Tema 6. El espacio euclideo. Diferenciabilidad de funciones de varias variables

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

El espacio euclideo $\mathbb{R}^n$

Producto escalar, norma y distancia

$\mathbb{R}^n$ tiene estructura de espacio vectorial con las operaciones

$$\begin{array}{rl} \text{Suma} & (x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n) \\ \text{Producto por escalares} & \lambda(x_1,\dots,x_n)=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n) \end{array}$$

Definición

- Se define el producto escalar de $x, y \in \mathbb{R}^n$ como $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$
- Se define la norma de $x \in \mathbb{R}^n$ como $\|x\| = (\langle x, x\rangle)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$

Producto escalar, norma y distancia

Propiedades de la norma

- $\|x\| \geqslant 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$ y $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$
- $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (desigualdad triangular)
- $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\| \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (desigualdad de Cauchy-Schwartz)
- $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (identidad del paralelogramo)

Definimos la distancia entre los vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ como $d(x, y) = \|x - y\|$

Conjuntos destacados en $\mathbb{R}^n$

Bolas en $\mathbb{R}^n$

- La bola abierta de centro $a \in \mathbb{R}^n$ y de radio $r > 0$ es

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x - a\| < r\}$$

- La bola cerrada de centro $a \in \mathbb{R}^n$ y de radio $r > 0$ es

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x - a\| \leqslant r\}$$

Definición

- Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, decimos que $a \in A$ es un punto interior si existe $r > 0$ de modo que $B(a, r) \subset A$
- El interior de A es el conjunto $\overset{\circ}{A} = \{a \in A \ : \ a \text{ es punto interior de } A\}$
- Decimos que A es abierto si $A = \overset{\circ}{A}$

Conjuntos destacados en $\mathbb{R}^n$

Definición

- Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, decimos que $x \in \mathbb{R}^n$ es un punto adherente si para cada $r > 0$ se tiene que $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$
- La adherencia (o cierre) de A es el conjunto $\overline{A} = \{a \in \mathbb{R}^n \ : \ a \text{ es punto adherente de } A\}$
- Decimos que A es cerrado si $A = \overline{A}$

- Las bolas abiertas son conjuntos abiertos y las bolas cerradas son cerrados
- Existen conjuntos que no son abiertos ni cerrados

Conjuntos destacados en $\mathbb{R}^n$

Observación

Para cada conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se cumple $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$

Llamamos frontera de A al conjunto $Fr(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$

Definición

- Decimos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es acotado si existe $M > 0$ tal que $A \subset B(0, M)$
- A es compacto si es cerrado y acotado

Funciones de varias variables. Continuidad

Funciones de varias variables

Definición

Llamamos campo escalar (o función real de n variables reales) a toda aplicación $f : A \to \mathbb{R}$ donde $A \subset \mathbb{R}^n$.

Ejemplos

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad f(x, y) = x^2 + \mathrm{e}^{xy} + 2y$
- $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad g(x, y, z) = xyz$

Funciones de varias variables

Definición

Un campo vectorial es una aplicación $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Si $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$ a las m funciones $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(k = 1, \ldots, n)$ las llamamos componentes de f.

Ejemplo

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad f(x, y) = (\mathrm{e}^{x+y}, \arctan(y), x^2 y)$

Continuidad

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que $f : A \to \mathbb{R}^m$ es continua en $a \in A$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tal que si } \|x - a\| < \delta \text{ y } x \in A \text{ entonces } \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$$

f es continua en $a \iff$ lo son todas sus componentes
f es continua en A si es continua en todos los puntos de A

- La suma, el producto, el cociente y la composición de funciones continuas son continuos donde tienen sentido.

Teorema (de Weierstrass)

Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $f : A \to \mathbb{R}$ continua. Entonces f alcanza su máximo y su mínimo absolutos en A.

Forma de determinar si un conjunto es abierto o cerrado

Sea A un conjunto determinado por desigualdades que involucran a funciones continuas.

- Si todas las desigualdades son estrictas entonces A es abierto.
- Si todas las desigualdades son no estrictas o igualdades entonces A es cerrado.

Ejemplos

- $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + \frac{y^2}{4} < 1\right\}$
- $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y < 0, x^2 + y^2 > 1\}$
- $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y = 1, x - z = 0\}$
- $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leqslant 1\right\}$

Derivadas parciales. Extremos relativos

Derivadas parciales

Definición

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se define la derivada parcial de f en $a \in \overset{\circ}{A}$ respecto a la variable k-ésima como

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + he_k) - f(a)}{h}$$

donde e_k es el k-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo

- Estudiar la existencia de derivadas parciales en $(0, 0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = xy + y^2$.

