Análisis matemático - Curso 2021/2022
Grado en Ingeniería de Tecnologías de Telecomunicación

Examen - Convocatoria ordinaria - 13/01/2022

Ejercicio I (2 puntos). Sea $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \frac{\displaystyle\int_0^{x^2} \left(1 + \operatorname{sen}(2t^2)\right)^{-\frac{1}{t^2}} \cdot \tan(2\sqrt{t})\, dt}{x^3}.$$

1. Calcular, si existe, el límite $\lim_{x \to 0^-} f(x)$.
2. Explicar el significado del resultado obtenido utilizando la definición de límite.
3. ¿Se puede definir una función $g(x)$ continua en todo $\mathbb{R}$ que valga $f(x)$ cuando $x < 0$? Si fuese posible, mostrar un ejemplo de tal función.

Ejercicio II (2 puntos). Sea $f(x) = 3^{x+\frac{1}{x}}$, definida para $x \neq 0$.

1. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos locales de la función.
2. Determinar la imagen de la función y hacer una representación de su gráfica.
3. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = a$? Estudiar todos los casos posibles según el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio III (2 puntos). Se consideran dos rectas paralelas en el plano y un punto P, interior a la banda delimitada por las dos rectas, situado a distancia a y b de las dos rectas respectivamente. Se quieren elegir ahora dos semi-rectas perpendiculares con origen en P que cortan a las dos rectas iniciales respectivamente en los puntos A y B, de manera que el triángulo APB tenga área mínima. ¿Cómo hay que elegir las dos semi-rectas y cuál es el valor de dicha área?

Ejercicio IV (2 puntos). Se considera la función

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$$

definida en el dominio

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1 \right\}.$$

1. Determinar la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

2. Determinar y clasificar los puntos críticos de f en el interior de D.

3. Determinar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de f y especificar si estos se alcanzan en el interior o en la frontera de D.

Ejercicio V (2 puntos). Calcular las siguientes integrales:

1. $\displaystyle\int_0^5 \left(\frac{e^{\tan(\pi x)}}{\cos^2(\pi x)} + \frac{2x+1}{x^2+25} \right) dx\,.$

2. $\displaystyle\iint_D \frac{y}{x} \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy$, siendo D la región de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio unitario comprendida en el primer cuadrante y delimitada por las rectas $y = 0$, $y = x$.