + \tfrac{1}{L}[\subseteq \text{campo de convergencia} \subseteq [a - \tfrac{1}{L}, a + \tfrac{1}{L}]$$

- Si $L = 0$ entonces $R = \infty$ y la serie de potencias converge en todo $\mathbb{R}$
- Si $L = \infty$ entonces $R = 0$ y la serie de potencias sólo converge en a

Ejemplo

Calcular el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0}(2^n + n)x^n$

Función dada como suma de una serie de potencias

Si $\sum_{n\geqslant 0} a_n(x-a)^n$ es una serie de potencias con radio de convergencia $R>0$ podemos definir la función suma $f:]a-R,a+R[\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \qquad \big(x\in]a-R,a+R[\big)$$

Teorema

Sea $\sum_{n\geqslant 0} a_n(x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R>0$ y $f:]a-R,a+R[\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$. Se verifican:

- f es derivable y $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1} \quad \forall x\in]a-R,a+R[$
- La función dada por $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ es una primitiva de f