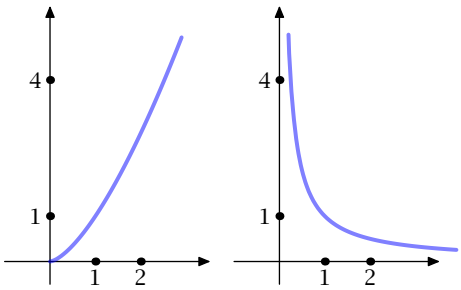
Funciones elementales

A

A.1 Funciones potenciales

La función potencial $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^b$ tiene sentido para cualquier exponente b real. En el caso particular de potencias naturales, se puede extender la definición a toda la recta real.

a) f es biyectiva de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$, continua y derivable con $f'(x) = bx^{b-1}$.
b) $(xy)^b = x^b y^b$.
c) Si $b > 0$, f es estrictamente creciente y verifica $\lim\limits_{x\to 0} x^b = 0$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} x^b = +\infty$.
d) Si $b < 0$, f es estrictamente decreciente y verifica $\lim\limits_{x\to 0} x^b = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} x^b = 0$.



exponente $b > 0$ exponente $b < 0$

Ilustración A.1 Función pontencial

Como consecuencia se obtiene que los polinomios, suma de funciones potenciales con exponente natural, son derivables en todo $\mathbb{R}$. Más concretamente, si $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, entonces $p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + na_n x^{n-1}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

A.2 Función exponencial

La función exponencial de base e, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida como $f(x) = e^x$. A veces usaremos la notación $\exp(x)$ para indicar e^x.

a) f es continua y derivable en $\mathbb{R}$ con $f'(x) = e^x$.
b) f es biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$ y estrictamente creciente.
c) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x = 0$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$.
d) $e^{x+y} = e^x e^y$.

A.3 Función logaritmo neperiano

La función logaritmo neperiano, $g(x) = \ln(x)$ para x positivo, es la inversa de la función exponencial.

a) g es derivable y $g'(x) = \frac{1}{x}$.

b) g es biyectiva de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$ y estrictamente creciente.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

d) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^+$.

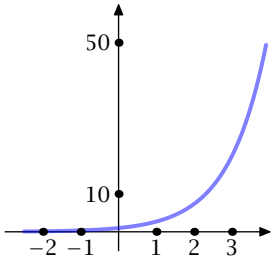
e) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^+$.

f) $\ln(x^y) = y\ln(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ y \in \mathbb{R}$.

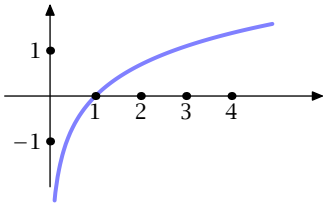
g) $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$.

Haciendo uso de la siguiente fórmula se deducen las demás funciones elementales, excepto las trigonométricas

$$a^b = e^{\ln(a^b)} = e^{b\ln(a)}, \quad \forall a \in \mathbb{R}^+,\ b \in \mathbb{R}.$$



Exponencial



Logaritmo neperiano

Ilustración A.2

A.4 Función exponencial de base $a \neq 1$

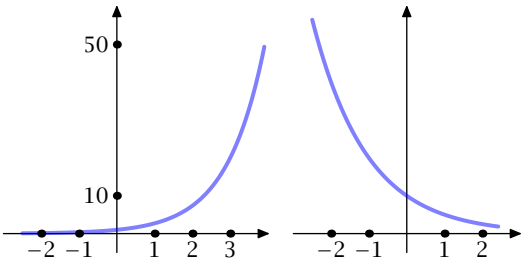
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a^x, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

a) f es biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$, continua y verifica $a^{x+y} = a^x a^y$.

b) Si $a > 1$, f es estrictamente creciente y verifica $\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = 0$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = +\infty$.

c) Si $a < 1$, f es estrictamente decreciente y verifica $\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} a^x = 0$.

d) f es derivable y $f'(x) = a^x \ln(a)$.



base $a > 1$ base $a < 1$

Ilustración A.3 Función exponencial

A.5 Funciones logarítmicas de base $a \neq 1$

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

a) g es biyectiva de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$ y continua. Además g es la inversa de la función exponencial de base a. Verifica también que

$$\begin{aligned} \log_a(xy) &= \log_a(x) + \log_a(y), \\ \log_a(\tfrac{x}{y}) &= \log_a(x) - \log_a(y), \\ \log_a(x^z) &= z\log_a(x) \end{aligned}$$

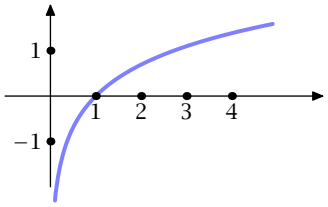
para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^+$, $z \in \mathbb{R}$.