Derivadas parciales

Observación

Para calcular la derivada parcial respecto a una variable se deriva la función respecto a esa variable considerando las demás como constantes

Ejemplo

- Calcular las derivadas parciales de la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = \log(1 + x^2) + 3xy - x\mathrm{e}^{y+z}$.

Extremos relativos

Definición

Decimos que $f : A \to \mathbb{R}$ alcanza un máximo (resp. mínimo) relativo en $a \in A$ si

- $a \in \overset{\circ}{A}$
- $\exists r > 0$ tal que $f(x) \leqslant f(a)\ \forall x \in B(a, r)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$)

Proposición (Condición necesaria de extremo relativo)

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ de modo que existen todas las derivadas parciales en $a \in \overset{\circ}{A}$. Si f tiene un extremo relativo en a entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0 \qquad \forall k = 1, \ldots, n$$

Puntos críticos

Llamaremos puntos críticos a aquellos en los que existen todas las derivadas parciales y valen cero.

Ejemplo

Calcular los puntos críticos de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Vector gradiente, derivadas direccionales y plano tangente

Vector gradiente y derivadas direccionales

Vector gradiente

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales en $a \in \overset{\circ}{A}$. El vector gradiente de f en a viene dado por

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

Derivadas direccionales

Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \overset{\circ}{A}$ y $v \in \mathbb{R}^n$ con $\|v\| = 1$. Se define la derivada direccional de f en a según la dirección de v como

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hv) - f(a)}{h}$$

Vector gradiente y derivadas direccionales

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Decimos que $f : A \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 en A si existen todas sus derivadas parciales en todos los puntos de A y son continuas en A. Escribiremos $f \in C^1(A)$.

Proposición (relación entre derivadas direccionales y gradiente)

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f \in C^1(A)$, $a \in A$ y $v \in \mathbb{R}^n$ con $\|v\| = 1$. Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle.$$

Consecuencia

La derivada direccional es máxima en la dirección del gradiente.

Plano tangente

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ abierto, $f \in C^1(A)$. Llamamos plano tangente a la gráfica de f en el punto $a = (a_1, a_2) \in A$ al plano de ecuación

$$\begin{aligned} z &= f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - a_2) \\ &= f(a) + \langle \nabla f(a), (x - a_1, y - a_2) \rangle \end{aligned}$$

Ejemplo

Calcular el plano tangente a la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$ en los puntos $(1, 1)$ y $(0, 0)$.

Derivadas de orden superior. Matriz hessiana

Derivadas de orden superior

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : A \to \mathbb{R}$ de modo que existen todas sus derivadas parciales en A. Decimos que f admite derivada parcial segunda respecto a x_k y x_j si $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ es derivable respecto a x_j. En tal caso escribiremos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$$

Ejemplo

Calcular las derivadas parciales de orden 2 de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

Matriz hessiana

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, decimos que $f : A \to \mathbb{R}$ es de clase C^2 en A si existen todas sus derivadas parciales de orden 2 y son continuas en A.

Teorema (de Schwarz)

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y f de clase C^2 en A. Entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(a) \qquad \forall a \in A, \forall j, k \in \{1, \ldots, n\}$$

Matriz hessiana

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f \in C^2(A)$. La matriz hessiana de f en $a \in A$ viene dada por

$$Hess(f,a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Observación

Como $f \in C^2(A)$, se tiene que $Hess(f,a)$ es una matriz simétrica real.

Matriz hessiana

Ejemplo

Calcular la matriz hessiana de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ en un punto cualquiera (x, y)

Extremos de funciones de dos variables

Teorema

Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ abierto, $f \in C^2(A)$ y a un punto crítico de f. Se verifican:

- Si $\det(Hess(f,a)) > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$ entonces f alcanza un mínimo relativo en a
- Si $\det(Hess(f,a)) > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$ entonces f alcanza un máximo relativo en a
- Si $\det(Hess(f,a)) < 0$ entonces f no tiene extremo relativo en a

Ejemplos: estudiar los extremos relativos de

- $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
- $g(x,y) = (x-1)^4 + (x-y)^4$

