Tema 1. Números reales y funciones reales de variable real. Números complejos

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

Números reales

Números reales. Operaciones

Denotaremos por $\mathbb{R}$ al conjunto de los números reales

Suma de números reales

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$

Asociativa $a + (b + c) = (a + b) + c$

Conmutativa $a + b = b + a$

Elemento neutro existe $0 \in \mathbb{R}$ que verifica $a + 0 = a$ para cada $a \in \mathbb{R}$

Elemento opuesto dado $a \in \mathbb{R}$ existe $-a \in \mathbb{R}$ que verifica $a + (-a) = 0$

Producto de números reales

Asociativa $a(bc) = (ab)c$

Conmutativa $ab = ba$

Elemento neutro existe $1 \in \mathbb{R}$ que verifica $a1 = a$ para cada $a \in \mathbb{R}$

Elemento inverso dado $a \in \mathbb{R}$ no nulo existe $a^{-1} \in \mathbb{R}$ que verifica $aa^{-1} = 1$

Números reales. Operaciones

Propiedad distributiva

a(b+c)=ab+ac ($\mathbb{R}$ con la suma y el producto es un cuerpo)

Orden de los números reales

Existe una relación de orden ($\leqslant$) con las siguientes propiedades:

Reflexiva	$a \leqslant a$
Antisimétrica	Si $a \leqslant b$ y $b \leqslant a$ entonces $a = b$
Transitiva	Si $a \leqslant b$ y $b \leqslant c$ entonces $a \leqslant c$
Orden total	Si $a, b \in \mathbb{R}$ antonces $a \leqslant b$ ó $b \leqslant a$

Relación con las operaciones

- Si $a \leqslant b$ entonces $a + c \leqslant b + c$ $\forall c \in \mathbb{R}$
- Si $a \leqslant b$ y $0 \leqslant c$ entonces $ac \leqslant bc$ (si $c \leqslant 0$ entonces $bc \leqslant ac$)

Valor absoluto y distancia entre números reales

Valor absoluto

Se define el valor absoluto de $a \in \mathbb{R}$ por

$$|a| := \max\{a, -a\} = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Propiedades del valor absoluto

- $|a| \geqslant 0 \ \forall a \in \mathbb{R}$ y $|a| = 0 \iff a = 0$
- Si $b \geqslant 0$ entonces $|a| \leqslant b \iff -b \leqslant a \leqslant b$
- $|\mathrm{ab}|=|\mathrm{a}||\mathrm{b}|$
- $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ $\qquad \big(\big||a| - |b|\big| \leqslant |a-b|\big)$

Valor absoluto y distancia entre números reales

Distancia entre números reales

Definimos la distancia entre dos números reales a y b por $|a - b|$

Ejemplo

¿Para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ es cierta la desigualdad $|x - 1| \leqslant 3$?

Conjuntos destacados en $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \ldots\} \\
\mathbb{Z} &= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \\
\mathbb{Q} &= \left\{ \tfrac{p}{q} \ : \ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}
\end{aligned}$$

Intervalos

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$

$$\begin{array}{cc}
[a, b] & [a, +\infty[\\
]a, b] &]a, +\infty[\\
[a, b[&]-\infty, b] \\
]a, b[&]-\infty, b[\\
\{a\} &]-\infty, \infty[= \mathbb{R}
\end{array}$$

Axioma del supremo

Definición

Sean $A \subset \mathbb{R}$

- $a_0 \in \mathbb{R}$ es el máximo de A si $a_0 \in A$ y $a \leqslant a_0 \quad \forall a \in A$
- $a_0 \in \mathbb{R}$ es el mínimo de A si $a_0 \in A$ y $a \geqslant a_0 \quad \forall a \in A$
- $a_0 \in \mathbb{R}$ es una cota superior de A si $a \leqslant a_0 \quad \forall a \in A$
- $a_0 \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de A si $a \geqslant a_0 \quad \forall a \in A$
- Si A está acotado superiormente llamamos supremo de A a la menor de sus cotas superiores
- Si A está acotado inferiormente llamamos ínfimo de A a la mayor de sus cotas inferiores

Ejemplos

Calcular, si existen, el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo de los conjuntos $[0, 1]$, $[1, 2[$ y $\mathbb{N}$