b) Si $a > 1$, g es estrictamente creciente y

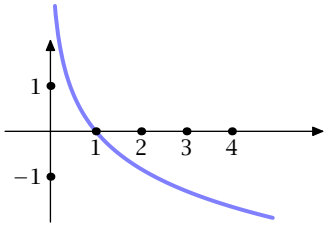
$$\lim_{x\to 0} \log_a x = -\infty, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = +\infty.$$

c) Si $a < 1$, g es estrictamente decreciente y

$$\lim_{x\to 0} \log_a(x) = +\infty, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = -\infty.$$



logaritmo de base $a > 1$



logaritmo de base $a < 1$

Ilustración A.4 Función logaritmo

A.6 Funciones trigonométricas

A.6.1 Las funciones seno y coseno

$\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifican:

a) Son derivables en todo $\mathbb{R}$ y

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos(x), \ \cos'(x) = -\operatorname{sen}(x).$$

b) Son funciones periódicas de periodo 2π

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x), \ \cos(x + 2\pi) = \cos(x).$$

c) $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

d) $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ es una biyección estrictamente decreciente con $\cos(0) = 1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\cos(\pi) = -1$.

e) $\operatorname{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ es una biyección estrictamente creciente con $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\operatorname{sen}(0) = 0$, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

f) La imagen, tanto de la función seno como de la función coseno, es el intervalo $[-1, 1]$.

g) La función coseno es par: $\cos(-x) = \cos(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$.

h) La función seno es impar: $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$.

i) $\cos(x + \pi) = -\cos(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen}(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$.

j) Las funciones seno y coseno no tienen límite en $+\infty$ ni en $-\infty$.

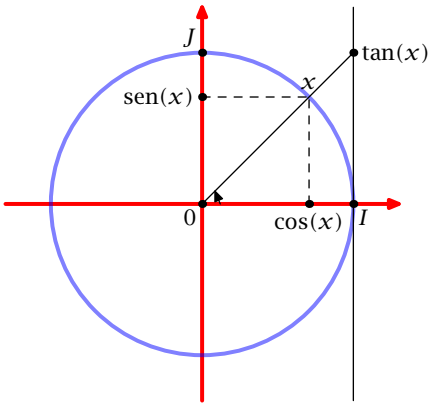


Ilustración A.5 Funciones seno y coseno

Fórmula fundamental de trigonometría

Algunos valores destacados de seno y coseno

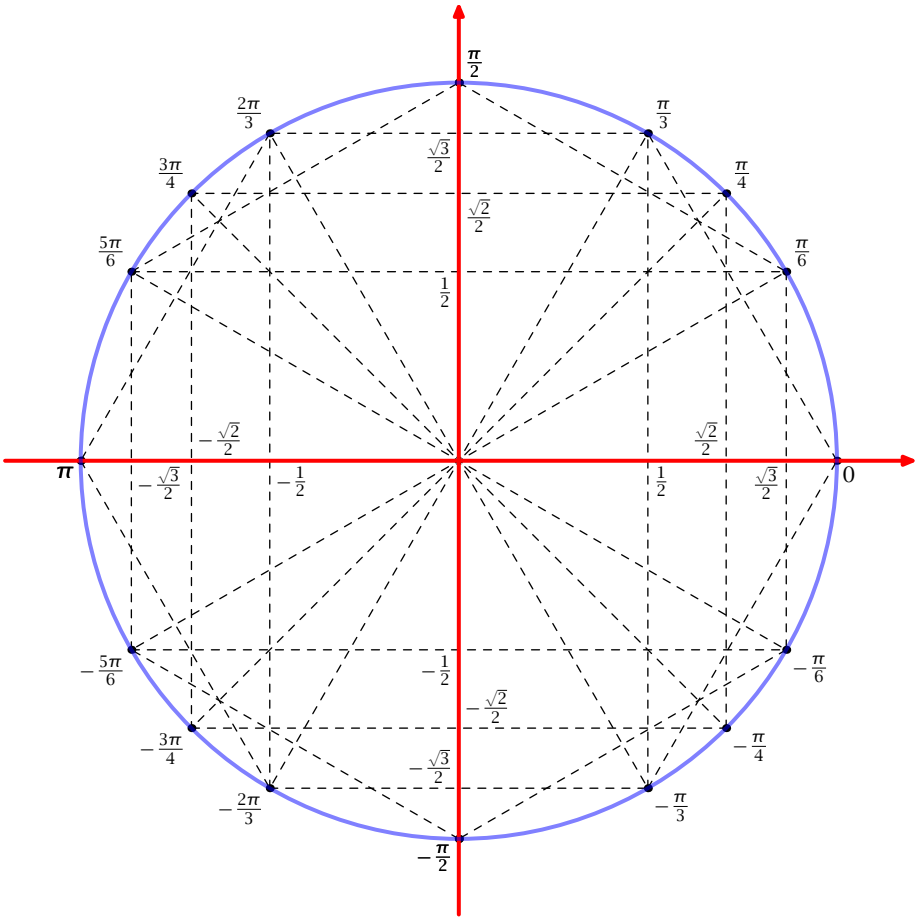


Ilustración A.6 Círculo trigonométrico

A.6.2 La función tangente

Como se verifica que $\cos(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, podemos definir la función tangente como

$$\tan : A \to \mathbb{R}, \quad A = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

a) $\tan(x + \pi) = \tan(x)$, $\forall\, x \in A$.

