Series de números reales y series de potencias

Ejercicio 1. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum \frac{1}{n2^n}$

b) $\sum \frac{\log(n)}{n}$

c) $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

d) $\sum \frac{1}{2n-1}$

e) $\sum \frac{1}{2^n-n}$

f) $\sum \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$

g) $\sum \frac{1}{(2n-1)2n}$

h) $\sum \left(\frac{n}{3n-2}\right)^{2n-1}$

i) $\sum \frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

j) $\sum \frac{2^n}{n}$

k) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$

l) $\sum \frac{n+1}{2n+1}$

m) $\sum \frac{1}{10n+1}$

n) $\sum \frac{1}{n\log(n)}$

ñ) $\sum \frac{1}{n(\log(n))^2}$

Ejercicio 2. Estudiar la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum \frac{(n+1)^n}{3^n n!}$

b) $\sum \sqrt{\frac{3\cdot 4\cdots(n+2)}{6\cdot 7\cdots(n+5)}}$

c) $\sum \frac{n^n}{(2n+1)^n}$

d) $\sum \frac{1}{n^2\log(n)}$

e) $\sum \frac{n^2}{(3n-1)^2}$

f) $\sum \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

g) $\sum \frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}$

h) $\sum \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}$

i) $\sum \frac{1}{n!}$

j) $\sum \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

k) $\sum \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$

l) $\sum \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$

m) $\sum \frac{n^2}{4^{(n-1)}}$

n) $\sum \frac{\log(\frac{n+1}{n})}{(\mathrm{e}-1)^n}$

Ejercicio 3. Estudiar la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum \frac{1}{2n+1}\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

b) $\sum \frac{3^{-\sqrt{n}}}{n}$

c) $\sum \frac{n^3}{\mathrm{e}^n}$

d) $\sum \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

e) $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$

f) $\sum \frac{n^n}{\mathrm{e}^{(n^2+1)}}$

g) $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$

h) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

i) $\sum \frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}$

j) $\sum \left(\frac{n+1}{n^2}\right)^n$

k) $\sum \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$

l) $\sum \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3)}$

m) $\sum (-1)^n \frac{20^n}{n+1}$

n) $\sum \operatorname{sen}\left(\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$

ñ) $\sum \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}$

Ejercicio 4. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) $\sum \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^2$

b) $\sum \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

c) $\sum \log\left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right)$

d) $\sum \frac{\sqrt[3]{n}\log(n)}{n^2+1}$

e) $\sum \frac{2^n}{n!}\operatorname{sen}(n)$

f) $\sum \frac{1}{n\log(n)\log(\log(n))}$

g) $\sum \frac{a^n}{n^a}$ para $a>0$

h) $\sum a^n n^a$ para $a>0$

Ejercicio 5. Determinar el campo de convergencia de las siguientes series de potencias:

a) $\sum(-1)^n x^n$

b) $\sum \frac{1}{n}x^n$

c) $\sum \frac{1}{n^2}x^n$

d) $\sum n^2 x^n$

e) $\sum n! x^n$

f) $\sum n^n x^n$

g) $\sum n(x+2)^n$

h) $\sum \frac{2^n}{3n+1}\left(x+\frac{1}{2}\right)^n$

i) $\sum \log(n)(x-1)^n$

j) $\sum \frac{(-1)^n}{3^n}x^n$

k) $\sum \frac{1}{(\log(n))^n x^n}$

l) $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}x^n$

m) $\sum \frac{(-1)^n\log(n)}{n}x^n$

n) $\sum \frac{1}{2^n(2n+1)x^n}$

ñ) $\sum \frac{n!}{(n+1)^n}x^n$

o) $\sum \frac{1}{\log(n+2)}x^n$

p) $\sum \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}x^n$

q) $\sum \frac{n-\sqrt{n}}{n^2+n+1}x^n$

Ejercicio 6. Calcular el desarrollo en serie de potencias centrado en cero de las siguientes funciones:

a) $\log(1+x)$

b) $\frac{1}{1+x^3}$

c) $\cos(x)$

d) $\log(1+x^2)$

e) e^{-x^2}