Axioma del supremo

Axioma del supremo

Todo subconjunto de números reales acotado superiormente tiene supremo

Proposición (relación entre supremo y máximo)

Sea $A \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente y $x \in \mathbb{R}$ el supremo de A. Se verifican:

- Si $x \in A$ entonces A tiene máximo y éste coincide con x
- Si $x \notin A$ entonces A no tiene máximo

Funciones reales de variable real

Función real de variable real

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}$, una función real de variable real es una aplicación de A en $\mathbb{R}$. Esto es, una regla de asignación que a cada elemento de A le hace corresponder un único número real. Al conjunto A se le llama dominio de la función.

Ejemplos

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
   $f(x) = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$
2. $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
   $g(x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$
3. $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
   $h(x) = x \quad (x \in [0,1])$
4. $r : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
   $$r(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Función real de variable real

Imagen de una función

- Llamamos imagen de la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ al conjunto dado por $f(A) = Im(f) = \{f(x) \ : \ x \in A\}$
- Si $C \subset A$ llamamos imagen de C por f al conjunto $f(C) = \{f(x) \ : x \in C\}$

Operaciones con funciones

Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$

Suma $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (x \in A)$

Producto $(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad (x \in A)$

Cociente $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (x \in A \text{ tal que } g(x) \neq 0)$

Composición de funciones

Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones de modo que $f(A) \subset B$. Definimos la composición de f con g por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \qquad (x \in A)$$

Inversa de una función

Decimos que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene inversa si existe una función, que denotaremos por $f^{-1} : f(A) \longrightarrow \mathbb{R}$, verificando

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \qquad \forall x \in A \qquad \text{y} \qquad f\big(f^{-1}(y)\big) = y \qquad \forall y \in f(A)$$

Funciones elementales

Funciones elementales

- Funciones polinómicas
  $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad$ con $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$
- Funciones racionales
  $\frac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios. Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \ : \ q(x) = 0\}$
- Funciones potenciales
  $f(x) = x^b$ con $b \in \mathbb{R}$ fijo $\qquad f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
- Función exponencial
  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \mathrm{e}^x$
  - Es una biyección estrictamente creciente de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$
  - $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- Función logaritmo
  $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \log(x)$
  - Es la inversa de la exponencial
  - Es una biyección estrictamente creciente de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$
  - $\log(xy) = \log(x) + \log(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$
  - $\log(x^y) = y \log(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}$

Funciones elementales

- Función exponencial de base $a \neq 1$, $a > 0$
  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = a^x = \mathrm{e}^{\log(a^x)} = \mathrm{e}^{x \log(a)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- Función logaritmo de base $a \neq 1$, $a > 0$
  $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f(x) = \log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Funciones trigonométricas

- Función seno
  $\text{sen} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  - Es impar y 2π periódica
  - Es una biyección estrictamente creciente de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ en $[-1, 1]$
- Función coseno
  $\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  - Es par y 2π periódica
  - Es una biyección estrictamente decreciente de $[0, \pi]$ en $[-1, 1]$
- Función tangente
  $\tan : A \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{donde } A = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$
  $$\tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} \qquad \forall x \in A$$
  - Es impar y π periódica
  - Es una biyección estrictamente creciente de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ en $\mathbb{R}$

Funciones trigonométricas

- Función secante

  $\sec : A \longrightarrow \mathbb{R}$

  $$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad \forall x \in A$$

- Función cosecante

  $\operatorname{cosec} : B \longrightarrow \mathbb{R} \qquad$ donde $B = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$

  $$\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \qquad \forall x \in B$$

- Función cotangente

  $\operatorname{cotan} : B \longrightarrow \mathbb{R}$

  $$\operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \qquad \forall x \in B$$

Inversas de funciones trigonométricas

- Función arcoseno
  $\operatorname{arc\,sen} : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

  $\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen}(x)) = x \quad \forall x \in [-1,1], \qquad \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen}(y)) = y \quad \forall y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- Función arcocoseno
  $\operatorname{arc\,cos} : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$