b) $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ es una función continua y estrictamente creciente y además verifica que $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$.

c) La función tangente es derivable y

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

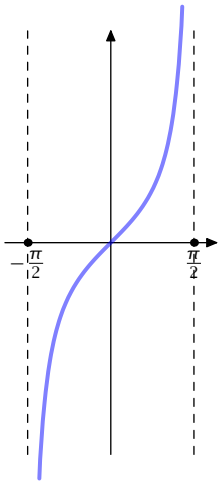


Ilustración A.7 Función tangente

A.6.3 Secante, cosecante, cotangente

Siempre que los respectivos denominadores no se anulen, se pueden definir las siguientes funciones

$$\operatorname{cosec} : B \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}, \quad \forall\, x \in B$$

$$\sec : A \to \mathbb{R}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos(x)}, \quad \forall\, x \in A$$

$$\operatorname{cotan} : B \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}, \quad \forall\, x \in B,$$

donde $A = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
Dichas funciones son continuas y derivables en su correspondiente dominio y

$$\begin{aligned} \sec'(x) &= \tan(x)\sec(x), \\ \operatorname{cosec}'(x) &= -\operatorname{cotan}(x)\operatorname{cosec}(x), \\ \operatorname{cotan}'(x) &= \frac{-1}{\operatorname{sen}^2(x)} = -\operatorname{cosec}^2(x) = -(1 + \operatorname{cotan}^2(x)). \end{aligned}$$

A.6.4 Inversas de funciones trigonométricas

Función arcoseno

Esta función es la inversa de la restricción de la función seno al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, y por tanto $\operatorname{arcsen} : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ verifica que $\operatorname{sen}(\operatorname{arcsen}(x)) = x$, $\forall x \in [-1,1]$.
Además, es una función biyectiva, continua y estrictamente creciente con

$$\operatorname{arcsen}(-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arcsen}(0) = 0, \quad \operatorname{arcsen}(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Por último, es derivable en el intervalo abierto $]-1,1[$ con derivada

$$\operatorname{arcsen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Función arcocoseno

Es la función inversa de la restricción de la función coseno al intervalo $[0,\pi]$, y por tanto $\cos(\arccos(x)) = x$, $\forall x \in [-1,1]$.
Esta función es biyectiva, continua y estrictamente decreciente con

$$\arccos(-1) = \pi, \quad \arccos(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \arccos(1) = 0$$

Es derivable en el intervalo abierto $]-1,1[$ con derivada

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Función arcotangente

Es la inversa de la restricción de la función tangente al intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ y, por tanto,

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

verifica que $\tan(\arctan(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Esta función es biyectiva, continua y estrictamente creciente con

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \arctan(0) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

- Es derivable en $\mathbb{R}$ y $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

A.6.5 Identidades trigonométricas

- Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$$

$$\operatorname{cotan}^2(x) + 1 = \operatorname{cosec}^2(x)$$

- Suma y diferencia de ángulos

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) \pm \cos(x)\operatorname{sen}(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$

- Angulo doble

$$\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x)$$

- Angulo mitad

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{1 + \cos(x)}$$

- Producto

$$\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$$

$$\operatorname{sen}(x)\cos(y) = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)]$$

A.7 Funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas están definidas como:

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}$$

Por analogía con las funciones trigonométricas hablaremos también de tangente, secante y cosecante hiperbólica.

A.7.1 Identidades hiperbólicas

- Identidades "pitagóricas"

$$\begin{aligned} \cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) &= 1, \\ \tanh^2(x) + \operatorname{sech}^2(x) &= 1 \\ \operatorname{cotanh}^2(x) - \operatorname{cosech}^2(x) &= 1 \end{aligned}$$

- Sumas y diferencias de "ángulos".

$$\begin{aligned} \operatorname{senh}(x+y) &= \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\operatorname{senh}(y), \\ \operatorname{senh}(x-y) &= \operatorname{senh}(x)\cosh(y) - \cosh(x)\operatorname{senh}(y), \\ \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y), \\ \operatorname{senh}(x-y) &= \cosh(x)\cosh(y) - \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y). \end{aligned}$$

- "Ángulo" doble

$$\operatorname{senh}^2(x) = \frac{-1+\cosh(2x)}{2}, \qquad \cosh^2(x) = \frac{1+\cosh(2x)}{2}.$$