Tema 3. Derivabilidad de funciones de una variable

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

Derivabilidad de funciones de una variable

Derivabilidad

Definición

La función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $a \in A \cap A'$ si existe el límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

que en tal caso denotaremos por $f'(a)$. La función dada por $a \mapsto f'(a)$ es la función derivada de f que denotamos f'

Ejemplos

La mayoría de las funciones elementales son derivables en todo su dominio. Hay algunas excepciones:

$$\sqrt{\cdot} : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad |\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

son derivables en su dominio salvo en cero.

Interpretación geométrica de la derivada. Recta tangente

Supongamos que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $a \in A \cap A'$. Entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) &\iff \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = 0 \\
&\iff \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} = 0 \\
&\iff \lim_{x \to a} \frac{f(x) - \big(f(a) + f'(a)(x - a)\big)}{x - a} = 0
\end{aligned}$$

Es decir, la recta $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ aproxima muy bien a la función f alrededor del punto a. La llamamos recta tangente a la gráfica de f en a.

Relación de la derivabilidad con las operaciones

Observación

Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $a \in A \cap A'$ entonces f es continua en a

Proposición

Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ derivables en $a \in A \cap A'$. Entonces:

1. $f + g$ es derivable en a y $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
2. fg es derivable en a y $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
3. Si $g(a) \neq 0$ entonces $\frac{f}{g}$ es derivable en a y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

Relación de la derivabilidad con las operaciones

Regla de la cadena

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en $a \in A \cap A'$ con $f(A) \subset B$ y sea $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en $f(a) \in B'$. Entonces $g \circ f$ es derivable en a y

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

Derivada de la función inversa

Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene inversa $f^{-1} : f(A) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f'(a) \neq 0$ y f^{-1} es continua en $f(a)$ entonces f^{-1} es derivable en $f(a)$ y

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

Ejemplo

Calcular la derivada de la arcotangente

Condición necesaria de extremo relativo

Definición

La función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un máximo relativo en $a \in A$ (resp. mínimo relativo) si existe $r > 0$ de modo que

- $]a - r, a + r[\subset A$
- $f(x) \leqslant f(a)\ \forall x \in]a - r, a + r[$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$)

Proposición

Supongamos que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ alcanza un extremo relativo en $a \in A$. Si f es derivable en a entonces $f'(a) = 0$.

Llamaremos puntos críticos a aquellos en los que se anula f'.

Condición necesaria de extremo relativo

Consecuencia: cálculo de extremos en un intervalo cerrado y acotado

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$.

- f alcanza su máximo y mínimo absolutos en $[a, b]$ (Teorema de Weierstrass)
- Si los extremos absolutos no están ni en a ni en b son además extremos relativos $\rightsquigarrow f'$ se anula en ellos.
- Resumen: los extremos absolutos se encuentran o bien entre los puntos críticos de f o en a o en b.

Ejemplo

Calcular los extremos absolutos de $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

Propiedades de las funciones derivables

Teorema de Rolle

Teorema de Rolle

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$ de modo que $f(a) = f(b)$. Entonces existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Observación

El teorema de Rolle nos dice, en particular, que entre cada dos ceros de la función hay (al menos) un cero de la derivada.

Ejemplo

Calcular el número de soluciones de la ecuación $x^2 - x\,\mathrm{sen}(x) - \cos(x) = 0$.

Teorema del valor medio

Teorema del valor medio

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Entonces existe $c \in]a, b[$ de modo que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Ejemplo

Probar que $|\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)| \leqslant |x - y| \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Consecuencias del teorema del valor medio

Proposición (Estudio del crecimiento mediante la derivada)

Sea I un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable. Entonces

- f es creciente en $I \iff f'(x) \geqslant 0 \ \forall x \in I$.
- f es decreciente en $I \iff f'(x) \leqslant 0 \ \forall x \in I$.
- f es constante en $I \iff f'(x) = 0 \ \forall x \in I$.
- Si $f'(x) > 0 \ \forall x \in I$ entonces f es estrictamente creciente en I.
- Si $f'(x) < 0 \ \forall x \in I$ entonces f es estrictamente decreciente en I.

Ejemplo

Calcular la imagen de las funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

Consecuencias del teorema del valor medio

Proposición (Primera regla de L'Hôpital)

Sea I un intervalo, $a \in I$ ($a = \pm\infty$), $f, g : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables de modo que $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$ y $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I \setminus \{a\}$. Entonces

$$\text{Si} \quad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \begin{cases} L \\ -\infty \\ +\infty \end{cases} \quad \text{se tiene que} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} L \\ -\infty \\ +\infty \end{cases}$$

Ejemplo

$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-x}{x^3}$

Consecuencias del teorema del valor medio

Proposición (Segunda regla de L'Hôpital)

Sea I un intervalo, $a \in I$ $(a = \pm\infty)$, $f, g : I \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables de modo que $\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ y $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in I \setminus \{a\}$. Entonces

$$\text{Si} \quad \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \begin{cases} L \\ -\infty \\ +\infty \end{cases} \quad \text{se tiene que} \quad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} L \\ -\infty \\ +\infty \end{cases}$$

Ejemplos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)\log(2x) - x\log(x+1)}{x} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \operatorname{sen}(x)}{x}$$

Derivadas de orden superior. Polinomio de Taylor

Derivadas de orden superior

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable y sea $a \in A \cap A'$. La función f es dos veces derivable en a si f' es derivable en a.
De modo análogo se pueden definir las derivadas sucesivas. Si f es n veces derivable utilizaremos $f^{(n)}$ para denotar la derivada de orden n.

Ejemplos

La mayoría de las funciones elementales admiten derivadas de todos los órdenes en todo su dominio.

Polinomio de Taylor

Definición

Sea I un intervalo, $n \in \mathbb{N}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ n veces derivable en $a \in I$. El polinomio de Taylor de grado n de la función f centrado en a viene dado por

$$P_{f,n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Observación

Para cada $k = 0, 1, \ldots, n$ se verifica que $P^{(k)}_{f,n,a}(a) = f^{(k)}(a)$.

Ejemplo

Calcular el polinomio de Taylor de grado n de la función exponencial centrado en el origen.

Polinomio de Taylor

Teorema (de Taylor-Young)

Sea I un intervalo, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función n veces derivable en $a \in I$. Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{f,n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Polinomio de Taylor

Proposición (condiciones suficientes de extremo relativo)

Sea I un intervalo, $a \in I$ un punto que no es un extremo de I y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función $n \geqslant 2$ veces derivable en a. Supongamos que $f^{(k)}(a) = 0$ $\forall k = 1, 2, \ldots, n-1$ y que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Se verifican:

- Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$ entonces f tiene un mínimo relativo en a.
- Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$ entonces f tiene un máximo relativo en a.
- Si n es impar entonces f no tiene extremo relativo en a.

Ejemplos

$$x^3 \qquad x^4 \qquad -x^4$$

Polinomio de Taylor

Teorema (de Taylor)

Sea I un intervalo, $a \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función $n+1$ veces derivable. Entonces, dado $x_0 \in I \setminus \{a\}$ existe $c \in]a, x_0[$ tal que

$$f(x_0) - P_{f,n,a}(x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x_0 - a)^{n+1}$$

Ejemplo

Calcular el orden del polinomio de Taylor centrado en cero necesario para aproximar la función seno en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ con un error menor que 10^{-12}.