  $\cos(\operatorname{arc\,cos}(x)) = x \quad \forall x \in [-1,1], \qquad \operatorname{arc\,cos}(\cos(y)) = y \quad \forall y \in [0,\pi]$
- Función arcotangente
  $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

  $\tan(\arctan(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \arctan(\tan(y)) = y \quad \forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Funciones hiperbólicas

- Seno hiperbólico
  $\operatorname{senh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $$\operatorname{senh}(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$
- Coseno hiperbólico
  $\cosh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $$\cosh(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$
- Tangente hiperbólica
  $\tanh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
  $$\tanh(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}$$

Números Complejos

Números complejos. Operaciones

El cuerpo $\mathbb{C}$

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

- Suma: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \qquad \forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$
- Producto: $(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc) \qquad \forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$
- $\mathbb{R}^2$ con la operación suma es un grupo abeliano
- El producto es asociativo, conmutativo y distributivo respecto a la suma
- Elemento neutro: $(a, b)(1, 0) = (a, b) \qquad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$
- Elemento inverso: $(a, b)\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) \qquad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

Con estas dos operaciones tenemos el cuerpo de los números complejos, que se denota por $\mathbb{C}$

Partes real e imaginaria de un número complejo

Inclusión de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$

Dado $x \in \mathbb{R}$ identificamos $x \equiv (x, 0)$ con lo que tenemos $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
En particular $1 \equiv (1, 0)$

Partes real e imaginaria de un número complejo

Consideramos la base usual de $\mathbb{R}^2$: $(1, 0) \equiv 1$ y $(0, 1) \stackrel{def}{=} i$

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + bi$$

Cada número complejo z se escribe de manera única como $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$

- a es la parte real de z: $a = \mathrm{Re}(z)$
- b es la parte imaginaria de z: $b = \mathrm{Im}(z)$

Operaciones con parte real e imaginaria

Suma

$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$

Producto

Basta tener en cuenta que $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$

$$(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2 bd = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Conjugado de un número complejo

Complejo conjugado

Dado $z = a + ib \in \mathbb{C}$ definimos su conjugado por $\overline{z} = a - ib$

Propiedades

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$

Módulo de un número complejo

Módulo

Dado $z = a + ib \in \mathbb{C}$ definimos su módulo por $|z| = (a^2 + b^2)^{1/2}$

Propiedades

- $|z| \geqslant 0$ y se tiene $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|zw| = |z||w|$
- $\Big||z| - |w|\Big| \leqslant |z \pm w| \leqslant |z| + |w|$ (desigualdad triangular)
- $z\overline{z} = |z|^2 \rightsquigarrow z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ si $z \neq 0$

Forma polar (módulo-fase) de un número complejo

Dado $z \in \mathbb{C}$ no nulo se puede encontrar $\theta \in \mathbb{R}$ de modo que

$$z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \qquad \text{(forma polar de } \theta\text{)}$$

Argumento

Decimos que θ es un argumento del número complejo z

- Si θ_1 y θ_2 son argumentos de z entonces $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta_2 = \theta_1 + 2k\pi$
- Por tanto, conocido un argumento los conocemos todos
- Para cada $z \in \mathbb{C}$ no nulo existe un único argumento en el intervalo semiabierto $]-\pi, \pi]$ al que llamamos argumento principal de z y denotamos por $\arg z$

Ejemplo

Escribir $1 + i$ en forma polar

Interpretación geométrica del producto complejo

Sean$z, w \in \mathbb{C}$ no nulos y $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ argumentos de z y w respectivamente

$$z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$
$$w = |w|(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$$

Entonces $\theta + \varphi$ es un argumento de zw

- Dado $u \in \mathbb{C}$ con $|u| = 1$ la aplicación $z \mapsto uz$ es el giro de ángulo $\theta = \arg u$
- Dado $\lambda \in \mathbb{R}^+$, la aplicación $z \mapsto \lambda z$ es la homotecia de razón λ
- Por tanto, dado $w \in \mathbb{C}$ no nulo, la aplicación $z \mapsto wz$ es la composición de la homotecia de razón $\lambda = |w|$ y el giro de ángulo $\theta = \arg w$

Fórmula de De Moivre

Dado $z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene $z^n = |z|^n\big(\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)\big)$