Extremos de funciones de tres variables

Teorema

Sea $A \subset \mathbb{R}^3$ abierto, $f \in C^2(A)$ y a un punto crítico de f. Sean H_1, H_2 y H_3 los menores principales de $Hess(f, a)$. Se verifican:

- Si $\det(H_1) > 0$, $\det(H_2) > 0$ y $\det(H_3) > 0$ entonces f alcanza un mínimo relativo en a
- Si $\det(H_1) < 0$, $\det(H_2) > 0$ y $\det(H_3) < 0$ entonces f alcanza un máximo relativo en a
- Cualquier otra configuración de signos (estrictos) nos dice que f no tiene extremo relativo en a

Ejemplo

Estudiar los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + yz + 2xz - xy$

Extremos absolutos en conjuntos compactos. Extremos condicionados

Extremos absolutos

$$\left.\begin{array}{l} A \subset \mathbb{R}^n \text{ compacto} \\ f : A \to \mathbb{R} \text{ continua} \end{array}\right\} \underset{\text{Weierstrass}}{\overset{\text{Teorema}}{\Longrightarrow}} f \text{ alcanza sus extremos absolutos en } A$$

Tenemos dos posibilidades para los extremos absolutos:

Están en $\overset{\circ}{A}$ Entonces también son extremos relativos y, si $f \in C^1(\overset{\circ}{A})$, deben ser puntos críticos

Están en $Fr(A)$

Es decir, los extremos absolutos están entre los puntos críticos de f en $\overset{\circ}{A}$ o en la frontera de A

Trabajo en la frontera. Extremos condicionados

Definición

Sean $B \subset A \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que $f : A \to \mathbb{R}$ alcanza en $b \in B$ un máximo relativo condicionado al conjunto B (resp. mínimo) si existe $r > 0$ tal que $f(x) \leqslant f(b)\ \forall x \in B(b, r) \cap B$ (resp. $f(x) \geqslant f(b)$)

Curvas y superficies de nivel

- Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$, llamamos curva de nivel c de la función g al conjunto
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ g(x, y) = c\}$$
- Sea $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$, llamamos superficie de nivel c de la función h al conjunto
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ h(x, y, z) = c\}$$

Método de los multiplicadores de Lagrange

Sean $B \subset A \subset \mathbb{R}^n$ y $f \in C^1$. Supongamos que existen $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ g(x) = c\}.$$

Entonces los posibles extremos relativos de f condicionados a B se encuentran entre las soluciones del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \\ \quad \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) \\ g(x) = c \end{cases}$$

Ejemplo

Calcular el máximo de $f(x, y) = x^3 + y^3$ en el conjunto
$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 18\}$

Método de los multiplicadores de Lagrange

Ejercicio

Estudiar la existencia de extremos relativos de la función $f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 4x$ en $\mathbb{R}^2$. Encontrar los extremos absolutos de f en el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 4x^2 + y^2 \leqslant 4\}$

Derivación de campos vectoriales. Regla de la cadena en derivadas parciales

Matriz Jacobiana

Decimos que un campo vectorial $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ admite derivadas parciales en $a \in \overset{\circ}{A}$ si los m campos coordenados de f admiten derivadas parciales en a. En tal caso, definimos la matriz Jacobiana de f en a por

$$J(f,a) = \begin{pmatrix} \leftarrow\!- \; \nabla f_1(a) \; -\!\!\rightarrow \\ \leftarrow\!- \; \nabla f_2(a) \; -\!\!\rightarrow \\ \vdots \\ \leftarrow\!- \; \nabla f_m(a) \; -\!\!\rightarrow \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Ejemplo

Calcular la matriz jacobiana de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$f(x,y) = (x - y, xy, \operatorname{sen}(x+y))$

Regla de la cadena en derivadas parciales

Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ y $g : B \to \mathbb{R}^p$ de modo que $f(A) \subset B$. Si f admite derivadas parciales en $a \in \overset{\circ}{A}$ y g admite derivadas parciales en $f(a) \in \overset{\circ}{B}$ entonces

$$\underset{p\times n}{J(g \circ f, a)} = \underset{p\times m}{J(g, f(a))} \cdot \underset{m\times n}{J(f, a)}$$

Ejemplo

Sean $g(u, v) = uv^2$, $u(x, y) = x\mathrm{e}^y$, $v(x, y) = x + 2y$. Calcular las derivadas parciales de $h(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$