Tema 4. Integración de funciones de una variable

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

Funciones Integrables

Funciones integrables

Una partición del intervalo $[a, b]$ es un conjunto finito

$$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

donde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función acotada definimos la suma superior de f relativa a la partición P como

$$S(f, P) = \sup f([x_0, x_1])(x_1 - x_0) + \cdots + \sup f([x_n, x_{n-1}])(x_n - x_{n-1}).$$

y la suma inferior

$$I(f, P) = \inf f([x_0, x_1])(x_1 - x_0) + \cdots + \inf f([x_n, x_{n-1}])(x_n - x_{n-1}).$$

Funciones integrables

La integral superior de f es

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{S(f,P) \ : \ P \text{ es una partición de } [a,b]\}$$

y la integral inferior

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{I(f,P) \ : \ P \text{ es una partición de } [a,b]\}$$

Definición

Decimos que f es integrable si la integral superior y la inferior coinciden. En tal caso utilizamos la notación

$$\int_a^b f(x)dx := \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Funciones integrables

Observación

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable y positiva entonces $\int_a^b f(x)dx$ representa el área de la región comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje de abcisas y las rectas verticales $x = a$, $x = b$.

Ejemplos

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada.

- Si f es continua salvo en un número finito de puntos de $[a, b]$ entonces f es integrable.
- Si f es monótona entonces f es integrable.

Propiedades de la integral

Proposición

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrables. Se verifican:

- $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad \forall c \in [a, b]$
- Si $f(x) \leqslant g(x)\ \forall x \in [a, b]$ entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$

Forma de calcular la integral

Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, decimos que $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una primitiva de f si

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a, b].$$

Teorema (Regla de Barrow)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable y F una primitiva de f. Entonces,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Ejemplos

- $\displaystyle\int_0^1 xdx$
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

Teorema Fundamental del Cálculo

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Entonces la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (x \in [a, b])$$

es derivable en $[a, b]$ y $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a, b]$.

Teorema Fundamental del Cálculo

Ejemplos

Calcular la derivada de:

- $F(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t)dt$
- $G(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t)dt$
- $H(x) = \int_{\log(x)}^{x^2} \cos(t)dt$

Cálculo de áreas de regiones no acotadas. Integrales impropias

Integración en intervalos no acotados

Sea $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una función que admite una primitiva F. Si F tiene límite en $+\infty$ definimos la integral impropia de f en $[a, +\infty[$ por

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \left(\lim_{x \to +\infty} F(x) \right) - F(a)$$

Sea $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ una función que admite una primitiva F. Si F tiene límite en $-\infty$ definimos la integral impropia de f en $]-\infty, b]$ por

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(b) - \left(\lim_{x \to -\infty} F(x) \right)$$

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \pm\infty$ ó $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \pm\infty$ diremos que la correspondiente integral impropia vale $\pm\infty$.

Integración en intervalos no acotados

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que admite una primitiva F. Si F tiene límite en $-\infty$ y en $+\infty$ definimos la integral impropia de f en $\mathbb{R}$ por

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \left(\lim_{x\to+\infty} F(x)\right) - \left(\lim_{x\to-\infty} F(x)\right)$$

- Si el resultado es $\infty - \infty$ no podemos calcular la integral.

Ejemplo

Calcular el área encerrada bajo la curva $y = \dfrac{1}{x^2}$ en el intervalo $[1, +\infty[$.

Integración de funciones no acotadas en intervalos abiertos

Sea $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ con una asíntota vertical en $x = a$. Si F es una primitiva de f y existe $\lim_{x \to a^+} F(x)$ definimos la integral impropia de f por

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - \left(\lim_{x \to a^+} F(x) \right)$$

Sea $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ con una asíntota vertical en $x = b$. Si F es una primitiva de f y existe $\lim_{x \to b^-} F(x)$ definimos la integral impropia de f por

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\lim_{x \to b^-} F(x) \right) - F(a)$$

- Si $\lim\limits_{x \to a^+} F(x) = \pm\infty$ ó $\lim\limits_{x \to b^-} F(x) = \pm\infty$ diremos que la correspondiente integral impropia vale $\pm\infty$.

Integración de funciones no acotadas en intervalos abiertos

Ejemplo

Calcular el área encerrada bajo la curva $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en $]0, 1]$.

Observación

Todas las fórmulas que aparecen en las aplicaciones de la integral se pueden generalizar a integrales impropias.

Aplicaciones de la integral

Aplicaciones de la integral

Área entre dos curvas

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrables. El área encerrada entre las gráficas de f y g en el intervalo $[a, b]$ viene dada por

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Ejemplo

Calcular el área encerrada entre las curvas $y = x^3 - x$ e $y = x^2 + x$.

Aplicaciones de la integral

Longitud de una curva

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivable en $]a, b[$ con f' integrable. La longitud del arco de la curva $y = f(x)$ entre a y b viene dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Ejemplo

Calcular la longitud de una circunferencia de radio 1.

Aplicaciones de la integral

Volumen de un sólido de revolución

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. El volumen del sólido generado al girar el área bajo la curva $y = f(x)$ respecto del eje OX entre a y b viene dado por

$$V_{OX} = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

y al girar respecto del eje OY

$$V_{OY} = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

Ejemplo

Calcular el volumen de una esfera de radio 1.

Aplicaciones de la integral

Área de una superficie de revolución

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivable en $]a, b[$ con f' integrable. El área de la superficie generada haciendo girar el arco de la curva $y = f(x)$ alrededor del eje OX en $[a, b]$ viene dada por

$$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Ejemplo

Calcular la superficie de una esfera de radio 1.

Cálculo de primitivas

Primitiva de funciones racionales

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx \qquad \text{donde } p(x) \text{ y } q(x) \text{ son polinomios.}$$

Caso 1 $\mathrm{grado}(p(x)) \geqslant \mathrm{grado}(q(x))$: Se divide $p(x)$ entre $q(x)$ obteniendo dos polinomios $c(x)$ y $r(x)$ verificando $p(x) = c(x)q(x) + r(x)$ y $\mathrm{grado}(r(x)) < \mathrm{grado}(q(x))$. Entonces podemos escribir

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \int c(x)dx + \int \frac{r(x)}{q(x)}dx.$$

Primitiva de funciones racionales

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx \qquad \text{donde } p(x) \text{ y } q(x) \text{ son polinomios.}$$

Caso 2 $\text{grado}(p(x)) < \text{grado}(q(x))$: Se factoriza $q(x)$ y se escribe $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ como suma de fracciones más simples.

Ejemplo

- $\displaystyle\int \frac{2x^3 - x^2 + 1}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$

Integración por partes

Dadas dos funciones $u(x), v(x)$ se verifica

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Ejemplos

- $\int \log(x)dx$
- $\int \arctan(x)dx$
- $\int x\mathrm{e}^x dx$
- $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\, dx$

Cambio de variable

Supongamos que $y = \phi(x)$. Entonces

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(y)dy$$

Ejemplo

- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,dx$

Primitiva de funciones trigonométricas

Primitivas de la forma

$$\int \frac{\text{Polinomio1}(\text{sen}(x), \cos(x))}{\text{Polinomio2}(\text{sen}(x), \cos(x))}\, dx$$

Se pueden abordar con el cambio de variable

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \rightsquigarrow \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \qquad \text{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Ejemplo

- $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\text{sen}(x)}$

El cambio no es recomendable si hay potencias elevadas de $\text{sen}(x)$ o $\cos(x)$

Caso particular

Primitivas de la forma

$\int \operatorname{sen}^n(x)\cos^m(x)dx$ donde $n, m \in \mathbb{Z}$

- Si m es impar se hace el cambio $y = \operatorname{sen}(x)$
- Si n es impar se hace el cambio $y = \cos(x)$
- Si m y n son pares se puede reducir el grado de la expresión utilizando las identidades

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

Caso particular

Ejemplos

- $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2(x)\cos^3(x)dx$
- $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4(x)dx$

Primitiva de funciones irracionales

Primitivas de la forma

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx$$

Se puede utilizar el cambio de variable $y^q = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ donde q es el mínimo común múltiplo de $q_1, \ldots, q_n$.

Ejemplo

- $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\, dx$

Primitiva de funciones irracionales

Primitivas en las que aparece la expresión

$\sqrt{ax^2 + bx + c}$

Se completan cuadrados para obtener una expresión de la forma

- $\sqrt{1 - y^2}$ y se hace el cambio $y = \operatorname{sen}(z)$ (porque $1 - y^2 = \cos^2(z)$)
- $\sqrt{1 + y^2}$ y se hace el cambio $y = \tan(z)$ (porque $1 + y^2 = \sec^2(z)$)
- $\sqrt{y^2 - 1}$ y se hace el cambio $y = \cosh(z)$ (porque $y^2 - 1 = \operatorname{senh}^2(z)$)

Ejemplo

- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x}}$